ЗАКОНЫ ЛОГИКИ. РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Логическая равносильность, законы логики.

Два высказывания ***равносильны***, если они одновременно истинны или одновременно ложны.

Две формулы ***равносильны*** если их эквиваленция является тавтологией (общезначима).

$$F1 \leftrightarrow F2 \equiv 1$$

Логическая равносильность, законы логики.

Равносильность – это отношение между формулами и как отношение обладает свойствами ***рефлексивности, симметричности, транзинтивности***.

Равносильности логики высказываний называют ***законами логики***.

Основные законы логики и основные тавтологии: законы Аристотеля, де Моргана, идемпотентности.

1. Закон двойного отрицания:

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Двойное отрицание исключает отрицание.

2. Переместительный (коммутативный) закон:

- для логического сложения:

$$A \vee B = B \vee A;$$

- для логического умножения:

$$A \wedge B = B \wedge A.$$

Результат операции над высказываниями не зависит от того, в каком порядке берутся эти высказывания.

3. Сочетательный (ассоциативный) закон:

- для логического сложения:

$(A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C)$;

- для логического умножения:

$(A \land B) \land C = A \land (B \land C)$.

При одинаковых знаках скобки можно ставить произвольно или вообще опускать.

4. Распределительный (дистрибутивный) закон:

- для логического сложения:

$$(A \lor B) \land C = (A \land C) \lor (B \land C);$$

- для логического умножения:

$$(A \land B) \lor C = (A \lor C) \land (B \lor C).$$

Определяет правило выноса общего высказывания за скобку.

5. Закон общей инверсии (законы де Моргана):

- для логического сложения:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B};$$

- для логического умножения:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}.$$

6. Закон идемпотентности

(от латинских слов idem – тот же самый и potens – сильный; дословно – равносильный):

- для логического сложения:

$$A \vee A = A;$$

- для логического умножения:

$$A \wedge A = A.$$

Закон означает отсутствие показателей степени.

7. Законы исключения констант:

- для логического сложения:

$$A \vee 1 = 1, \quad A \vee 0 = A;$$

- для логического умножения:

$$A \wedge 1 = A, \quad A \wedge 0 = 0.$$

8. Закон противоречия:

$$A \wedge \overline{A} = 0.$$

Невозможно, чтобы противоречащие высказывания были одновременно истинными.

9. Закон исключения третьего:

$A \vee \overline{A} = 1.$

Из двух противоречащих высказываний об одном и том же предмете одно всегда истинно, а второе – ложно, третьего не дано.

10. Закон поглощения:

- для логического сложения:

$A \vee (A \wedge B) = A;$

- для логического умножения:

$A \wedge (A \vee B) = A.$

11. Закон исключения (склеивания):

- для логического сложения:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge B) = \overline{B};$$

- для логического умножения:

$$(A \vee B) \wedge (A \vee B) = B.$$

12. Закон контрапозиции (правило перевертывания):

$$(A \leftrightarrow B) = (B \leftrightarrow A).$$

Справедливость приведенных законов можно доказать табличным способом: выписать все наборы значений A и B, вычислить на них значения левой и правой частей доказываемого выражения и убедиться, что результирующие столбцы совпадут.

Пример 1 .

Упростить логическое выражение

$$\overline{(A \lor B) \to \overline{(B \lor C)}}$$

Пример 1 .

Упростить логическое выражение

$$\overline{(A \lor B) \to \overline{(B \lor C)}}$$

Это логическое выражение необходимо привести к нормальной форме:

1. $\overline{(A \lor B) \to \overline{(B \lor C)}} = (A \lor B) \land \overline{\overline{(B \lor C)}}$ импликация и отрицание

Пример 1 .

Упростить логическое выражение

$$\overline{(A \vee B) \to \overline{(B \vee C)}}$$

Это логическое выражение необходимо привести к нормальной форме:

$(A \vee B) \wedge \overline{\overline{(B \vee C)}} = (A \vee B) \wedge (B \vee C)$ закон двойного отрицания

Пример 1 .

Упростить логическое выражение

$$\overline{(A \vee B) \rightarrow \overline{(B \vee C)}}$$

Это логическое выражение необходимо привести к нормальной форме:

$$(A \vee B) \wedge (B \vee C) = (A \vee B) \wedge B \vee (A \vee B) \wedge C$$

правило дистрибутивности

Пример 1 .

Упростить логическое выражение

$$\overline{(A \lor B) \to \overline{(B \lor C)}}$$

Это логическое выражение необходимо привести к нормальной форме:

$(A \lor B) \land B \lor (A \lor B) \land C = A \land B \lor B \land B \lor A \land C \lor B \land C$

закон коммутативности и дистрибутивности производим

сокращения $A \land B \lor B \lor A \land C \lor B \land C$

Пример 1 .

Упростить логическое выражение

$$\overline{(A \lor B) \to \overline{(B \lor C)}}$$

Это логическое выражение необходимо привести к нормальной форме:

$A \land B \lor B \lor A \land C \lor B \land C = B \land (A \lor 1) \lor A \land C \lor B \land C$

вынесение за скобки

$B \land (A \lor 1) \lor A \land C \lor B \land C = B \lor A \land C \lor B \land C$ упрощаем

Пример 1 .

Упростить логическое выражение

$$\overline{(A \vee B) \to \overline{(B \vee C)}}$$

Это логическое выражение необходимо привести к нормальной форме:

$B \vee A \wedge C \vee B \wedge C = B \wedge (1 \vee C) \vee A \wedge C$ группируем и выносим

за скобки

$B \wedge (1 \vee C) \vee A \wedge C = B \vee A \wedge C$ упрощаем

Ответ: $F = B \vee A \wedge C$

Закрепление изученного

Упростить выражение:

1. $F = \overline{A \wedge B} \vee \overline{B \vee C}$

2. $F = A \wedge C \vee \overline{A} \wedge C$

$F = A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \mathbin{\overline{\vee}} A \vee B \vee C$