

ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ

Лекция

**по учебной дисциплине «Цифровая схемотехника и
обработка сигналов»**

(Д-0205-1)

**Тема № 9: «Описание ЛДС в частотной области»
Занятие № 30: «Расчёт частотных и импульсных
характеристик БИХ-цепей 1-го порядка»**

Руководитель занятия – доцент кафедры, к.т.н., доцент,
полковник Филимонов Василий Александрович

г. Санкт-Петербург
2018





Учебные цели:

1. Сформировать у курсантов навыки самостоятельного расчёта и анализа передаточных функций, частотных и импульсных характеристик БИХ- цепей.
2. Подготовить курсантов к лабораторной работе



Учебные вопросы:

1. Расчёт ИХ БИХ-цепей 1-го порядка.
2. Расчёт частотных характеристик БИХ-цепей 1-го порядка.



Первый учебный вопрос

4

Расчёт ИХ БИХ-цепей 1-го порядка

Первый учебный вопрос

Задача 1. Вычислить 10 отчетов импульсной характеристики по заданному разностному уравнению:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1),$$

и по формуле:

$$h(n) = \begin{cases} b_0, & n = 0; \\ b_0 (-a_1)^n + b_1 (-a_1)^{n-1}, & n > 0. \end{cases}$$

Результаты занести в таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h(n)$										
$y(n)$										

Построить график импульсной характеристики.

К доске вызываются два курсанта, где они *одновременно* производят расчет ИХ двумя разными способами.

Обратить внимание обучающихся на то, что оба способа расчета ИХ дают одинаковые результаты.



Второй учебный вопрос

Расчёт частотных характеристик БИХ-цепей 1-го порядка

Второй учебный вопрос

Задача 2. Получить выражения для АЧХ, ФЧХ и формулы экспресс-анализа для вычисления АЧХ БИХ-цепи по заданному разностному уравнению:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1).$$

Решение.

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z)$$

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1}) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1}).$$

Передаточная функция:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}};$$

Нуль $\beta = z_0$ и полюс $\alpha = z_*$ передаточной функции (ПФ) вычисляются по формулам:

$$\beta = z_0 = -\frac{b_1}{b_0}, \quad \alpha = z_* = -a_1$$

Комплексная частотная характеристика в полной и показательной формах записи:

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\hat{\omega}}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}}}{1 + a_1 e^{-j\hat{\omega}}} = \frac{b_0 + b_1 \cos \hat{\omega} - j b_1 \sin \hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega} - j a_1 \sin \hat{\omega}} \\
 &= |H(e^{j\hat{\omega}})| e^{j \arg H(e^{j\hat{\omega}})} = A(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})}
 \end{aligned}$$

Второй учебный вопрос

получается после подстановки в передаточную функцию:

$$z = e^{j\hat{\omega}} \cos \hat{\omega} - j \sin \hat{\omega}$$

$$|z^{-1}| = |e^{-j\hat{\omega}}| = |\cos \hat{\omega} - j \sin \hat{\omega}| = \sqrt{\cos^2 \hat{\omega} + \sin^2 \hat{\omega}} = 1.$$

Обратить внимание на то, что при изменении частот от 0 до 2π описывается окружность (как в тригонометрии!).

Для удобства сравнения частотных характеристик различных цифровых цепей и задания требований к этим характеристикам обычно частоту и АЧХ нормируют. Нормированные характеристики отмечаются знаком $\hat{\cdot}$, например \hat{f} , $\hat{\omega}$ и т. д.

Нормированной частотой \hat{f} называется отношение текущей частоты f к частоте дискретизации f_d :

$$\hat{f} = \frac{f}{f_d} = fT.$$

Тогда интервал частот $f \in [0; f_d/2]$ преобразуется в интервал частот $\hat{f} \in [0; 0,5]$.

Второй учебный вопрос

Нормированная круговая частота определяется соотношением

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_d} = 2\pi \frac{f}{f_d} = 2\pi \hat{f} = 2\pi fT = \omega T \quad [\text{рад}].$$

Частотам \hat{f} , расположенным в интервале $[0; 0,5]$, соответствуют частоты $\hat{\omega}$ из интервала $[0; \pi]$.

Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\hat{\omega}) = \sqrt{\frac{\text{Re}_1^2 + \text{Im}_1^2}{\text{Re}_2^2 + \text{Im}_2^2}} = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos \hat{\omega})^2 + (a_1 \sin \hat{\omega})^2}{(b_0 + a_1 \cos \hat{\omega})^2 + (a_1 \sin \hat{\omega})^2}};$$

при этом обычно используется нормированная АЧХ:

$$\hat{A}(\hat{\omega}) = \frac{A(\hat{\omega})}{\max_{\hat{\omega}} A(\hat{\omega})} \leq 1.$$

Фазочастотная характеристика определяется как разность аргументов числителя

$$\arg\{H_1(e^{j\hat{\omega}})\} = \varphi_1(\hat{\omega}) = \arctg \frac{-b_1 \sin \hat{\omega}}{b_0 + b_1 \cos \hat{\omega}} = - \arctg \frac{\sin \hat{\omega}}{b_0 + b_1 \cos \hat{\omega}}$$

и знаменателя

$$\arg\{H_2(e^{j\hat{\omega}})\} = \varphi_2(\hat{\omega}) = - \arctg \frac{a_1 \sin \hat{\omega}}{b_0 + a_1 \cos \hat{\omega}};$$

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arg\{H(e^{j\hat{\omega}})\} = \varphi_1(\hat{\omega}) - \varphi_2(\hat{\omega}) = - \left(\arctg \frac{b_1 \sin \hat{\omega}}{b_0 + b_1 \cos \hat{\omega}} - \arctg \frac{\sin \hat{\omega}}{b_0 + a_1 \cos \hat{\omega}} \right).$$

Второй учебный вопрос

Формулы экспресс-анализа для цепей 1-го порядка записывают при $\hat{\omega} = 0, \hat{\omega} = \pi, \hat{\omega} = \pi/2$:

1. $\hat{\omega} = 0$;

$$H(e^{j\hat{\omega}})|_{\hat{\omega}=0} = H(1) = \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1}; \quad A(0) = \left| \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1} \right|;$$

2. $\hat{\omega} = \pi$;

$$H(e^{j\hat{\omega}})|_{\hat{\omega}=\pi} = H(-1) = \frac{b_0 - b_1}{1 - a_1}; \quad A(0) = \left| \frac{b_0 - b_1}{1 - a_1} \right|;$$

3. $\hat{\omega} = \pi/2$;

$$H(e^{j\pi/2}) = H(j) = \frac{b_0 - jb_1 \sin \hat{\omega}}{1 - ja_1 \sin \hat{\omega}} \Big|_{\hat{\omega}=\frac{\pi}{2}} = \frac{b_0 - jb_1}{-ja_1}; \quad |A(0)| = \sqrt{\frac{b_0^2 + b_1^2}{a_1^2}}.$$

Второй учебный вопрос

Задача 3. Построить графики АЧХ (ненормированные и нормированные, используя формулы экспресс-анализа, частота дискретизации $f_d = 10$ кГц), ФЧХ (для случаев 1 и 2), и карты нулей и полюсов по следующим исходным данным:

- 1) $b_0 = 1; b_1 = 0; a_1 = 0,5$; (убедиться в периодичности АЧХ, $-\pi \leq \omega \leq \pi$).
- 2) $b_0 = 1; b_1 = 0; a_1 = -0,5$; (в основной полосе частот здесь и далее).
- 3) $b_0 = 1; b_1 = -1; a_1 = 0,9$.

Таблица расчётных данных

№ бр.	1	2	3	4	5	6	7
a_1	0,7	0,8	-0,7	-0,8	0,8	-0,5	0,5
b_0	1	0,5	0	0	1	1	1
b_1	0	0	1	0,5	0,5	0,5	0
№ бр.	8	9	10	11	12	13	14
a_1	0,8	-0,8	-0,6	0,9	-0,9	-0,5	0,6
b_0	0	0	0,5	1	1	1	-0,5
b_1	0,5	0,5	-1	-1	0,8	0	1

необходимо добиться понимания физической сущности анализируемых решений; в частности, возможности изменять характер избирательности цепи сменой знака коэффициента a_1 .

Второй учебный вопрос

Анализ полученных решений:

частотные характеристики являются периодическими функциями частоты;

нули и полюсы цепей первого порядка являются вещественными;

изменение знака коэффициента a_1 приводит к инверсии АЧХ;

увеличение коэффициента a_1 по модулю приводит к более высокой избирательности АЧХ;

АЧХ цифровой цепи может превышать 1, т. е. цифровые цепи обладают свойством усиления;

при $|b_0| = |b_1|$ получаем $A(\hat{\omega}) = 0$ на частоте $\hat{\omega} = 0$, если $b_0 = -b_1$, и на частоте $\hat{\omega} = \pi$, если $b_0 = b_1$;

импульсная характеристика при $a_1 > 0$ является знакопостоянной (случай НЧ-фильтра), а при $a_1 < 0$ – знакопеременной (случай ВЧ-фильтра).