- **ТЕМА 5.2 ВИДЫ ГРАФОВ**

Контрольные вопросы

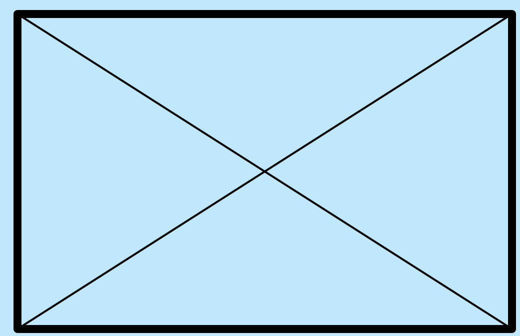
1. Виды графов: простой, полный, псевдограф, мультиграф.
2. Эйлеров и гамильтонов графы.
3. Методика проверки графа на эйлеровость.
4. Деревья и их свойства.
5. Кодирование Пруффера для деревьев с пронумерованными вершинами

Виды графов

Неориентированный граф называется **<u>простым</u>**, если он не имеет петель и любая пара вершин соединена не более чем одним ребром.

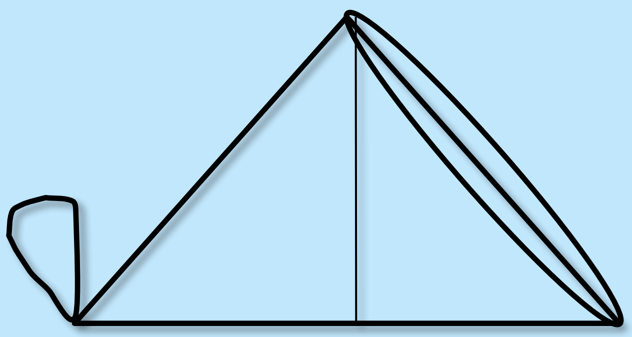
Простой граф называется **<u>полным</u>**, если каждая пара вершин соединена ребром

Простой граф

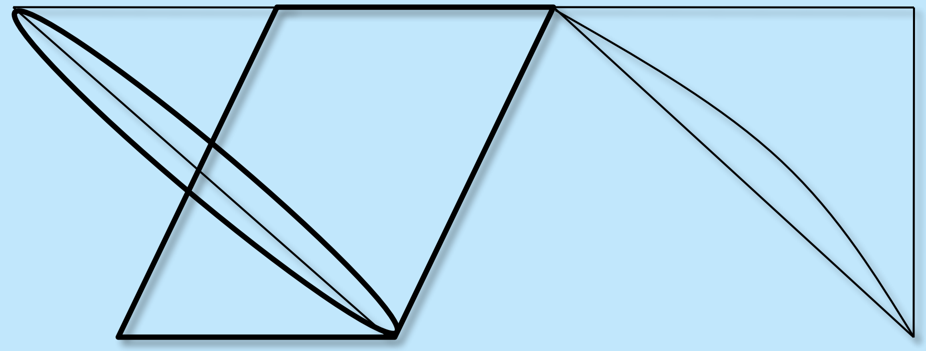


Полный граф

Псевдограф и мультиграф



псевдограф



мультигр
аф

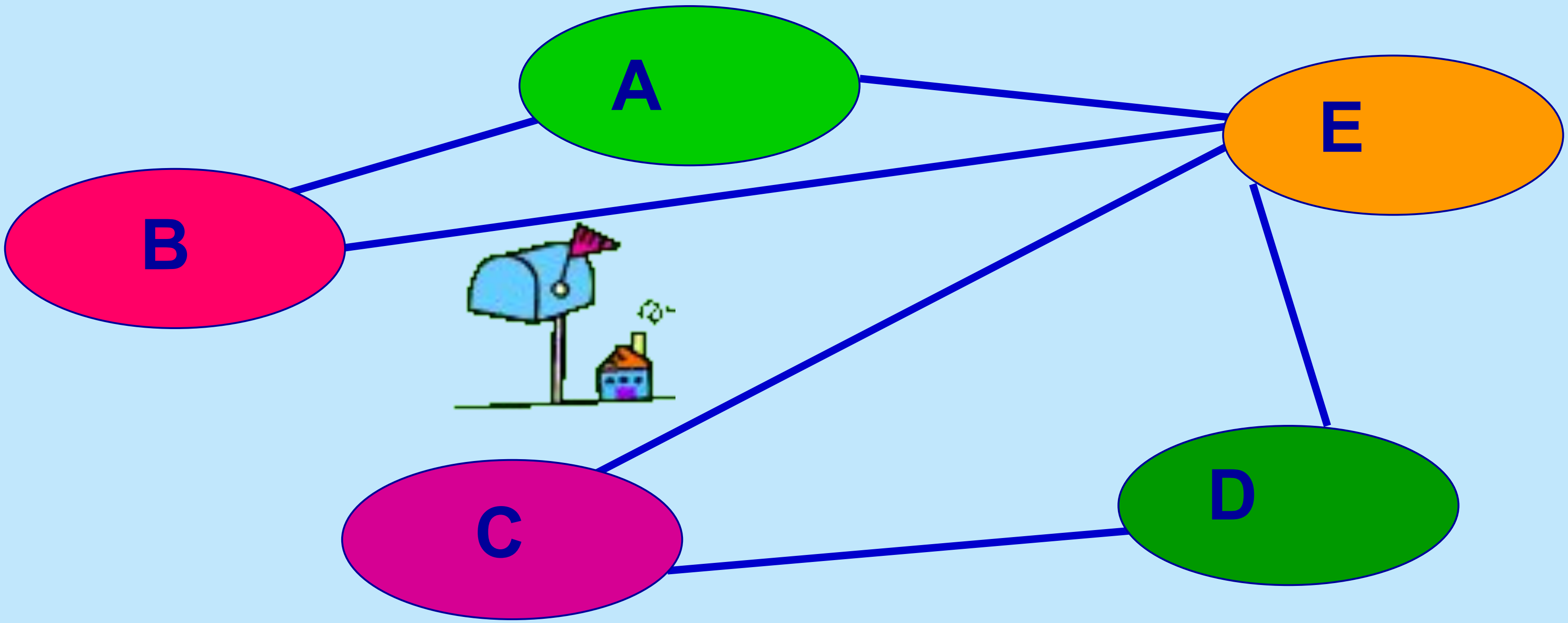
Граф называется **псевдографом**, если в нем допускаются петли и кратные ребра, т.е. две вершины могут быть соединены более чем одним ребром.

Псевдограф без петель называется **мультиграфом**.

Путь, цепь, цикл

Цепь – путь по вершинам и ребрам, включающий любое ребро графа не более одного раза.

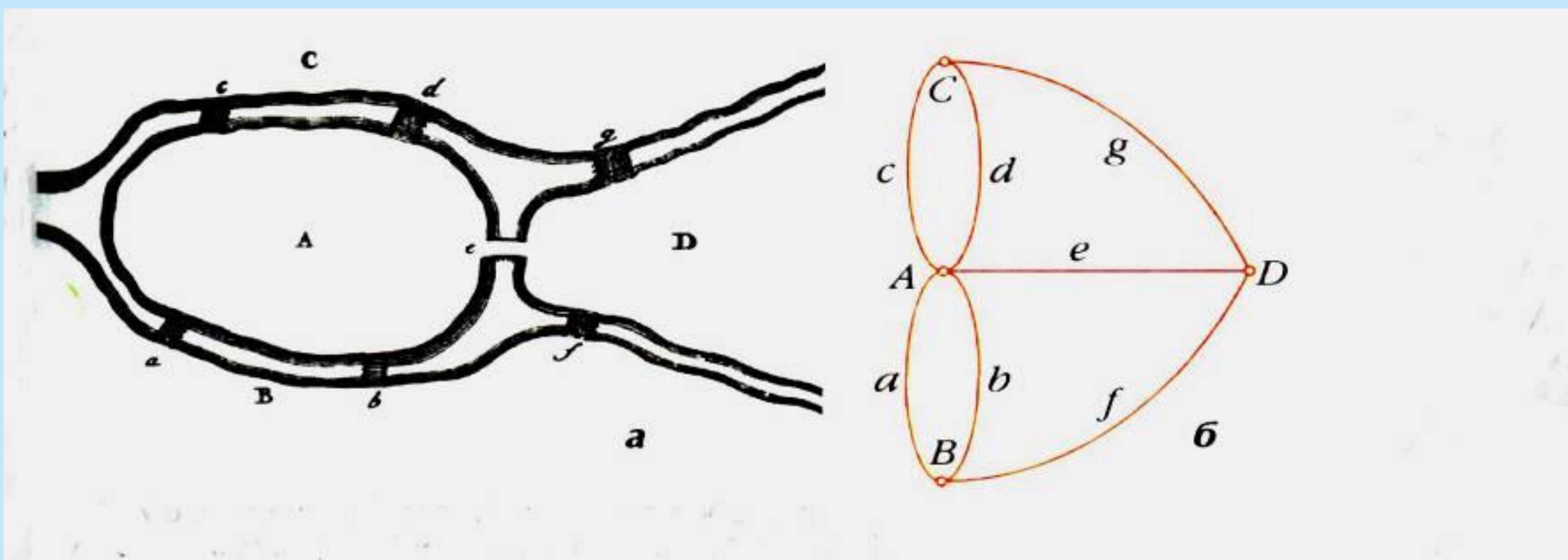
Цикл – цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают. Граф с циклом называют ***сетью***.



Приведите примеры цепи и цикла.

Эйлеровы графы

Бывший Кенигсберг, ныне Калининград, расположен на реке Прегель. А пределах города река омывает два острова. С берегов на острова были перекинуты мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены. Жители города предлагали приезжим следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, причём на каждом мосту следовало побывать только один раз.



Прогуляться по городским мостам предложили и Эйлеру. После безуспешной попытки совершить нужный обход, он начертил упрощённую схему мостов. Получился граф, вершины которого – части города, разделённые рекой, а рёбра – мосты.
В итоге он доказал общее утверждение: **для того, чтобы можно было обойти всё рёбра графа по одному разу и вернуться в исходную вершину, необходимо и достаточно выполнение двух условий**:

Из любой вершины графа должен существовать путь по его рёбрам в любую другую вершину (граф должен быть связным);
Из каждой вершины должно выходить чётное количество рёбер.

Методика нахождения эйлерова цикла в эйлеровом графе

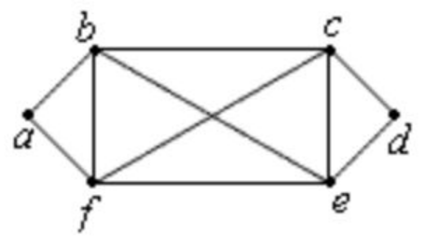
1. Убедимся в том, что граф является эйлеровым (степени всех вершин четны).

2. Начиная с произвольной вершины, строим цепь, удаляя рёбра и запоминая вершины, пока не придём в ту же вершину, с которой начали.

3. Берём следующую вершину и продолжаем процесс, пока не будут удалены все рёбра.

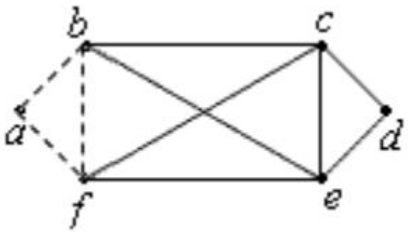
4. Объединяем полученные последовательности в одну.

ПРИМЕР

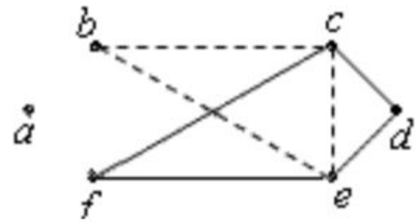


$d(a)=d(d)=2$

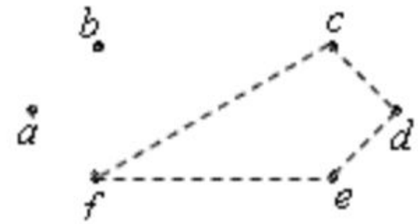
$d(b)=d(c)=d(\mathrm{e})=d(f)=4$ – граф эйлеров



abfa



bceb



cdefc

$a\underline{bceb}fa$

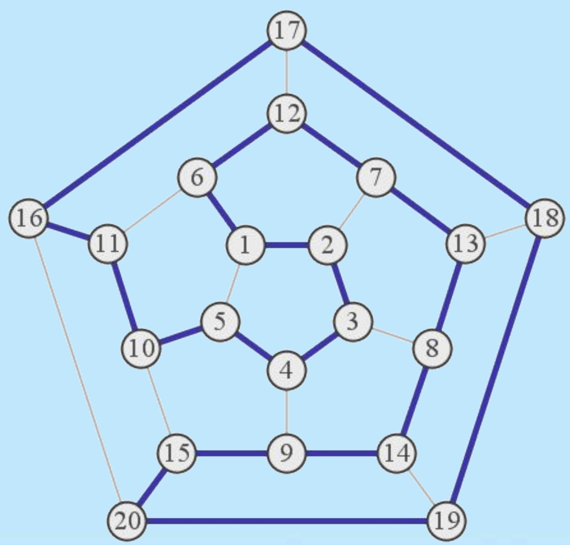
$ab\underline{cdefc}ebfa$

Гамильтоновы графы

Гамильто́нов граф — граф, содержащий *гамильтонов цикл*.

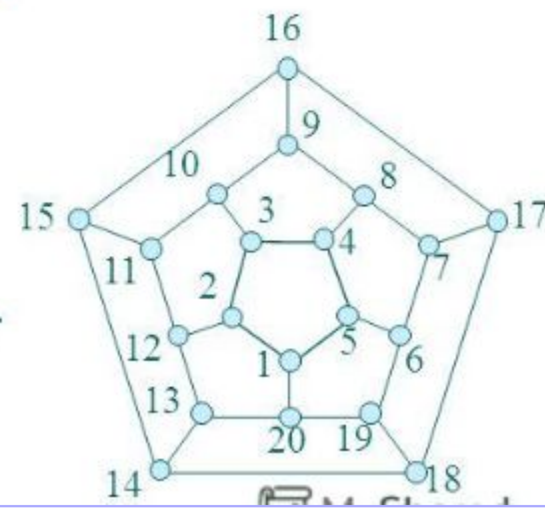
При этом ***гамильтоновым циклом*** является такой цикл (замкнутый путь), который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу; то есть простой цикл, в который входят все вершины графа.

Также с гамильтоновым графом тесно связано понятие **гамильтонова пути**, который является простым путём (путём без петель), проходящим через каждую вершину графа ровно один раз. Гамильтонов путь отличается от цикла тем, что у пути начальные и конечные точки могут не совпадать, в отличие от цикла. Гамильтонов цикл является гамильтоновым путём.



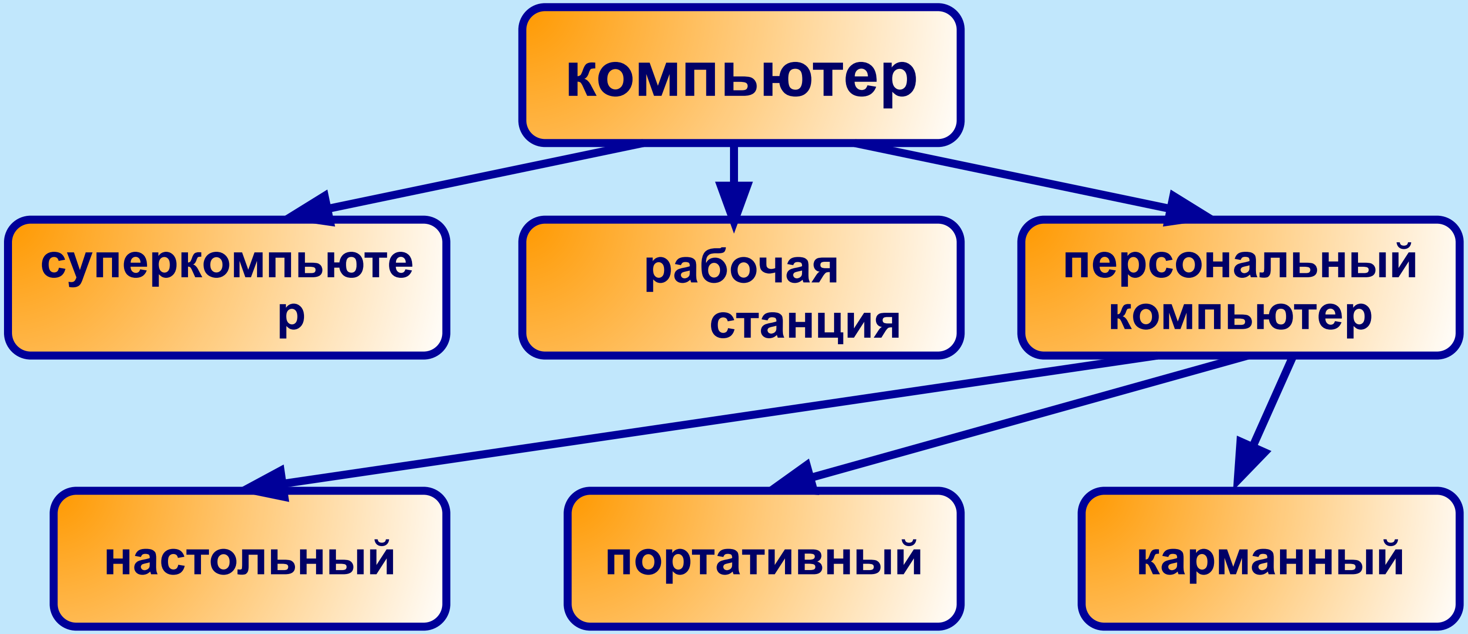
Историческая справка

- Понятие гамильтонова цикла впервые появилось в связи с задачей о кругосветном путешествии, которую рассматривал Уильям Гамильтон: обойти все вершины графа – столицы различных стран – по одному разу и вернуться в исходный пункт
- Для 20 государств задача представляет обход всех вершин додекаэдра
- 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19-20-1



В этой задаче вершины додекаэдра символизировали известные города, такие как Брюссель, Амстердам, Эдинбург, Пекин, Прага, Дели, Франкфурт и др., а рёбра — соединяющие их дороги.

Дерево – граф иерархической структуры. Между любыми двумя его вершинами существует единственный путь. Дерево не содержит циклов и петель.



Классификация компьютеров

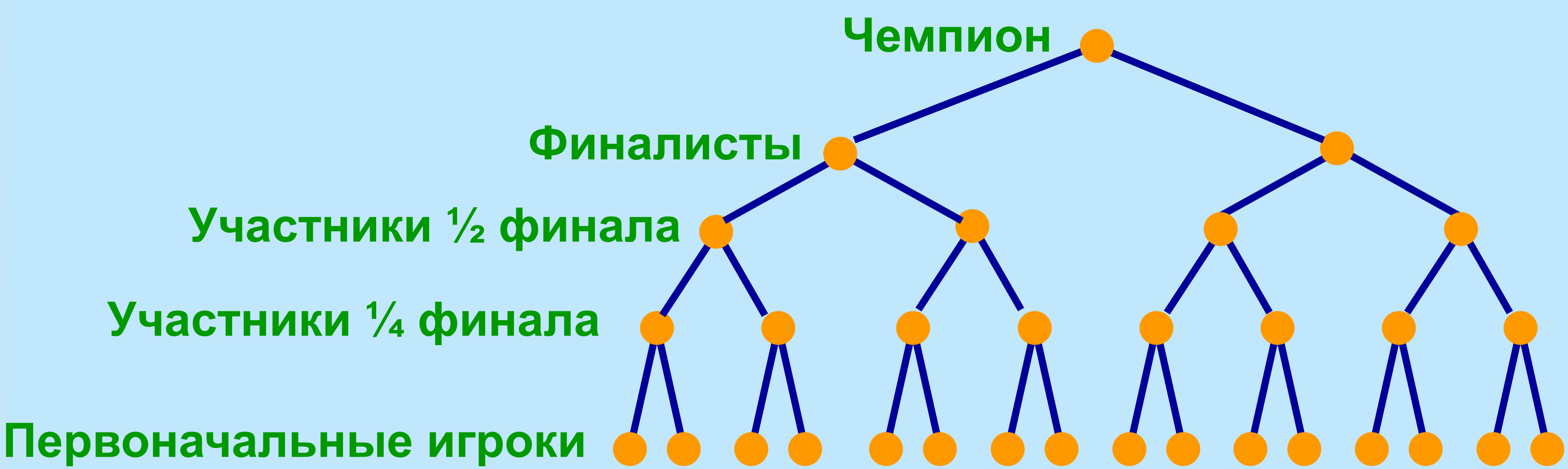
Корень – главная вершина дерева.

Предок – объект верхнего уровня.

Потомок – объект нижнего уровня.

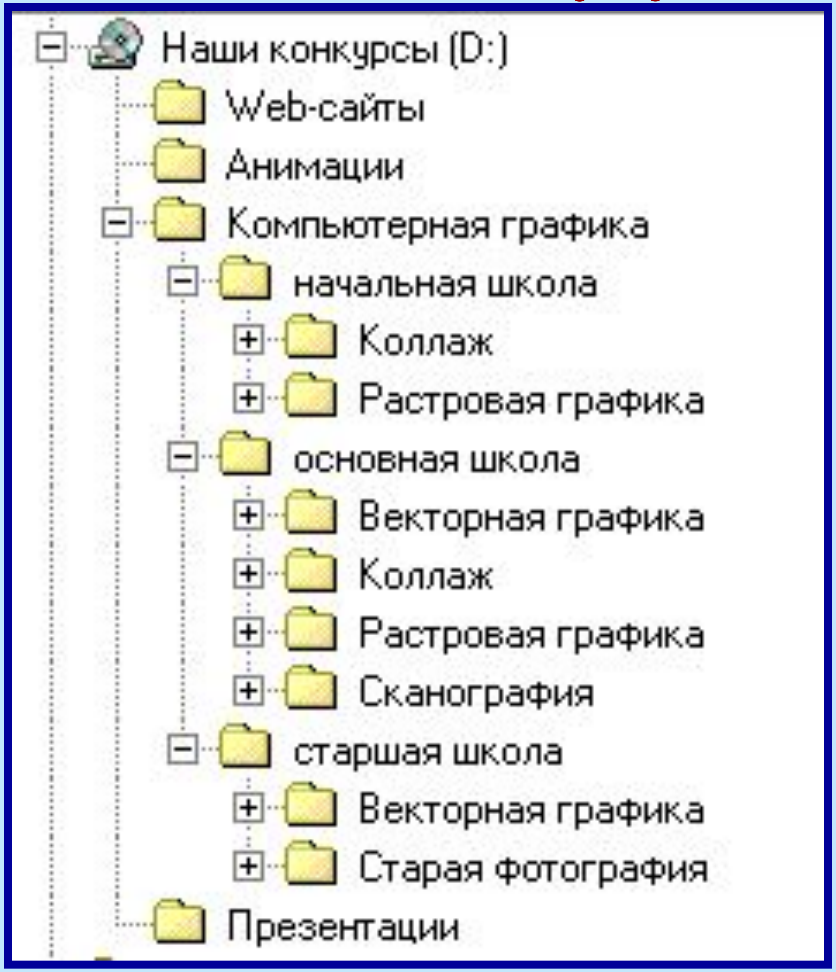
Листья – вершины, не имеющие потомков.

Укажите перечисленные объекты у дерева



Олимпийская система спортивных соревнований

Файловая структура

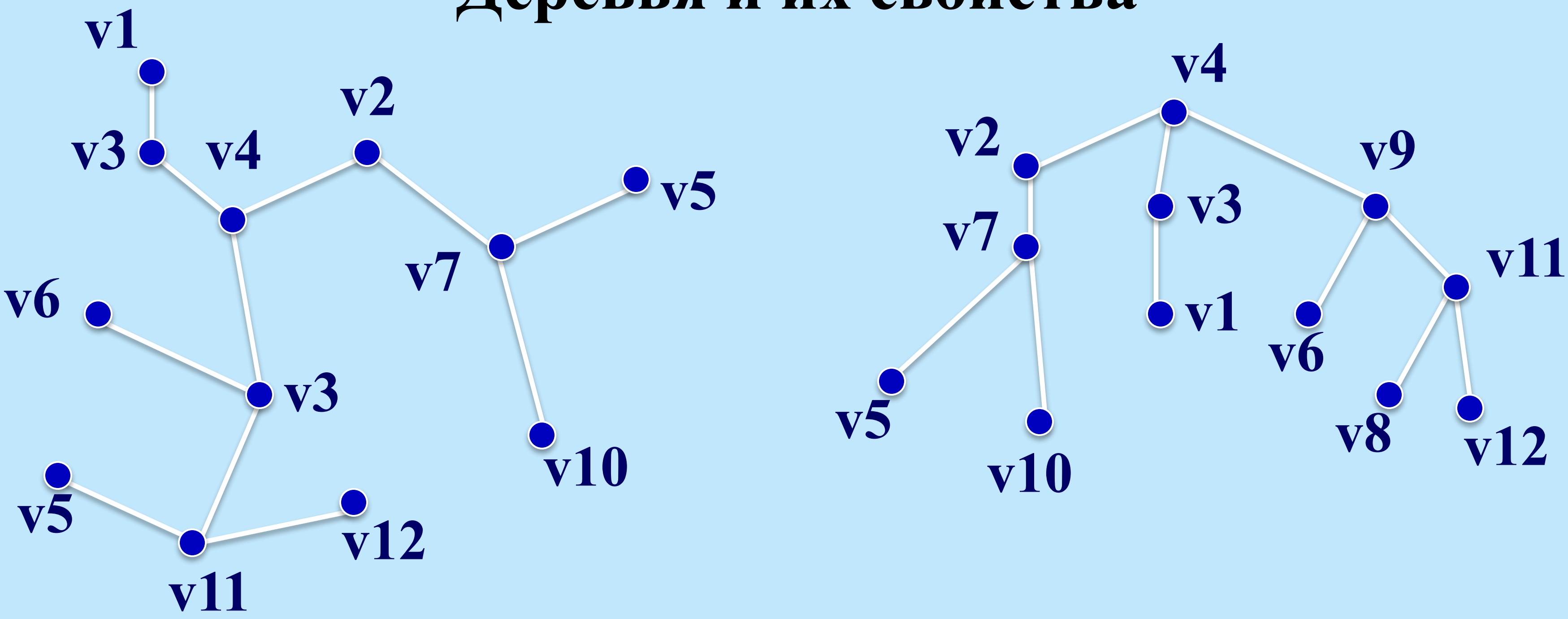


Укажите корневую вершину, объекты 1-го, 2-го и 3-го уровней

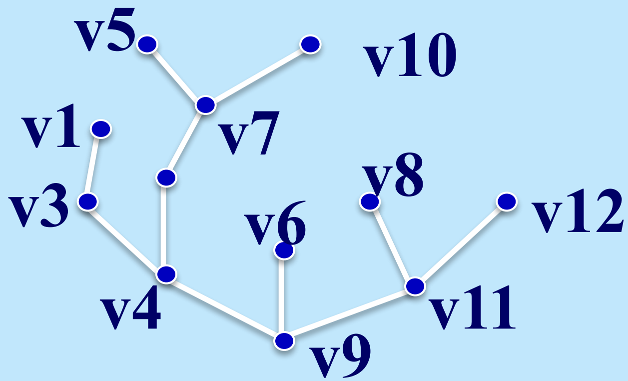
Самое главное

- ***Граф*** - наглядное средство представления состава и структуры системы. Граф состоит из вершин, связанных линиями. Направленная линия называется дугой, ненаправленная – ребром.
- ***Иерархия*** - расположение частей (элементов) целого в порядке от высшего к низшему. Системы, элементы которых находятся в отношениях подчиненности, называются иерархическими системами.
- ***Дерево*** - граф иерархической системы. Между любыми двумя вершинами дерева существует единственный путь.

Деревья и их свойства



Деревья являются простым, но очень важным видом графа. С их помощью описывается структура самых различных объектов: организации и учреждения, книг и документов, математических формул, компьютерных файловых систем, программ…



<u>Листом (висячей вершиной)</u> называют вершину степень которой равна 1, если она не рассматривается как корень. В качестве корня в неориентированном дереве можно принять любую вершину

Основные свойства деревьев:

1. <u>дерево</u> – это связный граф без циклов
2. любая пара вершин в дереве связана единственной цепью
3. <u>дерево</u> – это связный граф, имеющий n-вершин и n-1 ребер

Естественным понятием расширения дерева является лес – несвязный граф, все компоненты которого деревья

Кодирование Пруффера для деревьев с пронумерованными вершинами

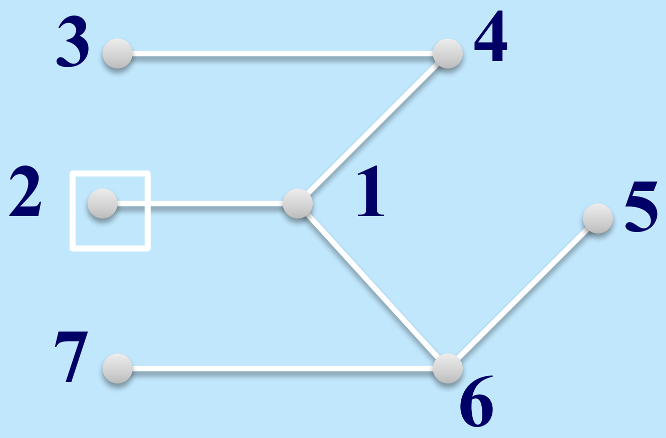
Каждое дерево может быть однозначно записано числовым кодом, содержащим n-2 элемента и называемым кодом Пруффера

Алгоритм получения кода

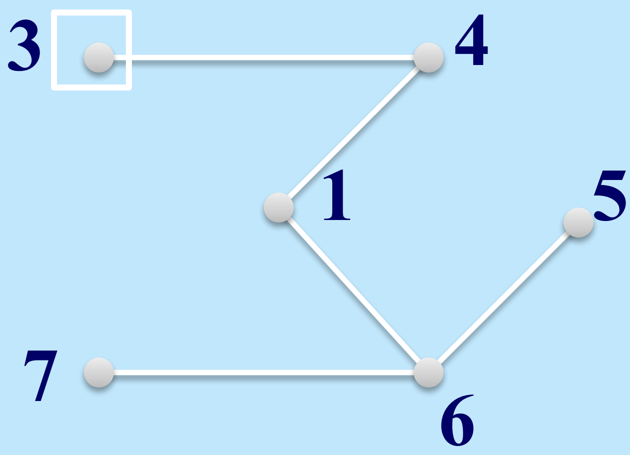
Пусть вершины дерева пронумерованы числами от 1 до n. Отыскиваем вершины степени 1 с наименьшим номером и включаем в ход номер смежный с ней вершиной, после чего удаляем найденную вершину вместе с ребром.

С получившимся подграфом выполняем ту же операцию повторяя её, пока только останется два ребра пример:

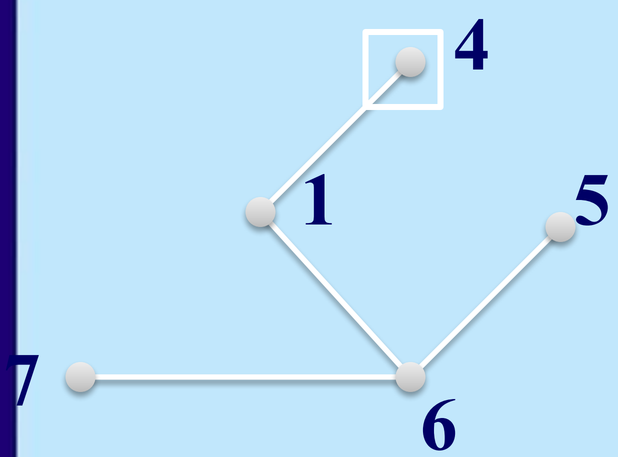
14166



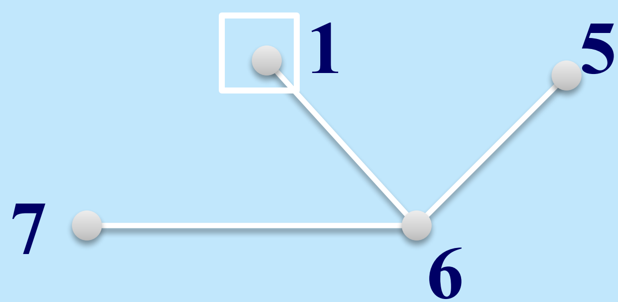
Код - 1



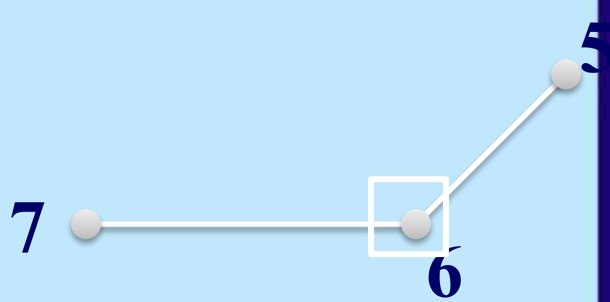
Код - 4



Код - 1



Код - 6



Код - 6

Восстановление дерева по коду

Антикод – упорядоченное по возрастанию последовательность номеров вершин не вошедших в код Пруффера

Для примера 2, 3, 5, 7

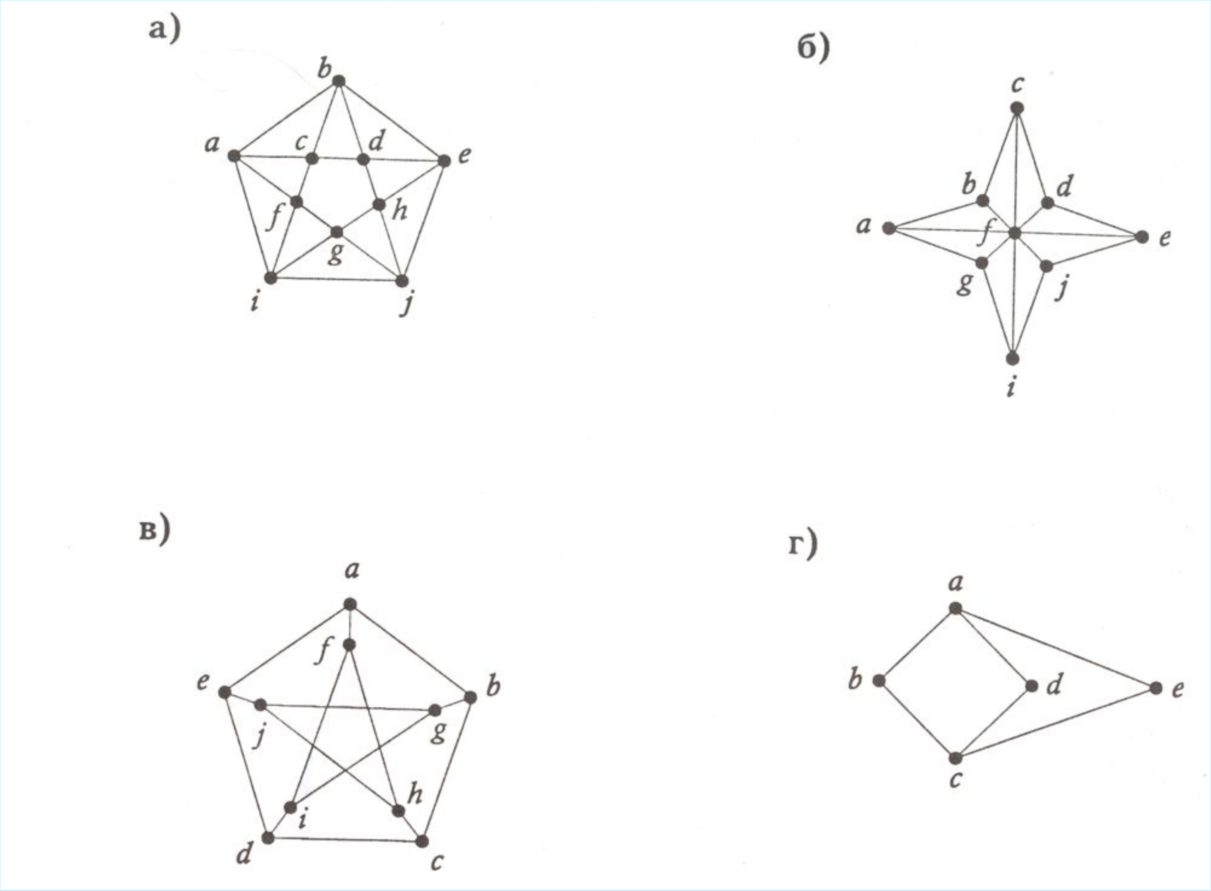
Дерево строится путем добавления ребер. Очередное добавляемое ребро начиная с первого образуется парой вершин номера которых стоят 1 в строке кода и в строке антикода. После этого использованные элементы строк вычеркиваются. Если номер вычеркнутый из строки кода не содержится среди оставшихся в ней элементов его следует добавить в строке антикода не нарушая её упорядоченность. Такие же действия повторяются с остатками строк кода и антикода. Пока они будут вычеркнуты все элементы первой из них

При этом строка антикода будет содержать 2 элемента образующих последнее ребро, которое следует добавить к формируемому дереву

Итерация	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Строка кода	~~1~~ ~~4~~ ~~1~~ ~~6~~ ~~6~~										
Строка антитеза	~~2~~ 3 5 7 ~~3~~ 5 7 ~~4~~ 5 7 ~~1~~ 5 7 ~~5~~ 7 6 7										
Добавляемое ребро	(1;2) (4;3) (1;4) (6;1) (6;5) (6;7)										

Домашнее задание

1. **Определите является ли граф эйлеровым?**



Домашнее задание

2. **Запишите код Пруффера для дерева.**