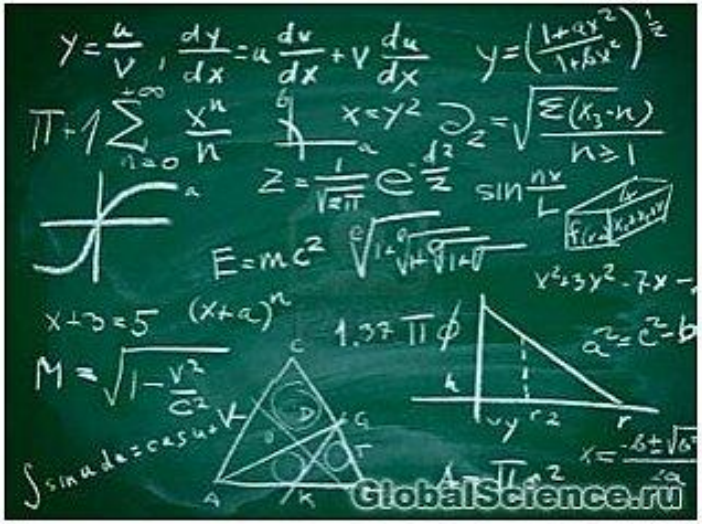
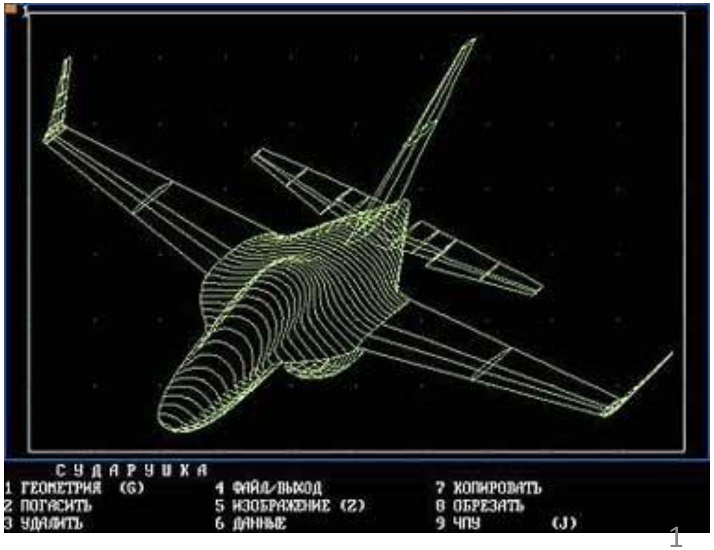
Моделирование технологических процессов

Совокупность понятий и отношений, выраженных при помощи системы математических символов и обозначений и отражающих некоторые свойства изучаемого объекта, и называют ***математической моделью*** этого объекта.



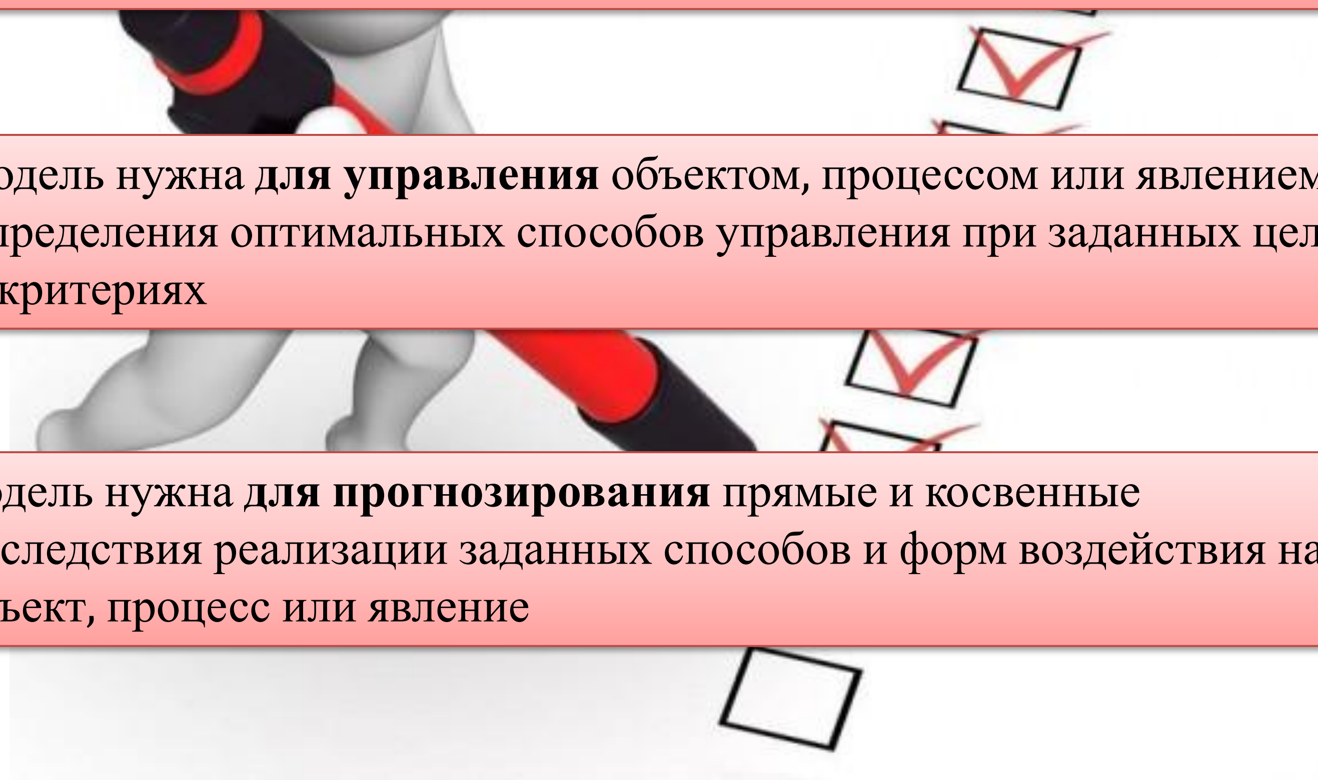


Цели моделирования

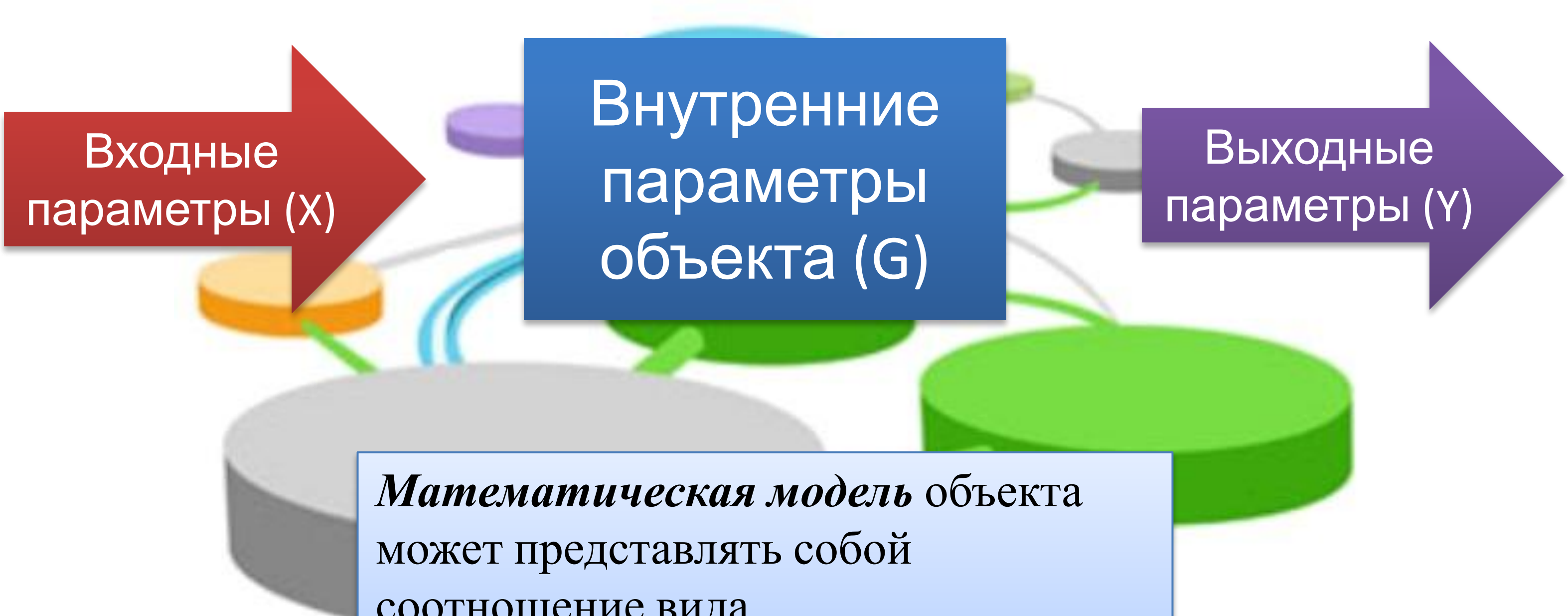
модель нужна **для понимания** внутренней структуры исследуемого объект, процесса или явления, выявления основных свойств, законов развития и взаимодействия с окружающим миром

модель нужна **для управления** объектом, процессом или явлением, определения оптимальных способов управления при заданных целях и критериях

модель нужна **для прогнозирования** прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект, процесс или явление



Структура математических моделей



Математическая модель объекта может представлять собой соотношение вида

$$Y = F(X, G)$$

Свойства математических моделей

- Полнота
- Точность
- Адекватность
- Экономичность
- Наглядность
- Робастность
- Продуктивность

Полнота модели позволяет отразить в достаточной мере именно те

Точность модели дает возможность обеспечить приемлемое совпадение

Под **адекватность** модели понимают правильное качественное и достаточно точное

Экономичность модели оценивают затратами на вычислительные ресурсы

Наглядность модели является ее *желательным*, но необязательным

Робастность модели характеризует ее устойчивость по отношению к погрешностям

Продуктивность модели связана с возможностью располагать достаточно достоверными исходными данными

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Модели

Структурные

Функциональные

Модели отражающие происходящие в системе физические, механические, химические или информационные процессы называется ***функциональным математическим моделям.***

Функциональные модели состоят из соотношений, связывающих между собой *фазовые переменные,* т.е. *Внутренние* (g), *входные* (x) и *выходные параметры* (y) объекта

F(x, g, y)

Стационарные математи...

в которых протекают ***уста...ся процессы***...ессы,

в которых интересующие нас выходные параметры постоянны во

присутствуют случайные величины

отсутствуют случайные величины

Линейная

Нелинейная

Есл... изм... врем... таки... то го...

В ***линейной*** математи...

параметры

связаны линейными соотношениями.

в которых некоторые вых...

а остальные претерпевают колебания.

Если модель не обладает свойством суперпозиции входных воздействий, то ее называют ***нелинейной.***

Иерархические уровни отражают степень детализации описания процессов, протекающих в объектах, его блоках или элементах

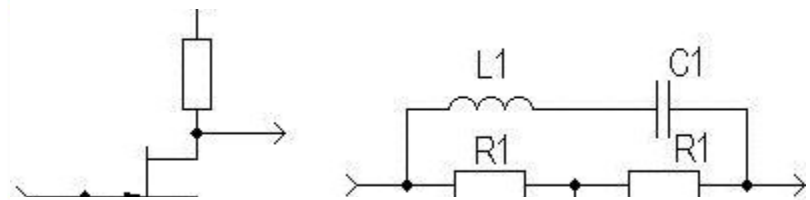
СТЕПЕНЬ ДЕТАЛИЗАЦИИ

Метауровень

Модели ***метауровня*** не рассматривают *внутренние параметры* элементов, ограничиваясь лишь описанием взаимных связей между укрупненными элементами системы в целом

Макроуровень

Математические модели ***макроуровня*** описывают системы с сосредоточенными параметрами



Микроуровень

Математические модели ***микроуровня*** описывают процессы в системах с распределенными параметрами (в континуальных системах)

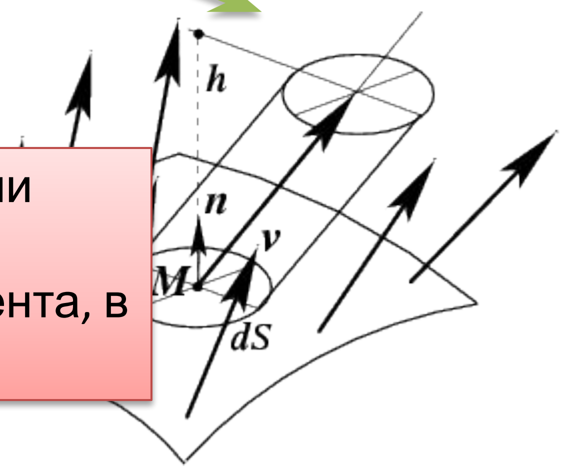
а) б)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОУРОВНЯ

фазовые переменные зависят только от времени

Входные и **Выходные** параметры

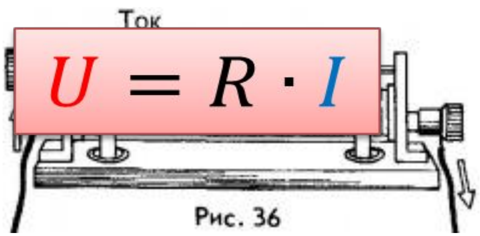
Связь между этими величинами устанавливают при помощи ***уравнений состояния*** элемента, в которые входят также и его внутренние параметры



Потенциальные величины

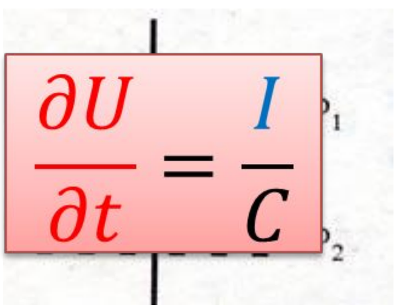
Потоковые величины

ПАССИВНЫЕ ТИПОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ



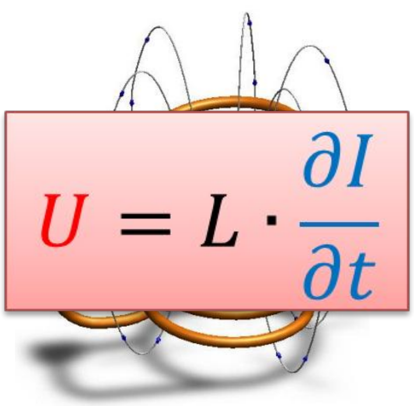
$$U = R \cdot I$$

Резистор это объект, обладающим свойством оказывать сопротивление переносу некоторой физической субстанции



$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{I}{C}$$

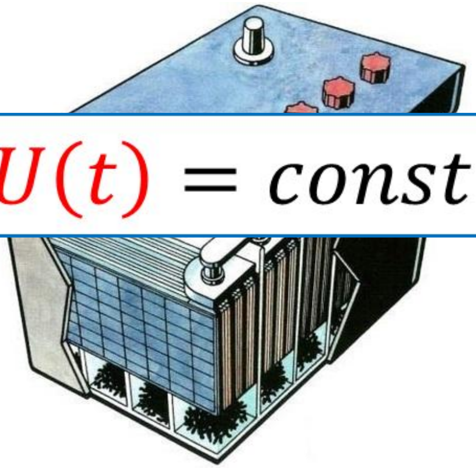
Конденсатор обладает свойством накапливать физическую субстанцию



$$U = L \cdot \frac{\partial I}{\partial t}$$

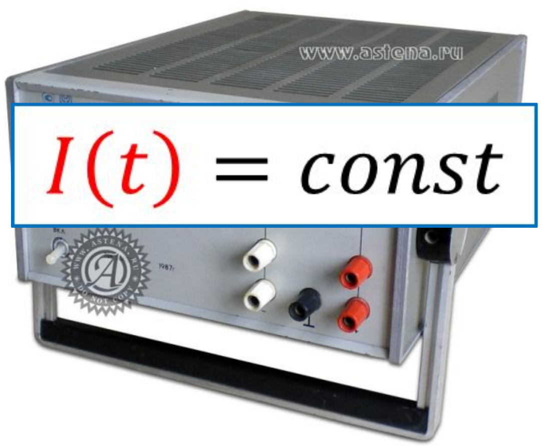
Катушка индуктивности обладает свойством инерции, проявляющимся в стремлении сохранить поток физической субстанции неизменным

АКТИВНЫЕ ТИПОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ



$$U(t) = const$$

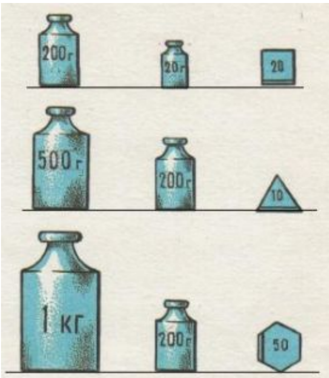
Идеальный ***источник потенциальной величины*** является объект или устройство, у которого выходная потенциальная величина не зависит от его входной потоковой величины

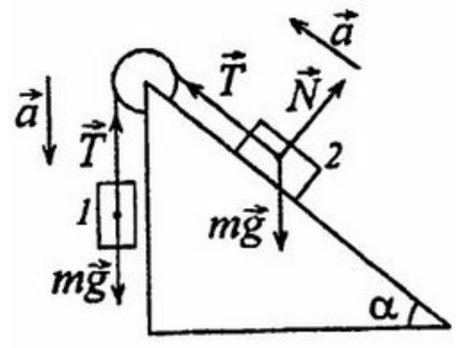


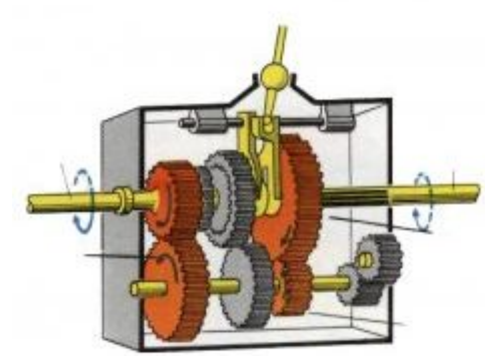
$$I(t) = const$$

Идеальный ***источник потоковой величины*** является объект или устройство, у которого выходная потоковая величина не зависит от его входной потенциальной величины

МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

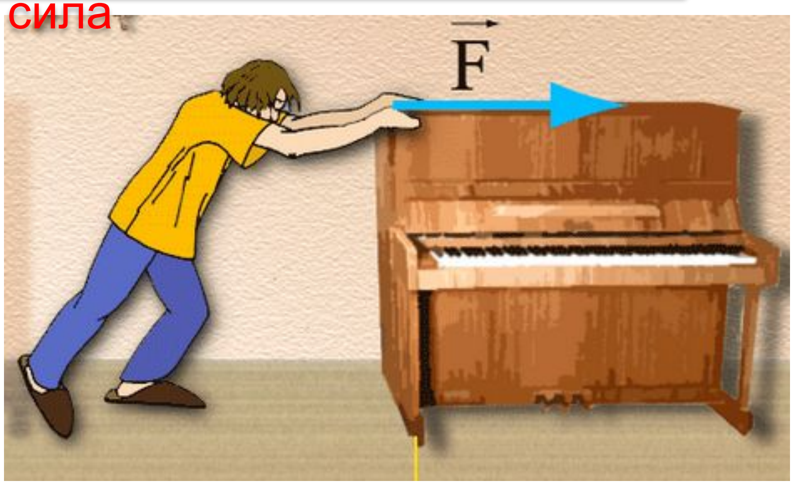




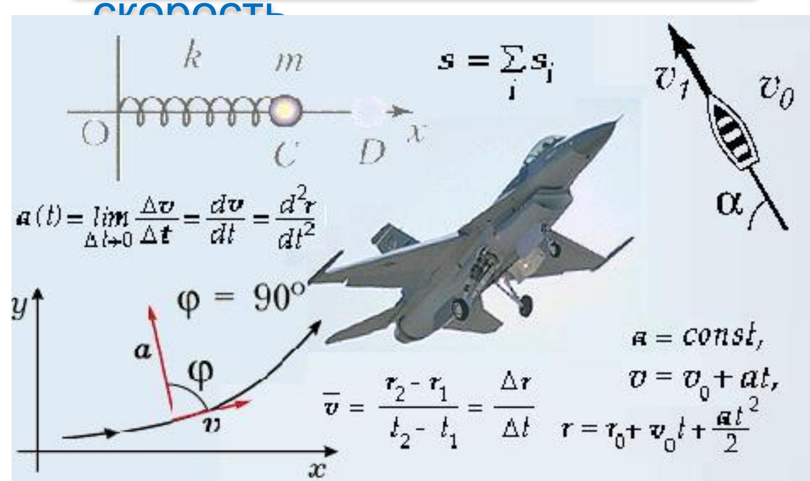


В механических системах физическая субстанция это **масса** тел

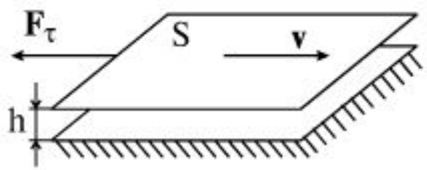
Потенциальная величина - сила



Потоковая величина - скорость



МЕХАНИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ



Вязкое трение – это явление возникновения касательных сил, препятствующих перемещению частей жидкости или газа друг по отношению к другу.

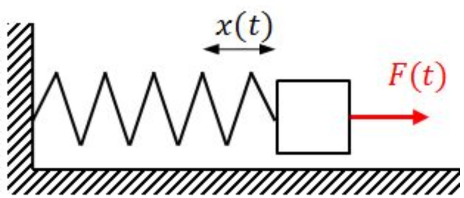
$$F = R_m \cdot v$$

Закон вязкости Ньютона: величина силы вязкого трения F прямо пропорциональна скорости относительного движения v тел, площади S их контакта и обратно пропорциональна расстоянию h между контактирующими телами:

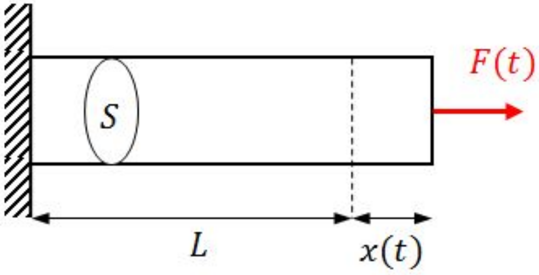
$$F = \tau \cdot v \cdot \frac{S}{h} = R_m \cdot v$$

здесь $R_m = \tau \cdot \frac{S}{h}$ - механическое сопротивление; τ – коэффициент вязкого трения, который зависящий от сорта жидкости, [кг/с].

МЕХАНИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ



В технических устройствах различного назначения существует **упругая механическая связь** между отдельными деталями и агрегатами.



$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{v}{C_m}$$

Изменение во времени силы $F(t)$ приведет к

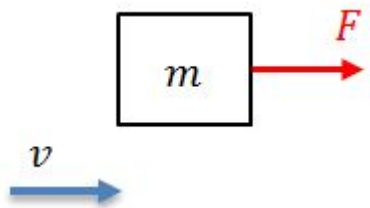
Продольную деформацию $\varepsilon = \frac{x}{L}$ линейно упругого стержня с поперечным сечением площадью S при растяжении силой $F(t)$ можно считать одинаковой по всей длине L стержня и равной в соответствии с **законом Гука**:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial (E \cdot \varepsilon)}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{v}{C_m}$$

здесь $\sigma = \frac{F(t)}{S}$ - механическое напряжение в поперечном сечении стержня; E - модуль упругости материала стержня при растяжении (модуль Юнга);

$C_m = E \cdot \frac{S}{L}$ - механическая емкость

МЕХАНИЧЕСКАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ



В механических системах все отдельные звенья и агрегаты обладают определенной **массой**.

$$F = L_m \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

2-й закон Ньютона: в случае поступательного движения ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе тела.

$$F(t) = m \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = L_m \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

здесь $L_m = m$ - механическая индуктивность.

ТЕПЛОВЫЕ СИСТЕМЫ

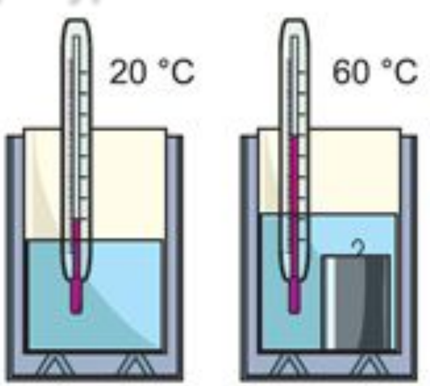
Принципиальная схема теплового насоса

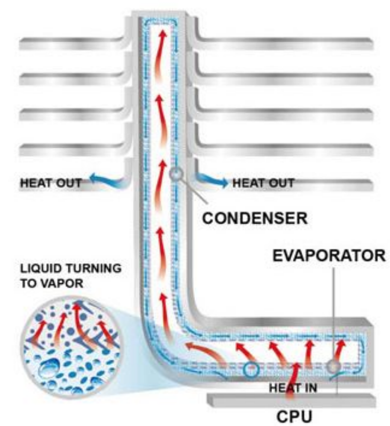
Под ***тепловыми системами*** будем понимать технические системы, в которых происходит накопление и перенос тепловой энергии.

В тепловых системах физическая субстанция это **количество тепла**

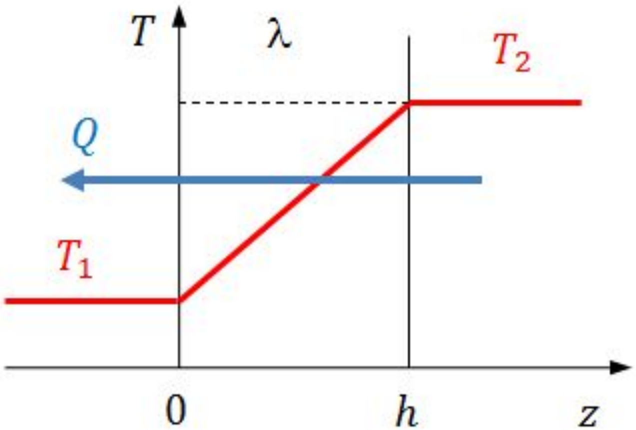
Потенциальная величина - температура

Потоковая величина – тепловой поток

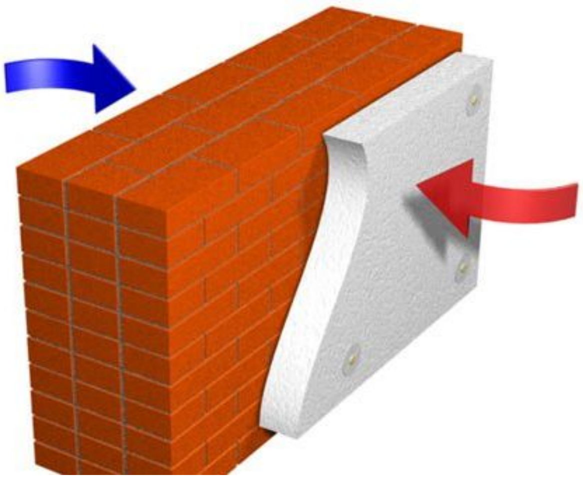




ТЕПЛОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ



$$\Delta T = R_T \cdot Q$$



Многие элементы конструкции тепловых систем могут быть сведены к расчетной схеме плоской стенки толщиной h

В соответствии с эмпирическим **законом теплопроводности Фурье**, тепловой поток Q, проходящий через стенку, одна из поверхностей которой имеет площадь S, пропорционален разности температур :

$$Q = \lambda \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{h} \cdot S \rightarrow \Delta T = R_T \cdot Q$$

λ - коэффициент теплопроводности;

$\Delta T = (T_2 - T_1)$ - разность температур на стенках пластины;

$R_T = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{h}{S}$ - термическое сопротивление пластины.

ТЕПЛОВАЯ ЕМКОСТЬ

Если некоторая деталь или конструкция выполнены из материала с **высокой теплопроводностью**, то их температуру можно приближенно постоянной во всем объеме конструкции V.

В этом случае тепловое состояние конструкции в любой текущий момент времени t допустимо характеризовать лишь **одним значением температуры** .

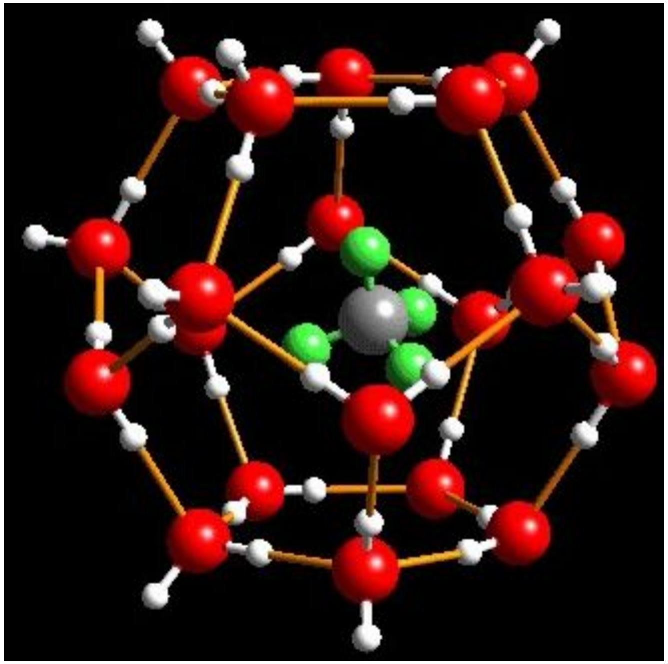
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{Q}{C_T}$$

При изменении температуры во времени $T(t)$ тепловая энергия тела постоянной конфигурации ($V = const$) изменяется со скоростью:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \int_0^T c(T, M)\, dT\, dV \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{Q}{C_T}$$

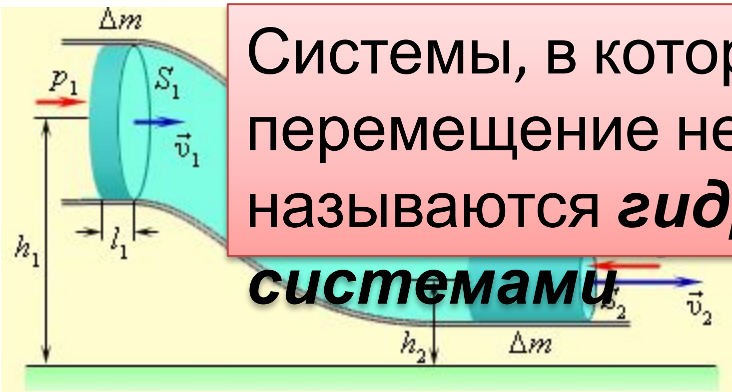
здесь $C_T = \int_V \ c(T, M) dV$ - полная теплоемкостью тела

ТЕПЛОВАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ

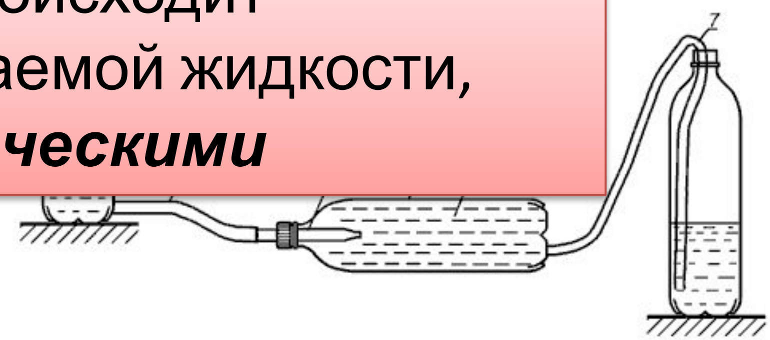


Эмпирический закон теплопроводности Фурье предполагает, что в ответ на появление в материале с конечным коэффициентом теплопроводности градиента температуры **мгновенно возникает тепловой поток**. Это равносильно предположению, что скорость распространения тепловой энергии в материале бесконечно велика. Однако, в реальном материале неизбежно некоторое запаздывание возникновения теплового потока по отношению к появлению градиента температуры. Величина такого запаздывания зависит от микромеханизма передачи тепловой энергии в материале и связана со временем обмена энергией между отдельными элементами микроструктуры материала.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ



Системы, в которых происходит перемещение несжимаемой жидкости, называются ***гидравлическими системами***



Физическая субстанция - **несжимаемая жидкость**

Потенциальная величина - давление

Потоковая величина – объемный расход

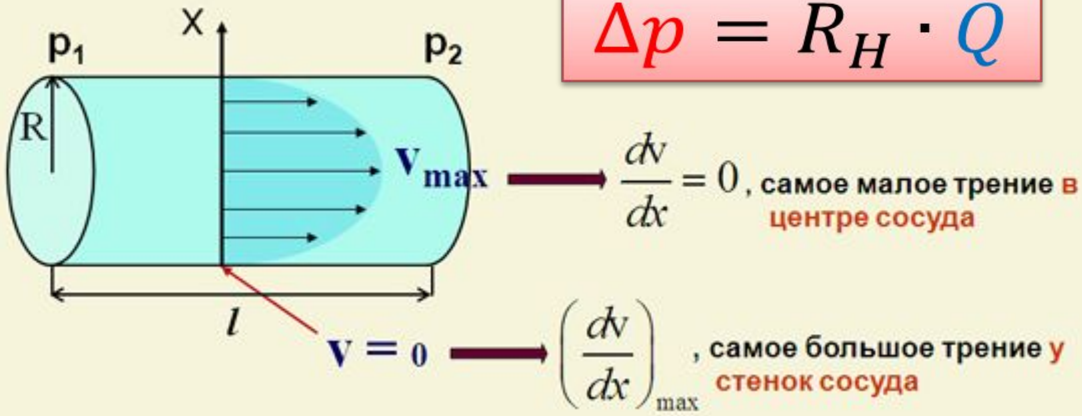
ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Гидравлическое сопротивление **зависит от формы сечения трубопровода**, если сечение не является круглым

ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Параболический профиль скоростей при течении вязкой жидкости по сосуду

$$\Delta p = R_H \cdot Q$$



p_1, p_2 – давления на концах трубы

Для участка трубопровода длинной l круглого поперечного сечения радиусом R при установившемся ***ламинарном течении вязкой жидкости*** зависимость скорости v_x вдоль оси, трубопровода от радиальной координаты x:

$$v_x = \frac{R^2 - x^2}{4\eta L} \cdot (p_2 - p_1)$$

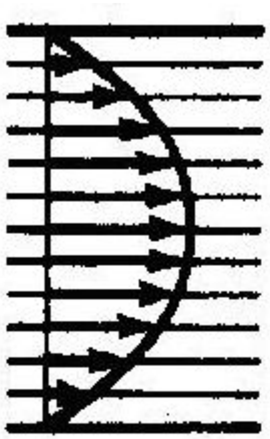
здесь $\eta > 0$ – коэффициент сдвиговой вязкости жидкости, измеряемый в [Па·с]

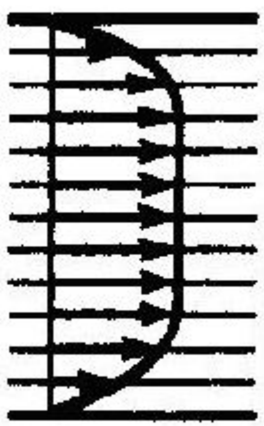
Объемный расход жидкости через трубопровод:

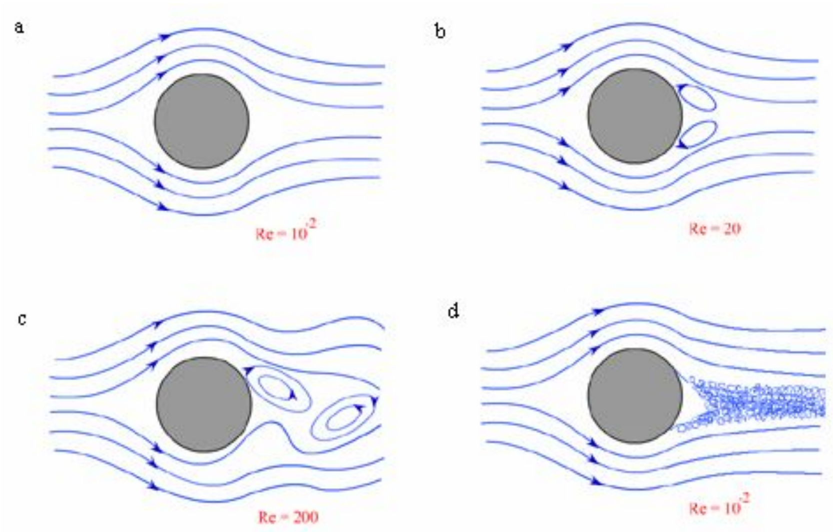
$$Q = \oint_S v_x dS = \int_0^R v_x(x) \cdot 2\pi x dx = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \cdot \Delta p$$

Величину $R_H = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$ можно рассматривать как **гидравлическое сопротивление** участка трубопровода и записать аналогию закону Ома

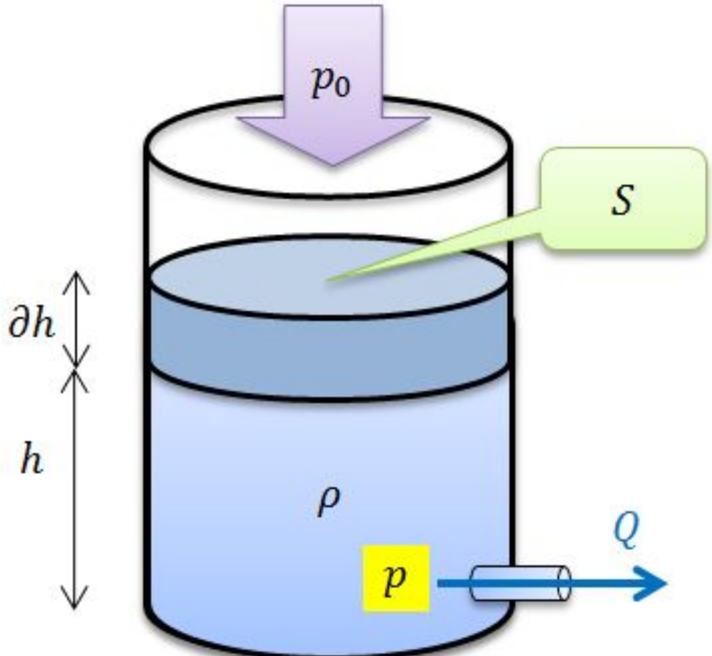
При увеличении объемного расхода жидкости Q через трубопровод растет ее скорость и ***ламинарный режим*** течения ***переходит в турбулентный***, при этом гидравлическое сопротивление R_T зависит от объемного расхода жидкости, т.е. математическая модель установившегося течения в трубопроводе оказывается ***нелинейной***.


Ламинарное


Турбулентное



ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ



Истечение жидкости из вертикального цилиндрического сосуда поперечным сечением площадью S через трубопровод, присоединенный к плоскому дну сосуда.

При движение жидкости справедлив **закон Бернулли**:

$$p = \frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho g h + p_0 = const$$

ρ – плотность жидкости;
v – скорость движения жидкости в сосуде;
h – высота жидкости в сосуде;
p_0 – давление над зеркалом жидкости.

Если скорость течения жидкости в трубопр... ***но мала***:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \frac{Q}{C_H}$$

то разность давлений над зеркалом жидкости и вблизи трубопровода:

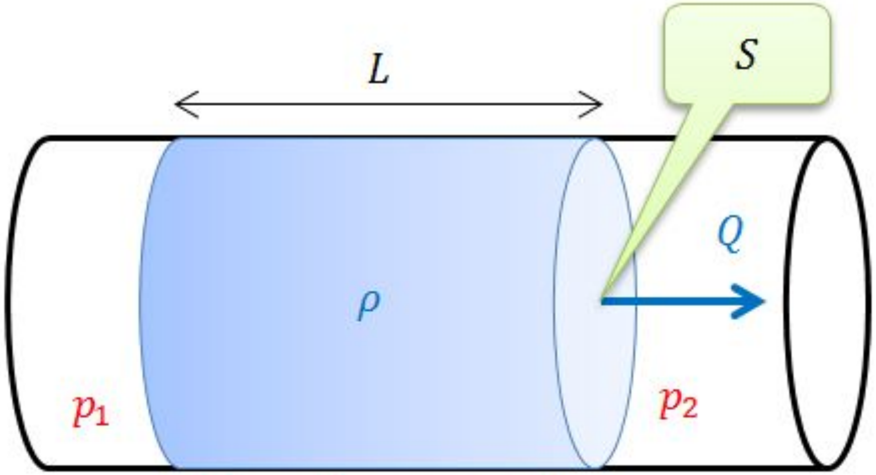
$$\Delta p = (p - p_0) = \rho g h$$

Объемный расход через трубопровод:

$$Q = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{S}{\rho g} \cdot \frac{\partial \Delta p}{\partial t} = C_H \cdot \frac{\partial \Delta p}{\partial t}$$

$C_H = \frac{S}{\rho g}$ – гидравлическая емкость.

ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ



$\Delta p = (p_1 - p_2) > 0$

Рассмотрим участок горизонтального цилиндрического трубопровода длиной L и площадью поперечного сечения S, по которому течет с переменным во времени объемным расходом $Q(t)$ идеальная (***невязкая***) несжимаемая жидкость плотностью ρ.

В некоторый момент времени t на участке трубопровода находится жидкость массой $\boldsymbol{m = \rho \cdot V}$, которая движется со скоростью:

$$v(t) = \frac{Q(t)}{S}$$

$V = S \cdot L$ – объем жидкости.

При п… за счет ускор… возни…

$$\Delta p = L_H \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$F_i = m \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = \rho L \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}$$

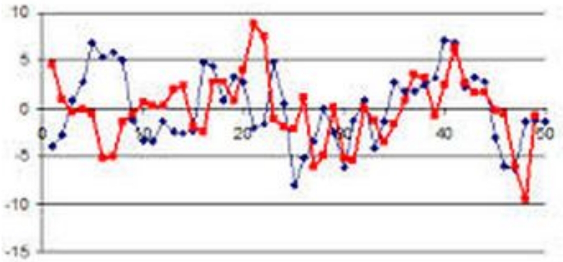
Так как жидкость ***идеальная***, то гидравлическое сопротивление при ее течении отсутствует ($\boldsymbol{R_H = 0}$), и сила инерции F_i уравновешена лишь разностью сил давления в поперечных сечениях трубопровода.

АНАЛОГИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МОДЕЛЕЙ МАКРОУРОВНЯ

	Электри-ческие	Механи-ческие	Тепловые	Гидравли-ческие
Резистор				
Емкость				
Индуктивность				
Субстанция	Электрический заряд	Материальное тело	Тепловая энергия	Несжимаемая жидкость
Потенциальная величина	Напряжение	Сила	Разность температур	Разность давлений
Потоковая величина	Сила тока	Скорость	Тепловой поток	Объемный расход

Вывод: в различных системах можно выделить простейшие элементы, математические модели, которые с точностью до обозначений совпадают с моделями идеализированного резистора, конденсатора и катушки индуктивности.

АДЕКВАТНОСТЬ МОДЕЛЕЙ МАКРОУРОВНЯ



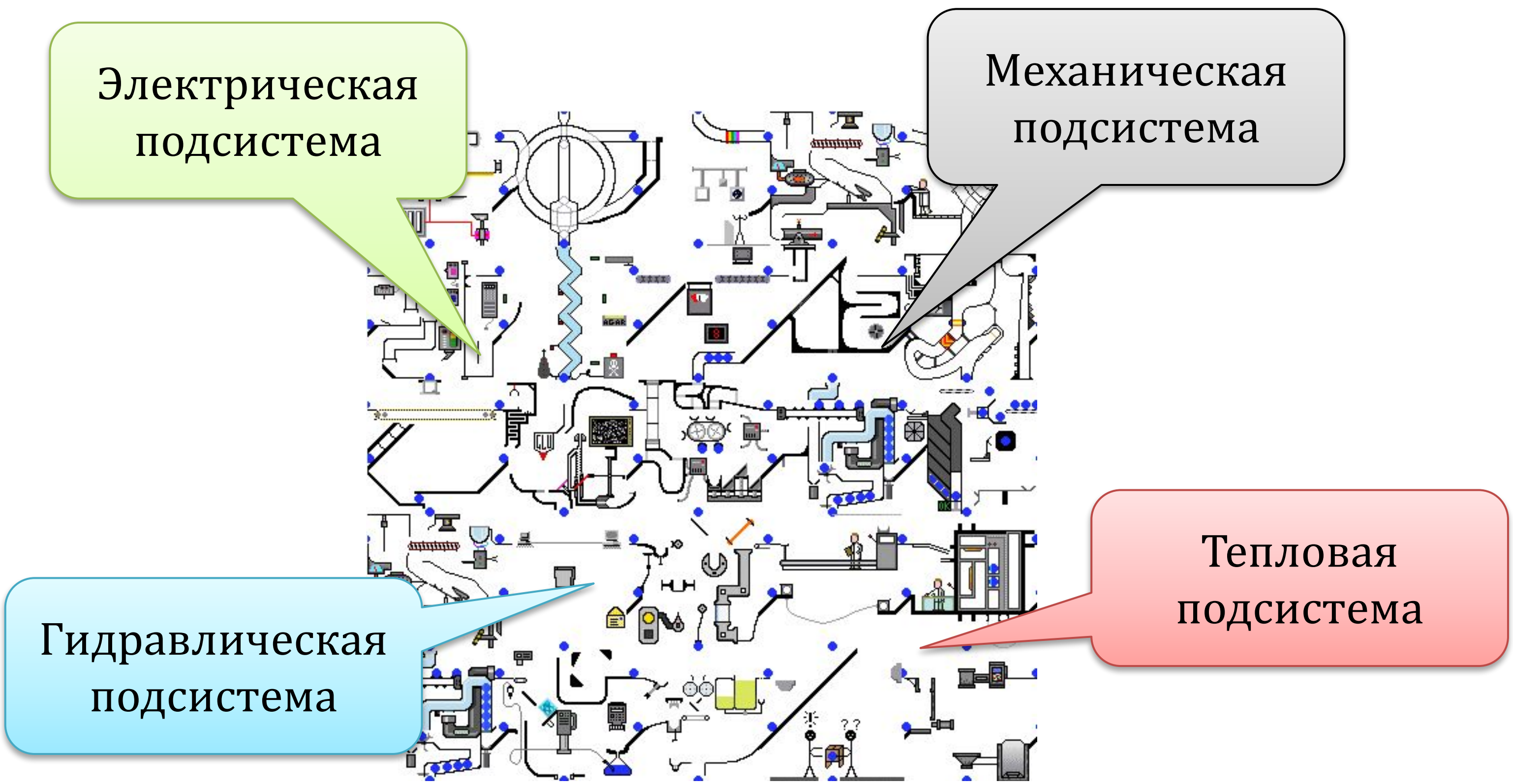
Применение математических моделей макроуровня простейших типовых элементов для описания реальных систем вызывает неизбежные погрешности.

Одной из **причин** возникновения погрешностей при исполь зовании математической модели макроуровня является **пренебрежение пространственным распределением параметров**, характеризующих свойства типовых элементов и протекающие в них процессы

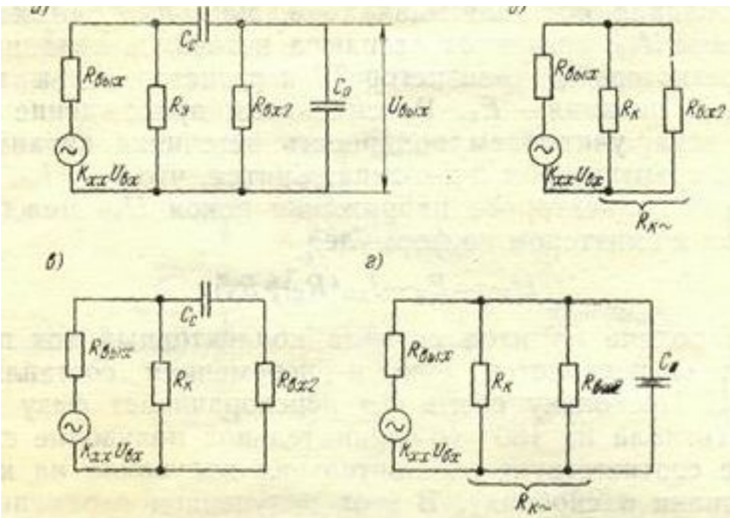
Поэтому для выявления **области адекватности** моделей макроуровня даже простых элементов (резистор, конденсатор или катушка индуктивности) требуется рассмотрение математических моделей **микроуровня физических процессов** протекающих в этих объектах

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При математическом моделировании технического устройства, в котором протекают процессы **различной физической природы**, прежде всего необходимо для каждого из таких процессов выделить типовые элементы, образующие однородную по физическим свойствам электрическую, механическую, тепловую, гидравлическую и т.п. систему.



При описании модели макроуровня **сложной системы**, состоящей из большого числа взаимосвязанных между собой типовых элементов, необходимо оперировать **эквивалентными схемами**, основанными на аналогиях между математическими моделями элементов, принадлежащих различным физическим системам.

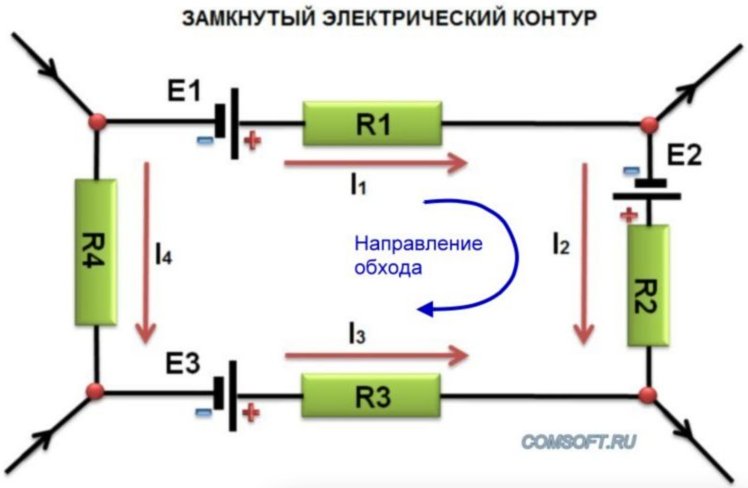


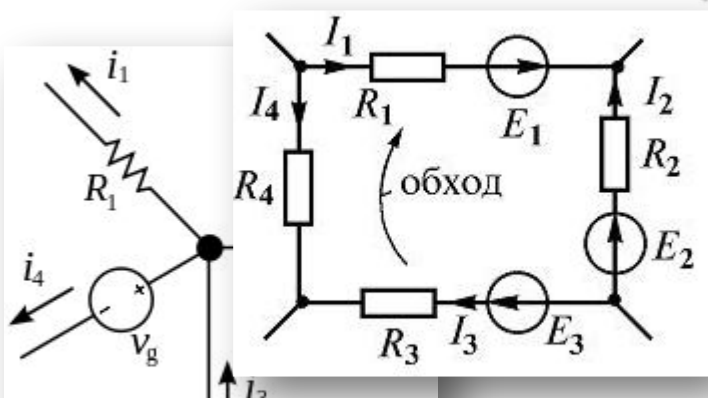
Под **эквивалентной схемой** системы, состоящей из типовых элементов, понимают их условное изображение в виде двухполюсников и **связей между ними**

Эквивалентную схему в виде элек трической цепи, объединяющей двухполюсники, можно считать наглядным представлением **структурной математической модели** рассматриваемой системы.

При построении математической модели электрической системы **объединяют** модели входящих в эту **систему типовых элементов**: резисторов, конденсаторов и индуктивных катушек. Такое объединение проводят, применяя к эквивалентной схеме **законы Кирхгофа**.

ЗАКОНЫ КИРХГОФА





Если в контуре нет источников ЭДС (идеализированных генераторов напряжения), то суммарное падение напряжений равно нулю

1) Первый закон Кирхгофа устанавливает, что алгебраическая сумма токов в каждом узле любой цепи равна нулю:

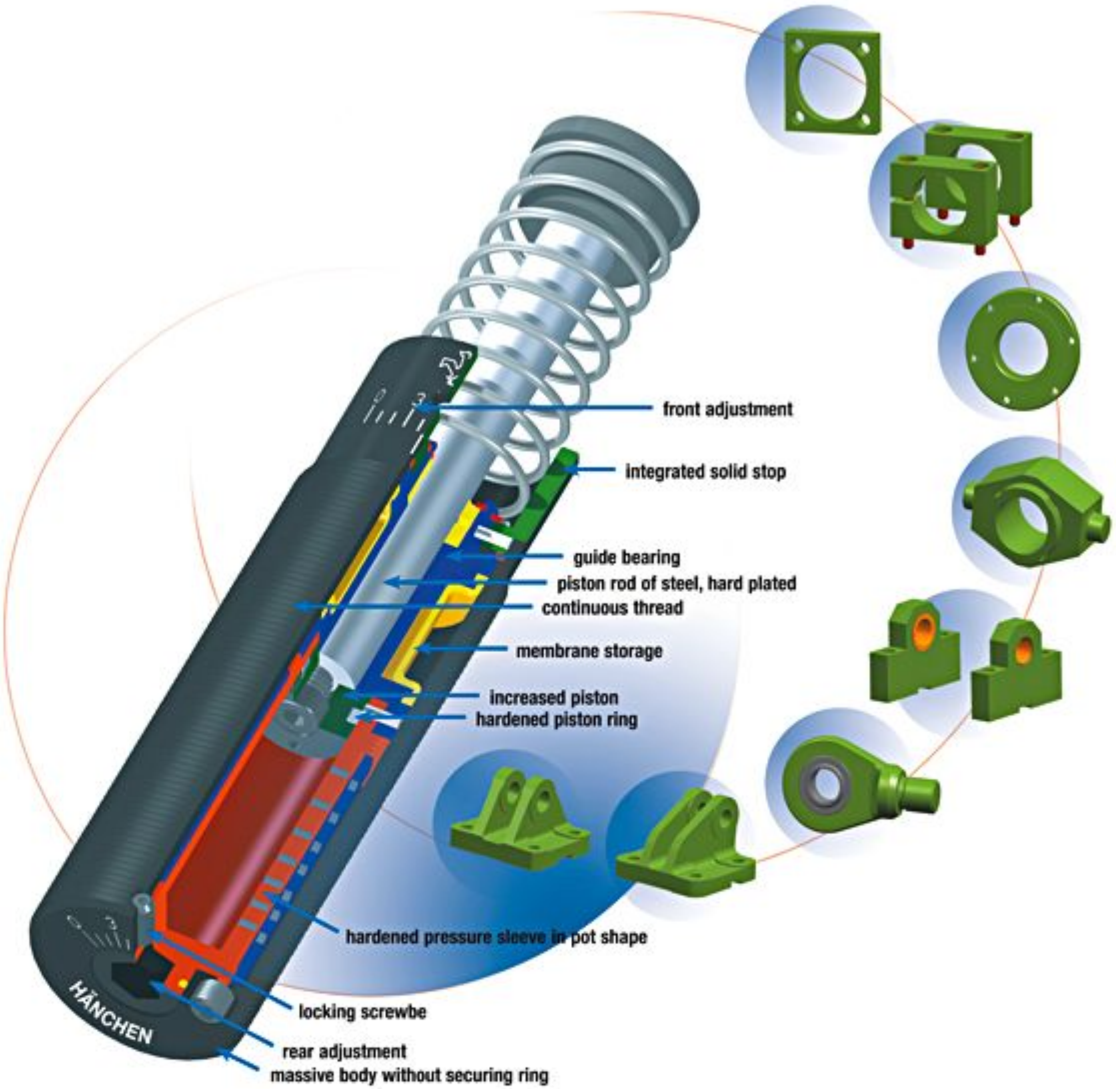
$$\sum_{k=0}^{N} I_k = 0$$

2) Второй закон Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма падений напряжений на всех ветвях, принадлежащих любому замкнутому контуру цепи, равна алгебраической сумме **ЭДС** ветвей этого контура:

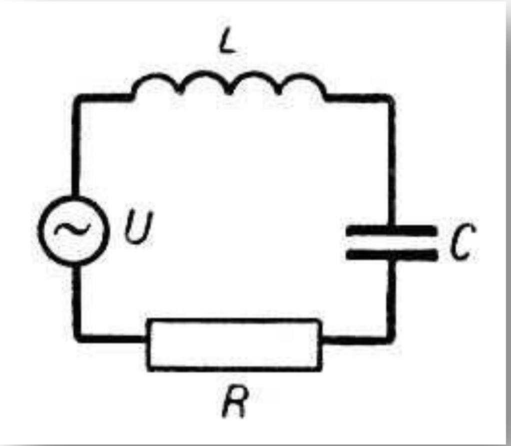
$$\sum_{l=0}^{M} E_l = \sum_{l=1}^{K} U_l$$

МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Автомобильный амортизатор



Эквивалентная схема



$$F_L = L_m \cdot \frac{\partial v_L}{\partial t}$$

і Кирхгофа
модели

ИСПОЛЬЗУЕМ ЗАКОНЫ КИРХГОФА ДЛЯ ФОРМУЛИРОВКИ МОДЕЛИ

1) Потоковая величина (**скорость**) **одинакова** во всех элементах контура

2) Внешняя потенциальная величина (**сила**) распределяется среди всех элементов контура

$$v_R = v_C = v_L = v$$

$$F(t) = F_L + F_C + F_R$$

$$F(t) = L_m \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + F_C + R_m \cdot v$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{F(t)}{L_m} - \dfrac{F_C}{L_m} - \dfrac{R_m}{L_m} \cdot v \\ \dfrac{\partial F_C}{\partial t} = \dfrac{v}{C_m} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

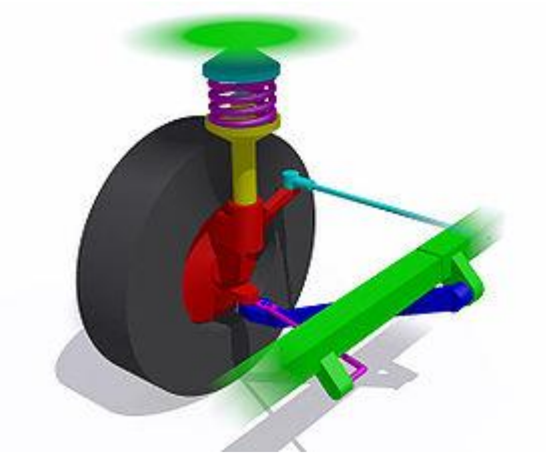
Проблема: определить положение поршня $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ в различные моменты времени!

УРАВНЕНИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ПОРШНЯ АМОРТИЗАТОРА

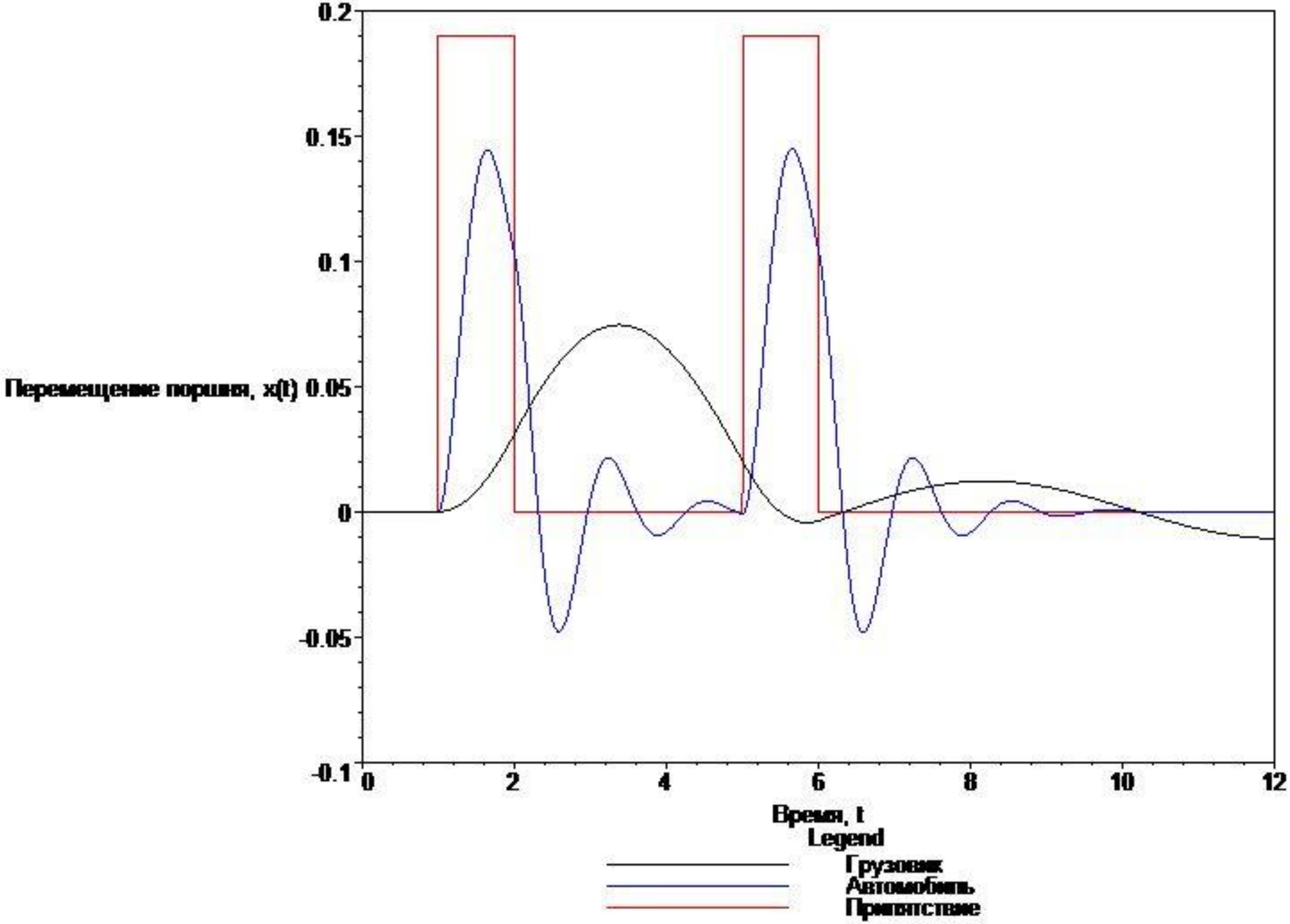
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{F(t)}{L_m} - \dfrac{F_C}{L_m} - \dfrac{R_m}{L_m} \cdot v \\
\dfrac{\partial F_C}{\partial t} = \dfrac{v}{C_m} \\
\dfrac{dx}{dt} = v
\end{cases}
$$

Начальные условия:

$$
\begin{cases}
v(0) = 0 \\
F_C(0) = 0 \\
x(0) = 0
\end{cases}
$$

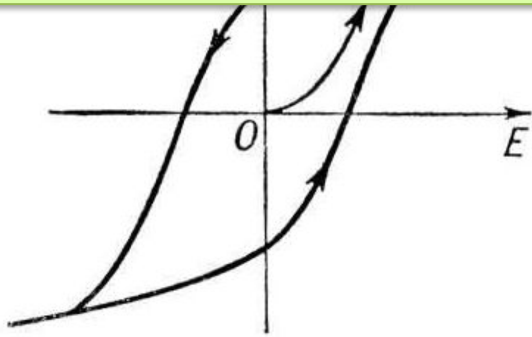


РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

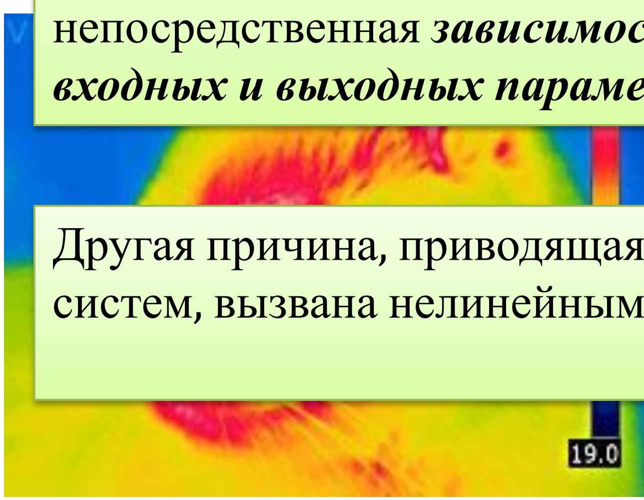


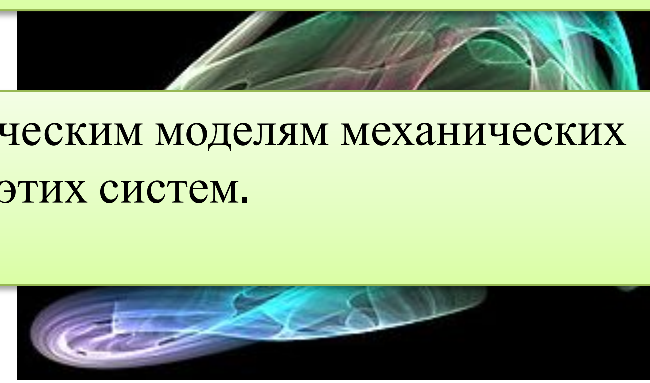
НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАКРОУРОВНЯ

Достаточно полные и адекватные реальным техническим объектам математические модели ***обычно*** являются ***нелинейными***



Среди причин, приводящих к необходимости рассматривать нелинейные математические модели технических объектов, одной из основных является непосредственная ***зависимость*** значений ***внутренних параметров*** объекта ***от входных и выходных параметров.***





Другая причина, приводящая к нелинейным математическим моделям механических систем, вызвана нелинейными свойствами элементов этих систем.