Исследование модели многогранника с сечениями

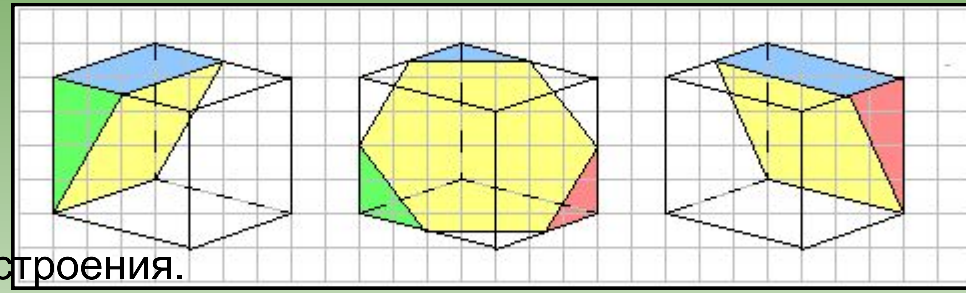
на примере куба

проектная работа по геометрии

учитель математики Меркулова Т.И.

ГОУ СОШ № 2088 Москва

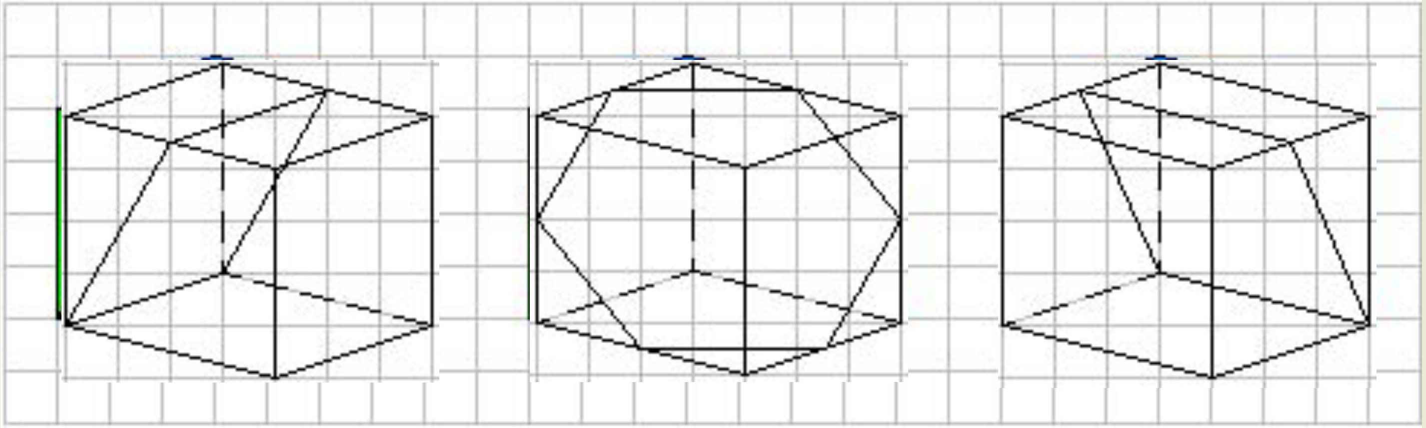
ПРОЕКТНАЯ РАБОТА ПО СТЕРЕОМЕТРИИ
Вариант 22

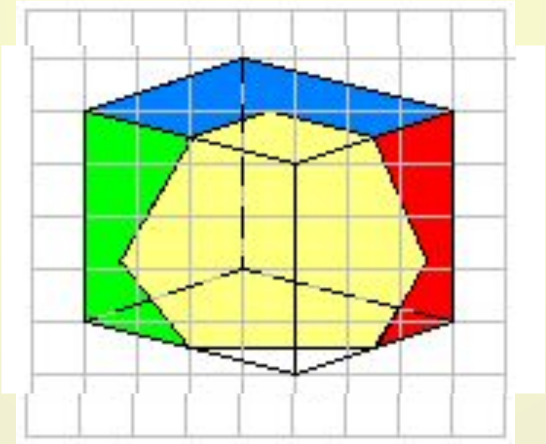


1.Совместите три вида. Опишите этапы построения.
2.На полученной модели найдите суммарную площадь сечения, приняв сторону куба за **а**.
3.Найдите площадь поверхности всей модели.
4.Выполните развертку полученной детали при **а** = 6 см ***и развертку удаленной части*.**
5.Предложите два своих варианта сечений куба тремя различными плоскостями.
6.Рассчитайте углы между плоскостями сечений:
 a.Используя построение плоскости, перпендикулярной линии пересечения плоскостей сечений
 b.Используя теорему косинусов для трехгранного угла.
7.Поместив модель в систему координат, составьте уравнение плоскости для каждого из сечений.
8.Составьте уравнения прямых, получившихся в результате пересечения данных плоскостей.
***9.Докажите, что все три прямые пересекаются в одной точке*.**
0.Рассчитайте углы между плоскостями сечений:
 1.Используя метод координат
2.Сопоставьте результаты расчетов в п.п. 5а,б и 9а. Сделайте выводы.
a.Вычислите объемы исходных геометрических тел, приняв сторону куба за **а**.
b.«Разбив» построенную модель на простейшие геометрические тела найдите объем данной модели.
1.«Разбив» построенную модель на пирамиды, найдите объем модели, используя «Метод координат».
2.Сделайте вывод о преимуществах и недостатках применении методов п.п. 12 и 14 для данной модели.

Содержание

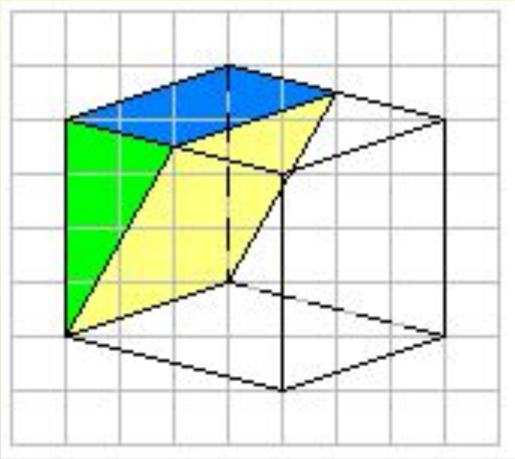
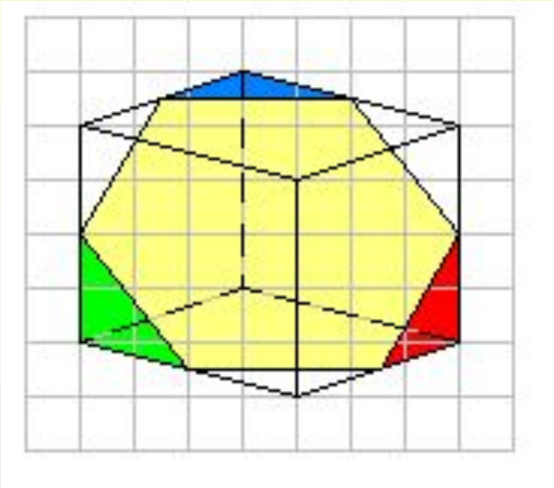
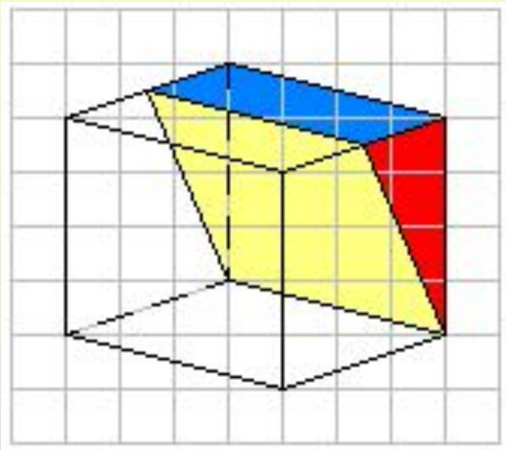
Построение изображения



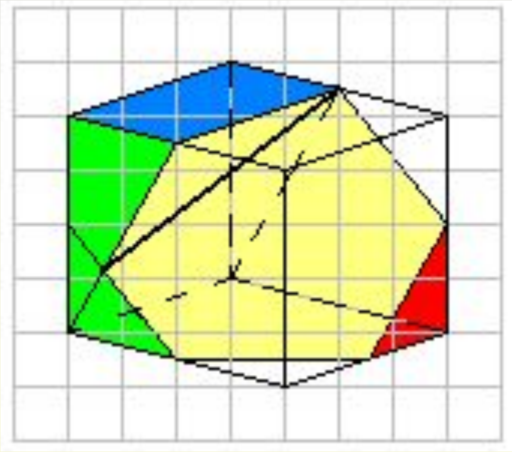
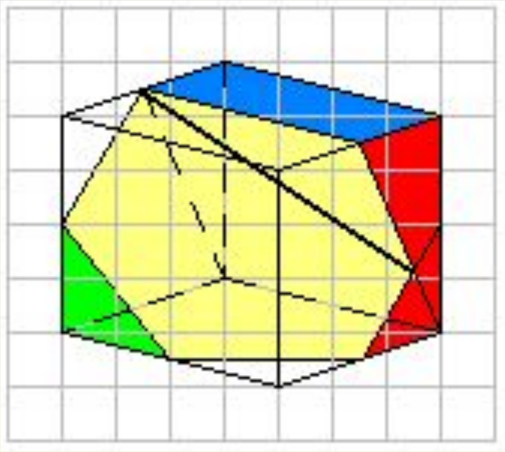
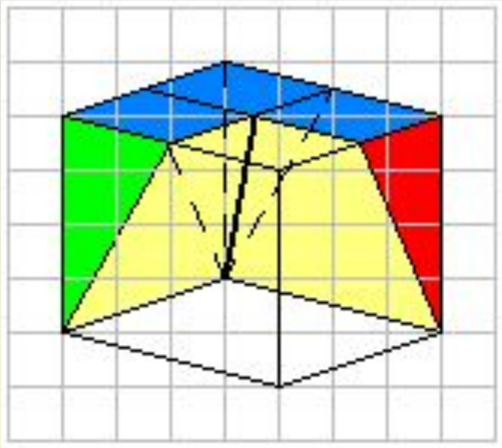


Построение изображения

Построение изображения

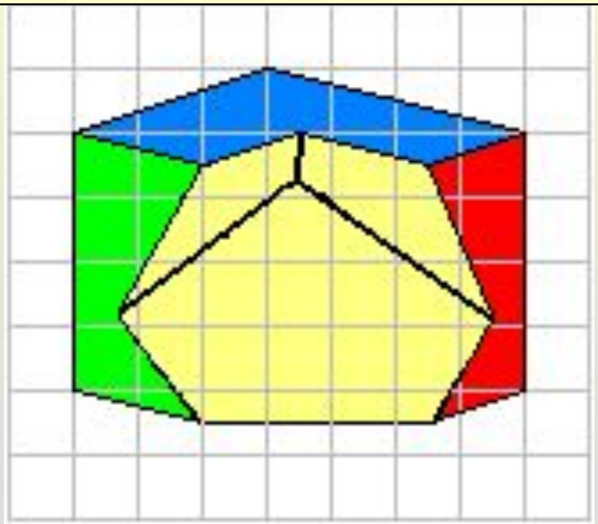
Построение линий пересечения плоскостей

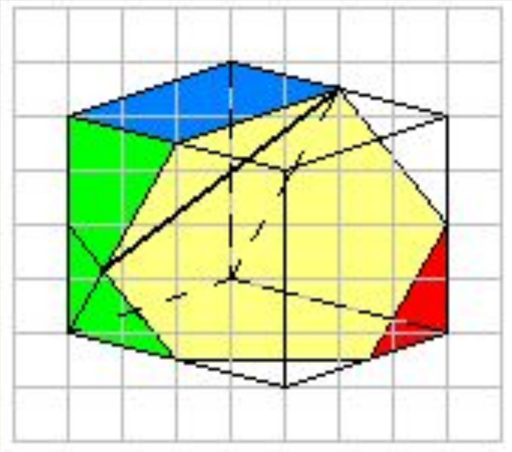




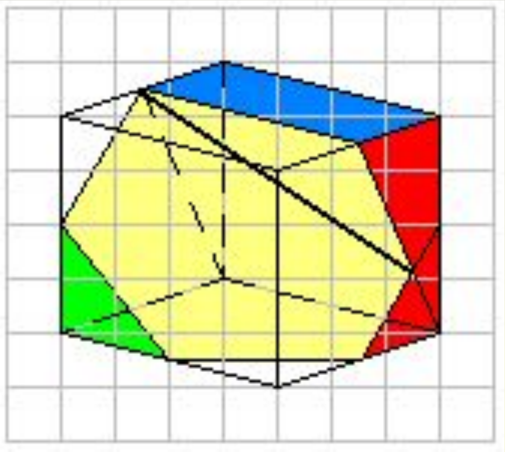
Пересечение плоскостей попарно

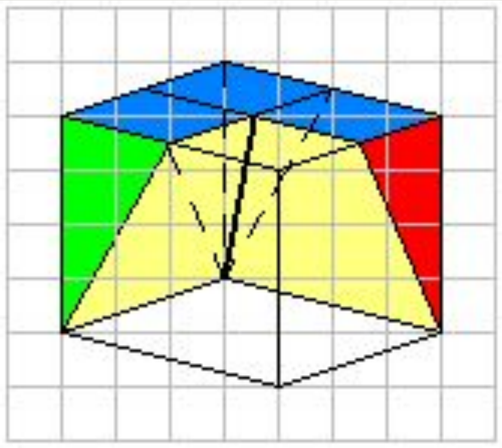
Построение изображения

Совмещение всех изображений



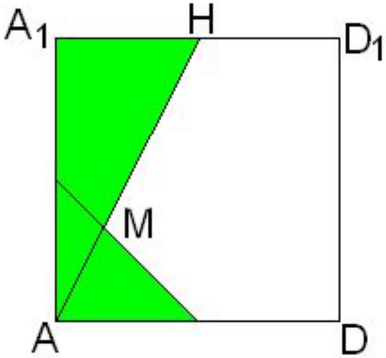


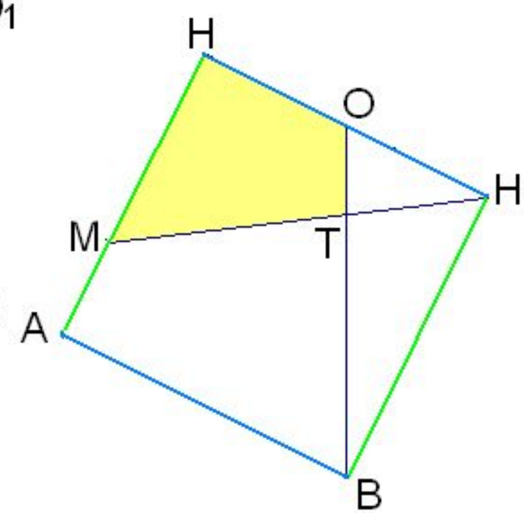


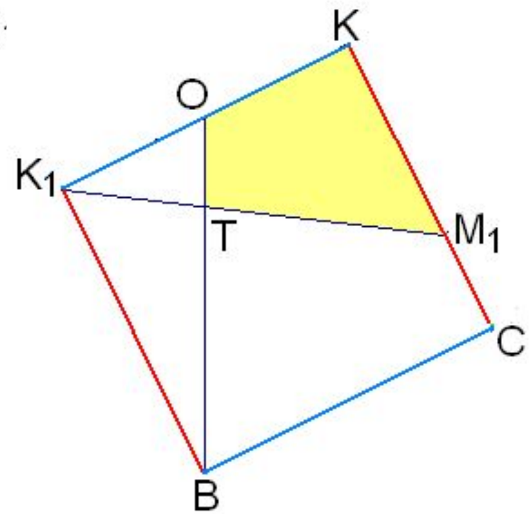


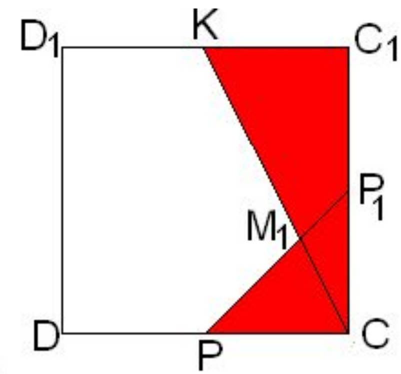
Пересечение плоскостей попарно

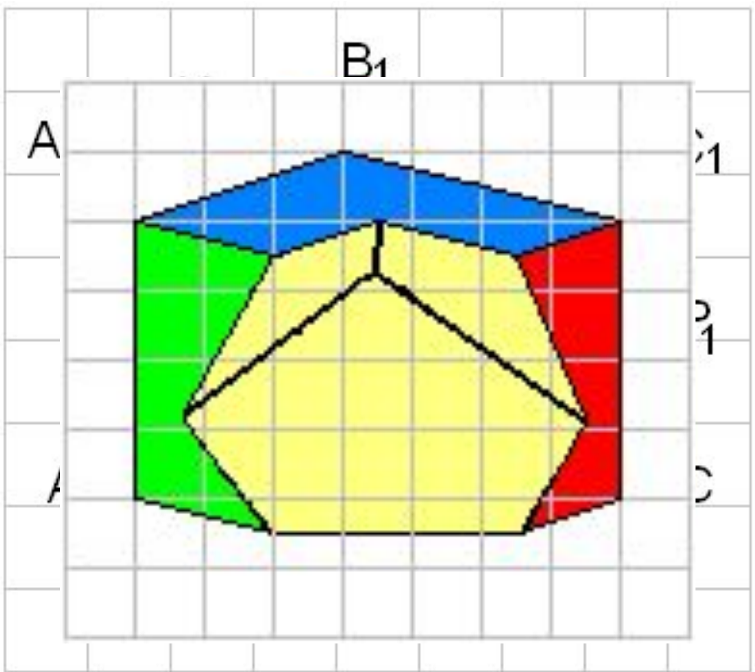
Построение сечений

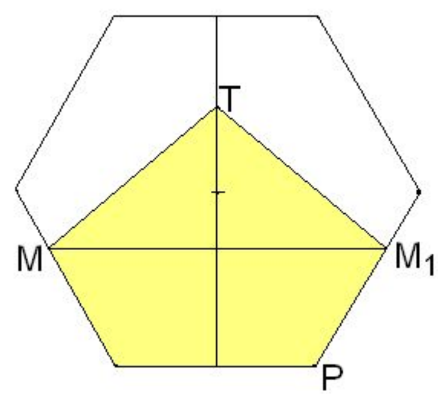




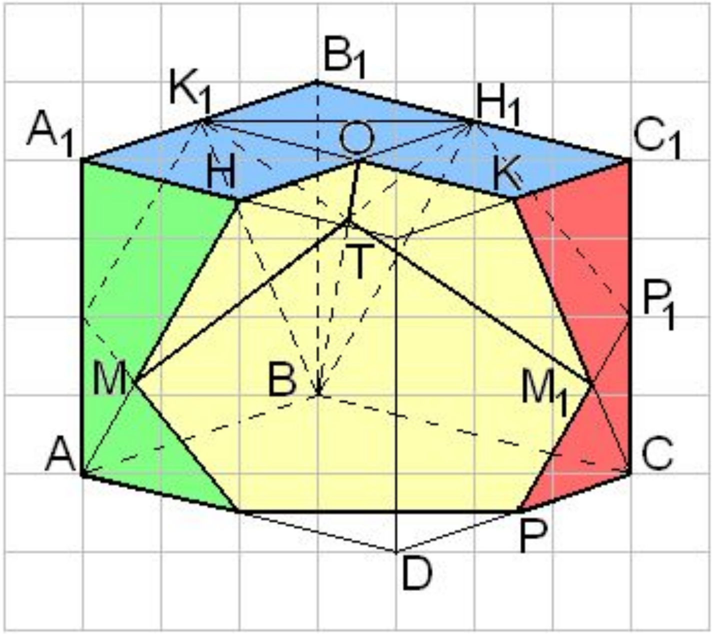


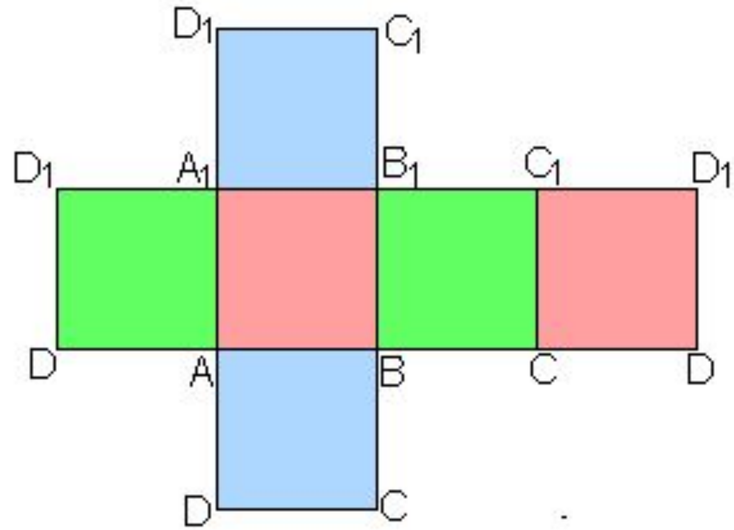


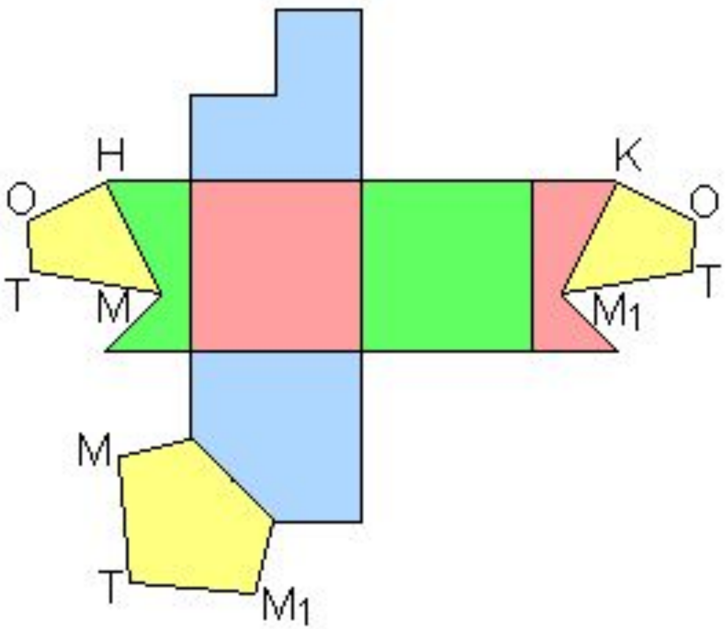


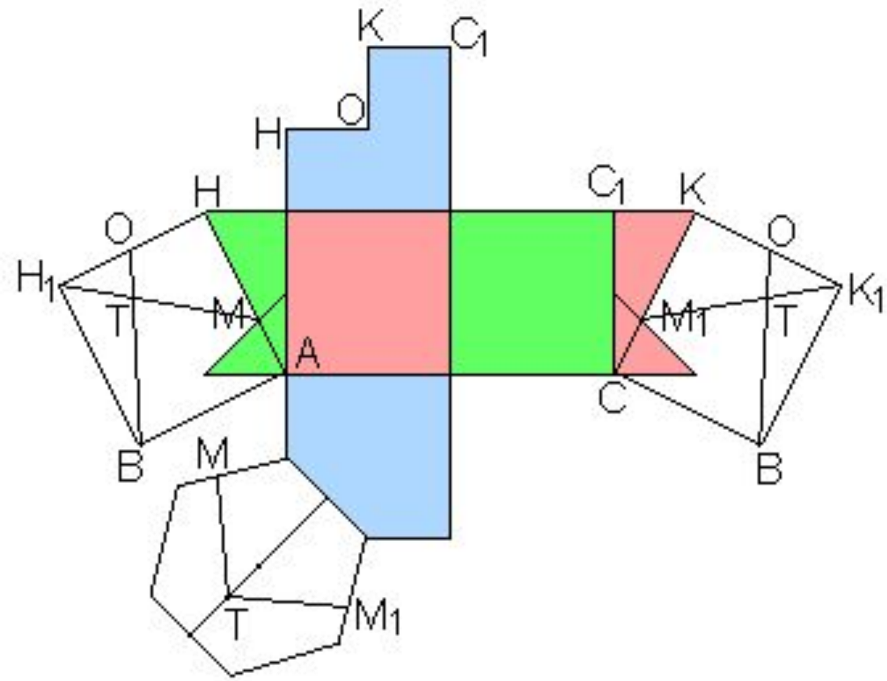


Построение развертки

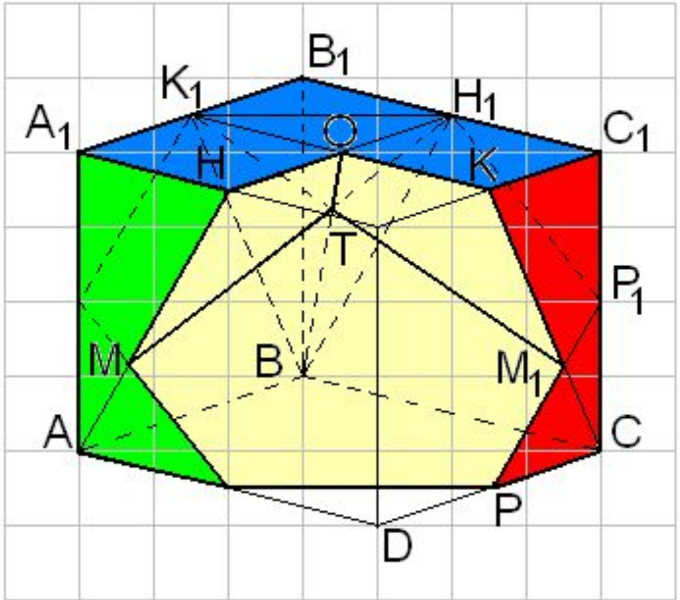


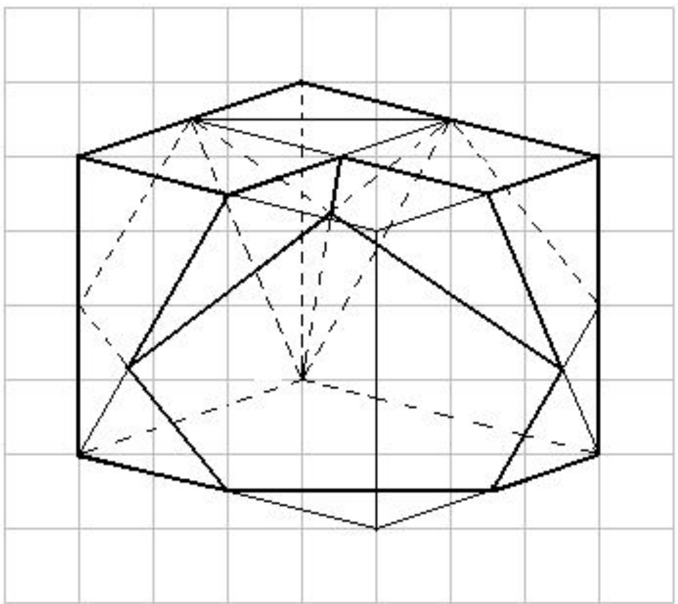


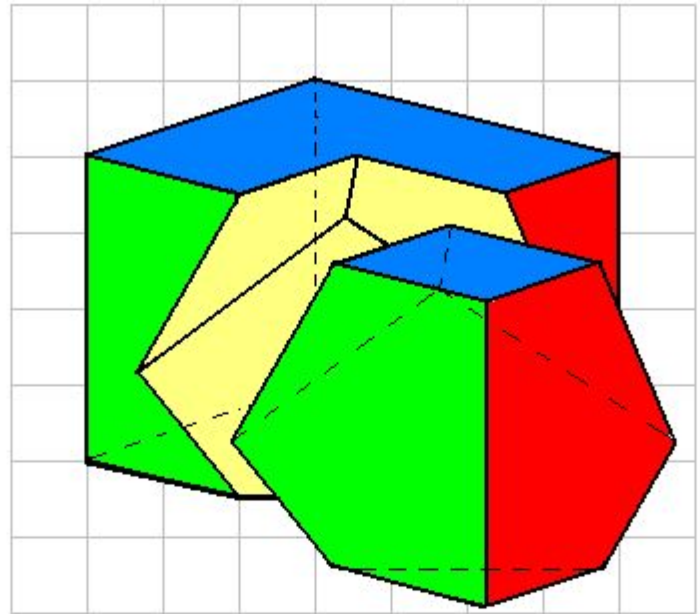


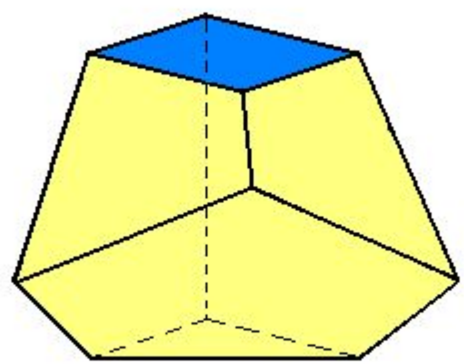


Построение изображения удаленной части

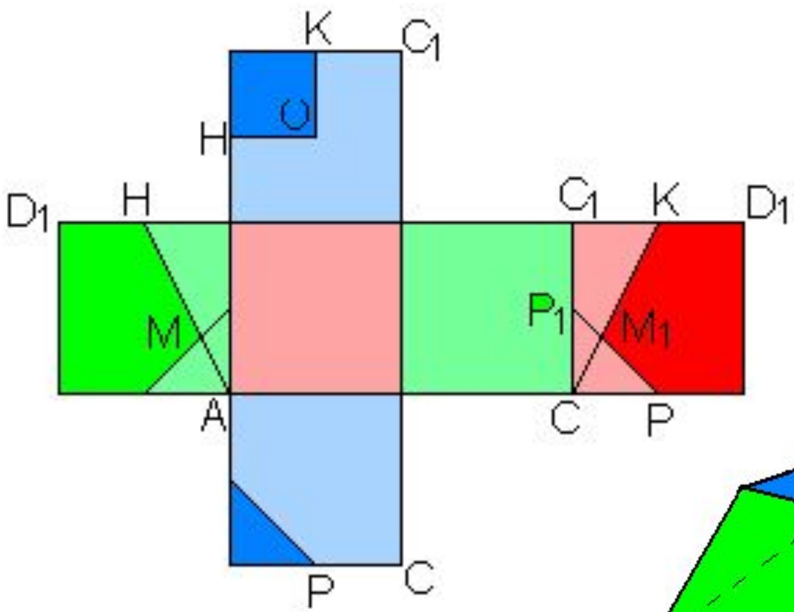


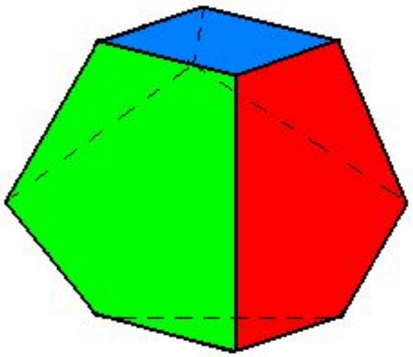


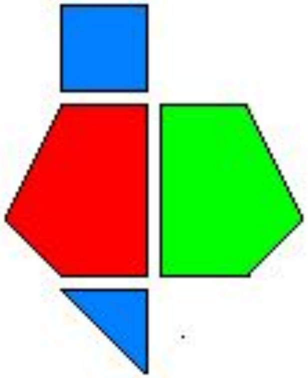


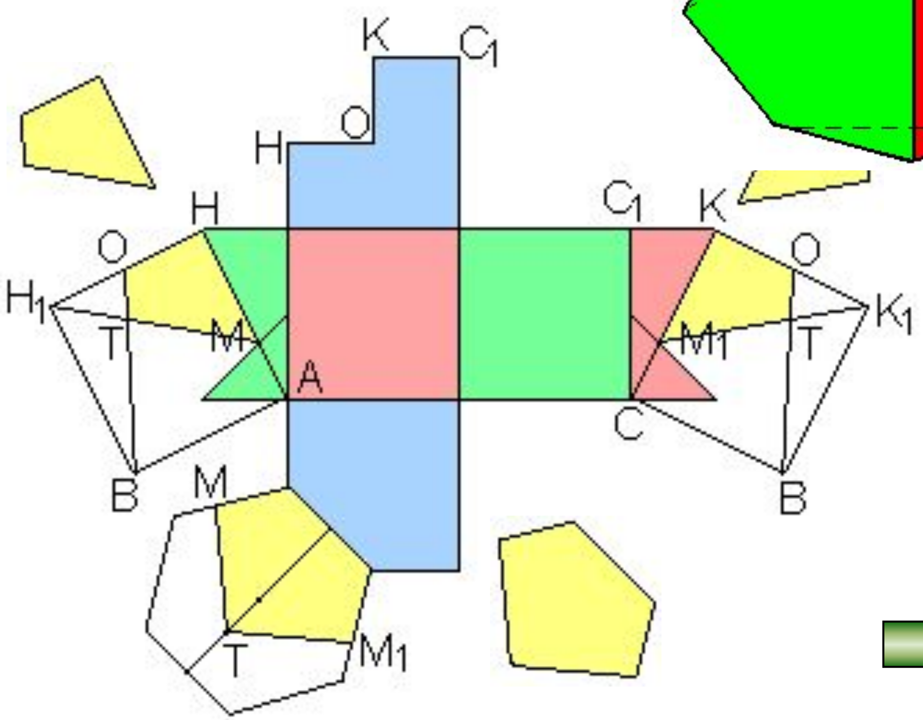


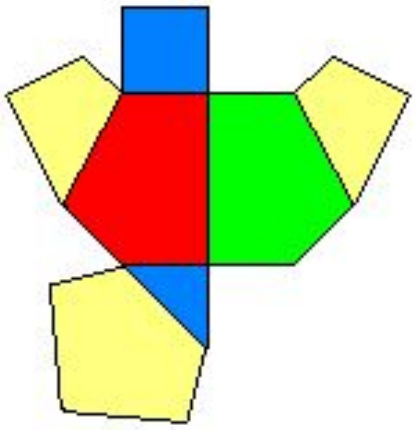
Построение развертки удаленной части



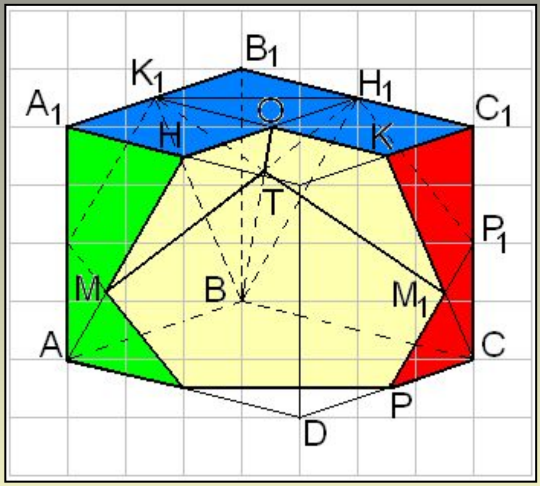


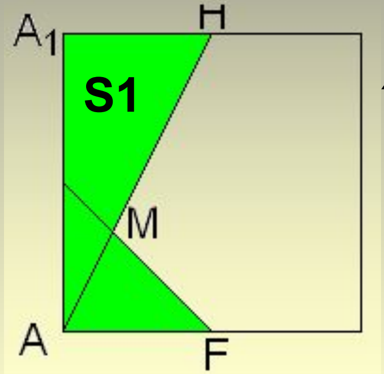






Площадь поверхности





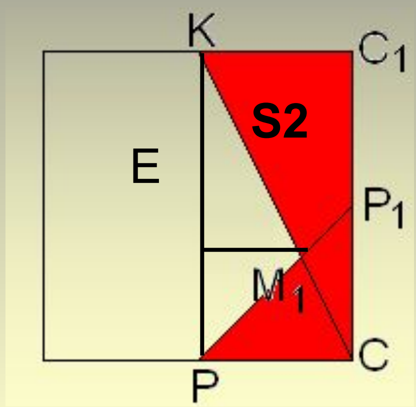
$S1 = S2$

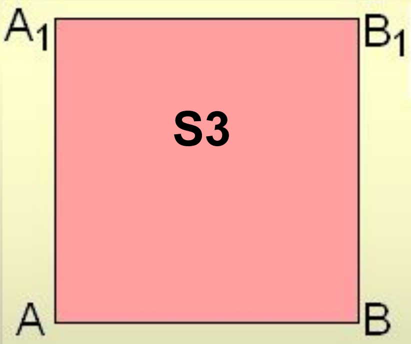
$\triangle KPM1 \sim \triangle M1P1C$

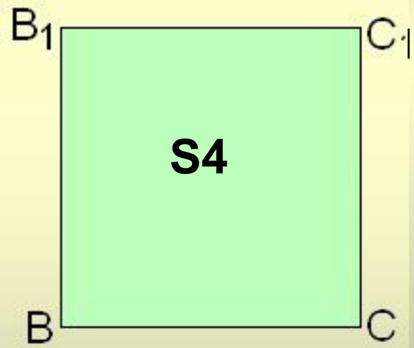
$KP = 2CP1$

$EM1 = 2/3PC$

$S2 = 1/2a^2 - S_{KPM1}$





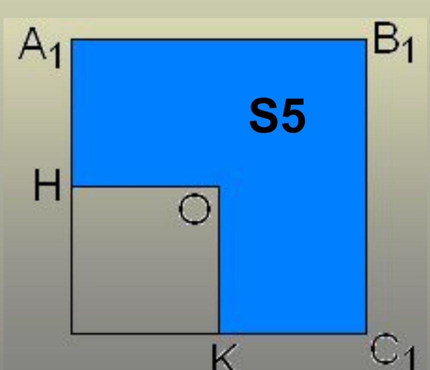


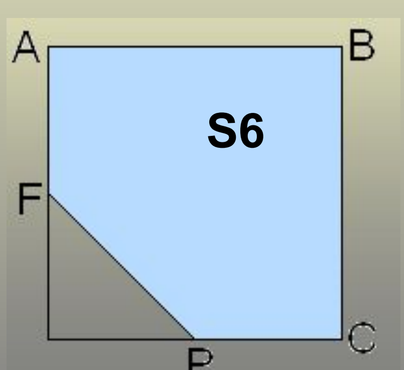
$S1 = S2 = 1/2a^2 - 1/2 \cdot a \cdot 2/3a = 1/6a^2$

$S3 = S4 = a^2$

$S5 = a^2 - 1/4a^2 = 3/4a^2$

$S6 = a^2 - 1/2 \cdot 1/2a \cdot 1/2a = 7/8a^2$

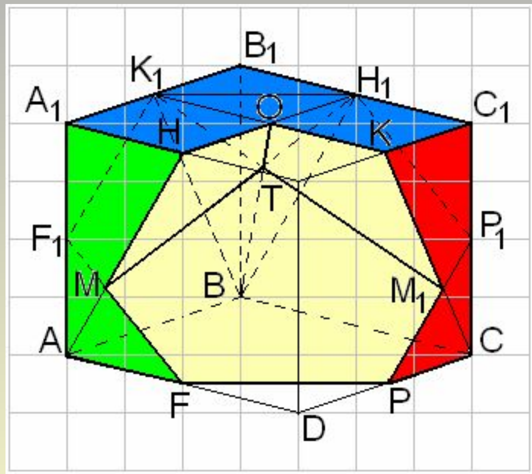




$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6 =$$

$$1/6a^2+1/6a^2+a^2+a^2+3/4a^2+7/8a^2$$

$$S_{\Sigma} = 3\tfrac{23}{24} \cdot a^2$$



Площади сечений

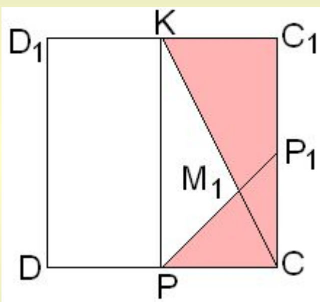
$D_1K = KC_1$; $DP = PC$ => $(KP) \parallel (C_1C)$ =>

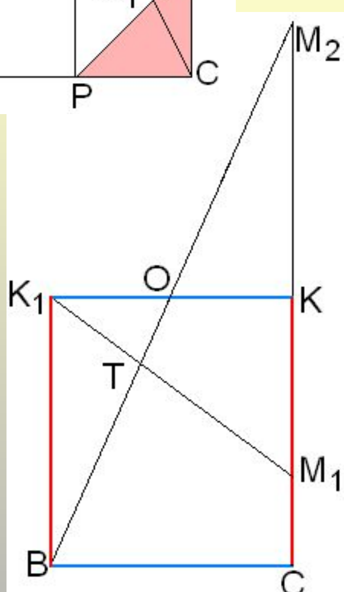
$\Delta KM_1H \sim \Delta M_1P_1C$

$KP = 2P_1C$ => $KM_1 = 2M_1C = 2/3KC$

$KC^2 = KP^2 + PC^2$ => $KC = (a^2 + (a/2)^2)^{1/2} = a\sqrt{5}/2$

$KC = a\sqrt{5}/2$ $KM_1 = a\sqrt{5}/3$





Рассмотрим сечение плоскостью ВКС.

$[BO) \cap [CK) = M_2$

$BK_1 \parallel CK$; $K_1O = OK$; $\angle K_1OB = \angle M_2OK$ =>

$\Delta K_1OB = \Delta M_2OK$ => $M_2K = K_1B$

$K_1M_1 \cap BO = T$; $\Delta K_1TB \sim \Delta TM_2M_1$;

$K_1B/M_1M_2 = KC/(KC + 2/3KC) = 3/5$ =>

$|T; (K_1B)| = 3/8BC$ и $|T; (CK)| = 5/8BC = 5/8a$

$S_{TOKM1} = S_{\Delta TM2M1} - S_{\Delta OM2K}$

M_2M_1 $= 5/3KC =$ **$5a\sqrt{5}/6$;**

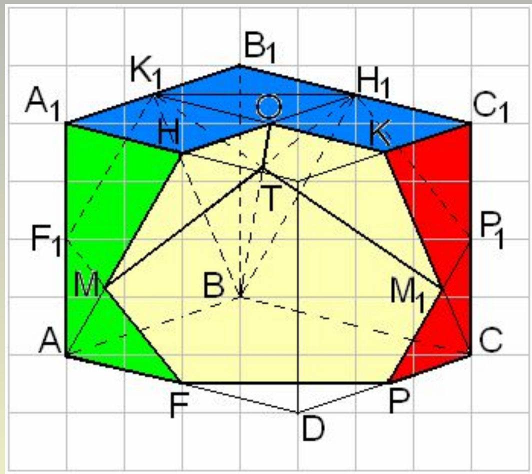
$S_{\Delta TM2M1} = 1/2M_2M_1 \cdot |T; (CK)| = 1/2 \cdot 5a\sqrt{5}/6 \cdot 5/8a = 25a^2\sqrt{5}/96$

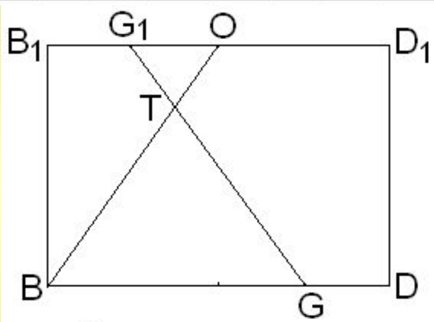
$S_{\Delta OM2K} = 1/2 \cdot OK \cdot KM_2 = 1/2 \cdot 1/2a \cdot a\sqrt{5}/2 = a^2\sqrt{5}/8$

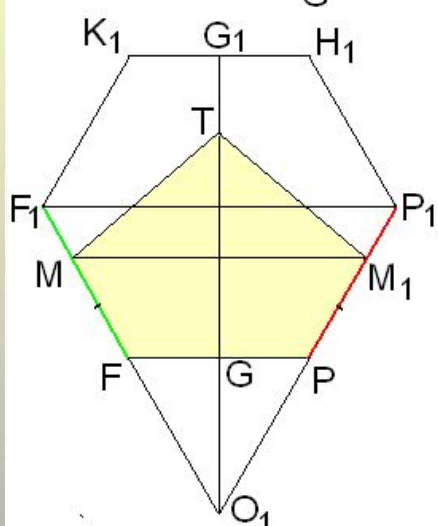
$S_{TOKM1} = 25a^2\sqrt{5}/96 - a^2\sqrt{5}/8 = 13a^2\sqrt{5}/96$

$S_{MHOT} = S_{TOKM1} = 13a^2\sqrt{5}/96$

1. На полученной модели найдите суммарную площадь сечений, приняв сторону куба за а.







Рассмотрим сечение куба плоскостью (FPP_1)

$BD^2 = BA^2 + AD^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{2}$

FP - средняя линия ΔADC; $AD \cap FP = G \Rightarrow BG = 3/4BD = 3a\sqrt{2}/4$;

$B_1G_1 = 1/4BD = a\sqrt{2}/4$;

$\Delta G_1OT \sim \Delta BTG$; $G_1O = BG/3$; $TG = 3TG_1 = 3/4G_1G$

$GG_1 = (DD_1{}^2+(D_1B_1/2)^2)^{1/2} = a\sqrt{6}/2$

$[F_1F) \cap [P_1P) = O_1$

$\Delta F_1P_1O_1 \sim \Delta MM_1O_1$; $M_1P_1=1/2M_1P=1/3P_1P$

$O_1P = PP_1 \Rightarrow MM_1:F_1P_1 = O_1M_1: O_1P_1=5:6$

$MM_1= 5/6F_1P_1 = 5/6BD = 5a\sqrt{2}/6$

$O_1T = 3/4GG_1 + O_1G = (3/4 + 1/2)GG_1 = 5/4\cdot a\sqrt{6}/2 = 5a\sqrt{6}/8$

$S_{MTM1PF} = S_{MTM1} + S_{MM1PF} = 1/2N_1T\cdot MM_1 + 1/2\cdot(MM_1+ FP)\cdot N_1G =$

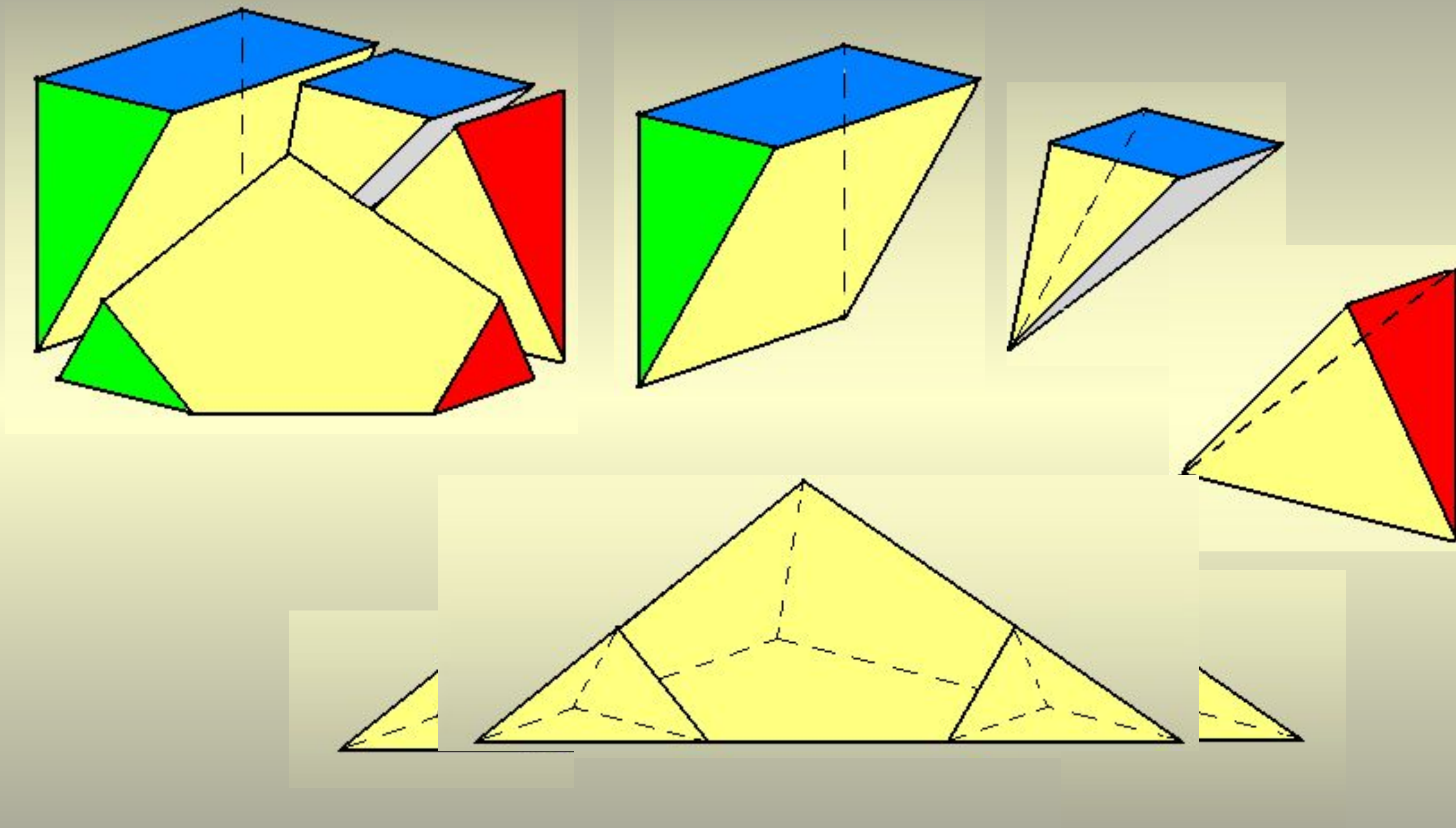
$= 1/2\cdot(1/4+1/6)\cdot G_1G\cdot MM_1 + 1/2\cdot(MM_1+ FP)\cdot 1/3\cdot G_1G =$

$= 1/2\cdot 5/12\cdot a\sqrt{6}/2\cdot 5a\sqrt{2}/6+1/2\cdot(5a\sqrt{2}/6+ a\sqrt{2}/2)\cdot 1/3\cdot a\sqrt{6}/2$

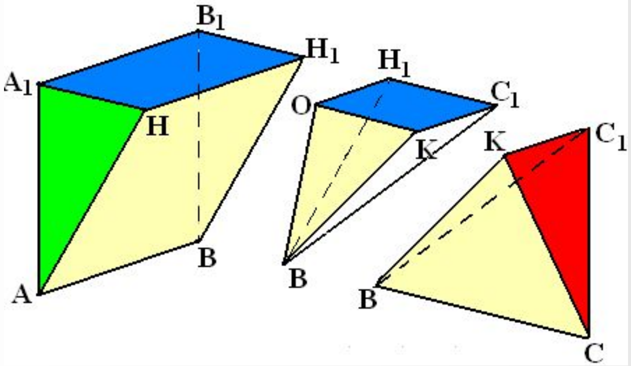
$\mathbf{S_{MTM1PF} =47a2\sqrt{3}/144}$

Вычисление объема

Разбиение на многогранники



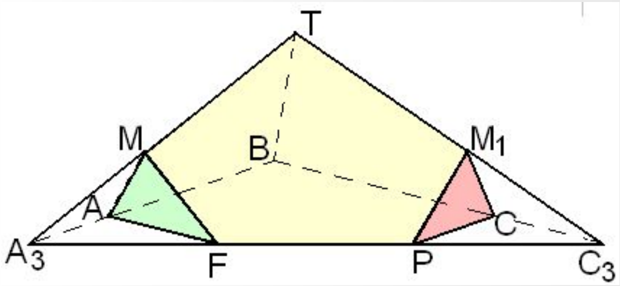
Вычисление объема

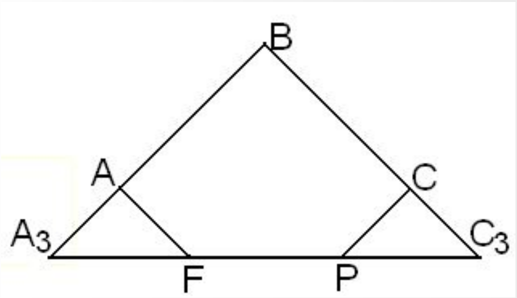


$$V_1 = S_{AA1H} \cdot AB = 1/2 \cdot a \cdot a/2 \cdot a = a^3/4$$

$$V_2 = 1/3 \cdot S_{OH1C1K} \cdot B_1B = 1/3 \cdot a/2 \cdot a/2 \cdot a = a^3/12$$

$$BC \perp (KCC_1) \Rightarrow V3 = 1/3 \cdot S_{KC1C} \cdot BC = = 1/3 \cdot 1/2 \cdot a \cdot a/2 \cdot a = a^3/12$$





$$S_{A3BC3} = 1/2 \cdot BA_3 \cdot BC_3 = 1/2 \cdot 3a/2 \cdot 3a/2 = 9a^2/8$$

$$H_{A3BC3} = |T; (ABC)| = 3a/4$$

$$S_{A3AF} = S_{PCC3} = 1/2 \cdot AA_3 \cdot AF = 1/2 \cdot a/2 \cdot a/2 = a^2/8$$

$$H_{A3AF} = |M; (ABC)| = a/3$$

$$V_{A3BC3} = 1/3 \cdot S_{A3BC3} \cdot H_{A3BC3} = 1/3 \cdot 9a^2/8 \cdot 3a/4 = 9a^3/32$$

$$V_{A3AF} = 1/3 \cdot S_{A3AF} \cdot H_{A3AF} = 1/3 \cdot a^2/8 \cdot a/3 = a^3/72$$

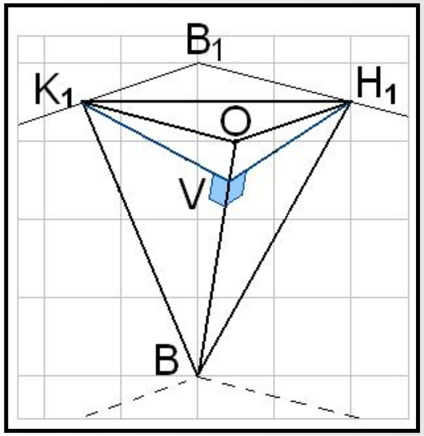
$$V_4 = V_{A3BC3} - 2 \cdot V_{A3AF} = 9a^3/32 - 2 \cdot a^3/72 = 73a^3/288$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = a^3/4 + a^3/12 + a^3/12 + 73a^3/288$$

$$\mathbf{V = 193a^3/288}$$

Вычисление углов между плоскостями

Сечения 1-3 **«Построение плоскости, перпендикулярной общему ребру»**



$K_1B = H_1B$; $K_1O = H_1O$; OB – общая => $\Delta K_1OB = \Delta H_1OB$;

$K_1V \perp OB \Rightarrow H_1V \perp OB \Rightarrow (K_1VH_1) \perp OB \Rightarrow \angle K_1VH_1 = \beta$;

$\cos\beta = (K_1V^2 + H_1V^2 - K_1H_1^{\,2})/(2\cdot K_1V\cdot H_1V)$ $\quad K_1V=H_1V$

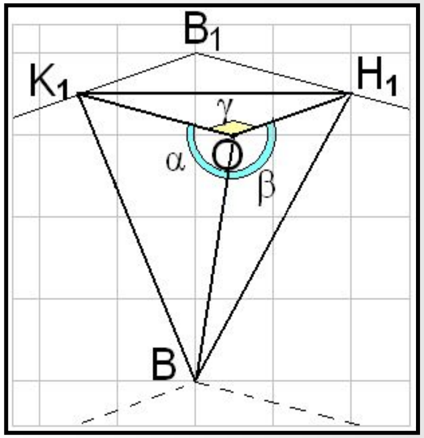
$K_1O \perp (B_1BA) \Rightarrow K_1O \perp K_1B \Rightarrow$

$K_1V = K_1O\cdot K_1B/OB = a/2\cdot a\sqrt{5}/2/((a/2)^2+(a\sqrt{5}/2)^2)^{1/2} = a\sqrt{30}/12$

$\cos\beta = (2K_1V^2 - K_1H_1^{\,2})/(2\cdot K_1V^2) = -1/5$

Угол между плоскостями лежит в диапазоне [0º; 90º] =>

$\cos\beta = 1/5$



«Трехгранный угол»

$\angle K_1OB = \alpha$; $\angle H_1OB = \beta$; $\angle K_1OH_1 = \gamma = 90º$;

δ – угол при ребре OB

$\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\delta$

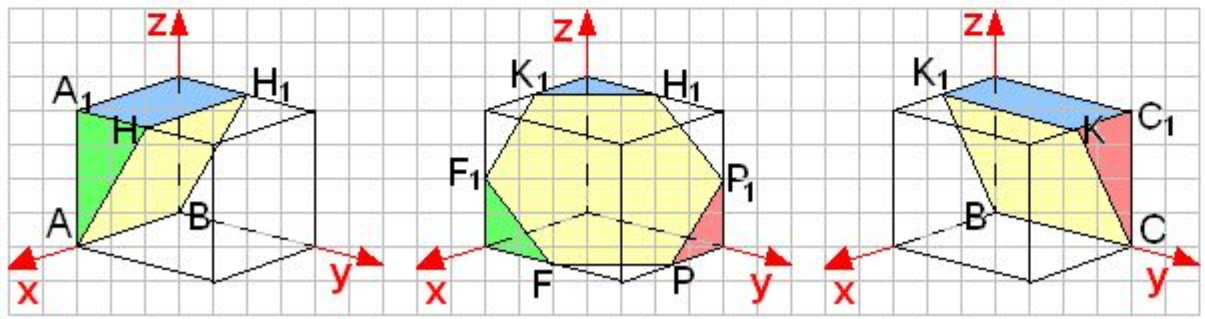
$K_1B = H_1B$; $K_1O = H_1O$; OB – общая =>

$\Delta K_1OB = \Delta H_1OB \Rightarrow \alpha = \beta$; $\quad \cos\gamma = 0 \Rightarrow$

$\cos\delta = -\mathrm{ctg}^2\alpha = -(K_1O/K_1B)^2 = -(1/\sqrt{5})^2 = -1/5 \Rightarrow$

$\cos\delta = 1/5$

«Метод координат»



Составьте уравнение плоскости для каждого сечения

Сечение 1: A(k; 0; 0); B(0; 0; 0); H(k; k/2; k)

Ax + By + Cz + D = 0 (*): B: A·0 + B·0 + C·0 + D = 0 (1) => D = 0 =>(3)

A: Ak +B·0 + C·0 + D = 0 (2) => A = 0 =>(3)

H: Ak +Bk/2 + Ck + D = 0 (3) => C = – B/2 => (*)

By – B/2·z = 0 =>

2y – z = 0 => n_1 (0; 2; -1)

Сечение 2: F(k; k/2; 0); P(k/2; k; 0); H_1(0; k/2; k)

F: A·k + B·k/2 + C·0 + D = 0 (4)

P: A·k/2 + B·k + C·0 + D = 0 (5)

H_1: A·0 + B·k/2 + C·k + D = 0 (6)

(4) – (5): A·k/2 – B·k/2 = 0 => A=B => (4) => 3B·k/2 = –D => B = –2D/(3k) =>(6; *) => –D/3 + C·k + D = 0 => C = –2D/(3k) => (*) =>

–2D/(3k)·x –2D/(3k)·y –2D/(3k)·z + D = 0 =>

2x + 2y + 2z – 3 = 0 => n_2 (2; 2; 2)

«Метод координат»

Вычислите углы между плоскостями

$\vec{n}_1$ (0; 2; -1); $\vec{n}_2$ (2; 2; 2); $\vec{n}_3$ (2; 0; -1)

$|\vec{n}_1| = |\vec{n}_3| = \sqrt{(0^2 + 2^2 + 1^2)} = \sqrt{5}$ $|\vec{n}_2| = \sqrt{(2^2 + 2^2 + 2^2)} = 2\sqrt{3}$

α – угол между плоскостями 1-2; β – угол между плоскостями 1-3

γ – угол между плоскостями 2-3

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{0\cdot2 + 2\cdot2 - 1\cdot2}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}} = 1/\sqrt{15} = \text{Cos}\,\gamma$$

$$\text{Cos}\,\beta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_3|} = \frac{0\cdot2 + 2\cdot0 - 1\cdot(-1)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = 1/5$$

α = γ = arccos(1/√15) β = arccos(1/5)

«Метод координат»

Составьте уравнения прямых, получившихся в результате пересечения плоскостей

Прямая MH_1:

$x_M = k$; $y_M = 1/3 \cdot AF = 1/3 \cdot 1/2 \cdot k = k/6$; $z_M = 2/3 \cdot 1/2 \cdot k = k/3$ => $M(k; k/6; k/3)$

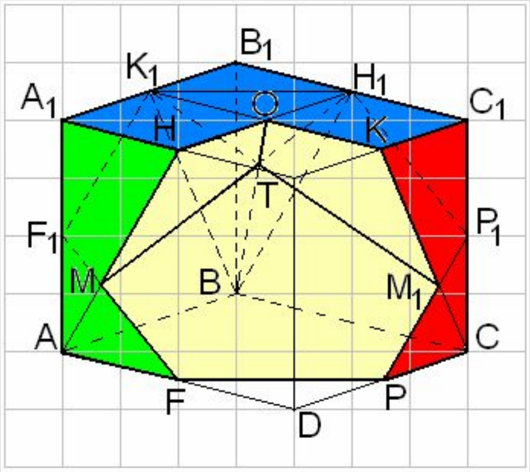
$H_1(0; k/2; k)$ => $MH_1(-k; k/3; 2k/3)$

Уравнение прямой: $\dfrac{x-0}{-k} = \dfrac{y-k/2}{k/3} = \dfrac{z-k}{2k/3}$

Прямая M_1K_1: $K_1(k/2; 0; k)$

$x_{M1} = k/6$; $y_{M1} = k$; $z_{M1} = k/3$ => $M_1(k/6; k; k/3)$ => $M_1K_1(k/3; -k; 2k/3)$

Уравнение прямой: $\dfrac{x-k/2}{k/3} = \dfrac{y-0}{-k} = \dfrac{z-k}{2k/3}$

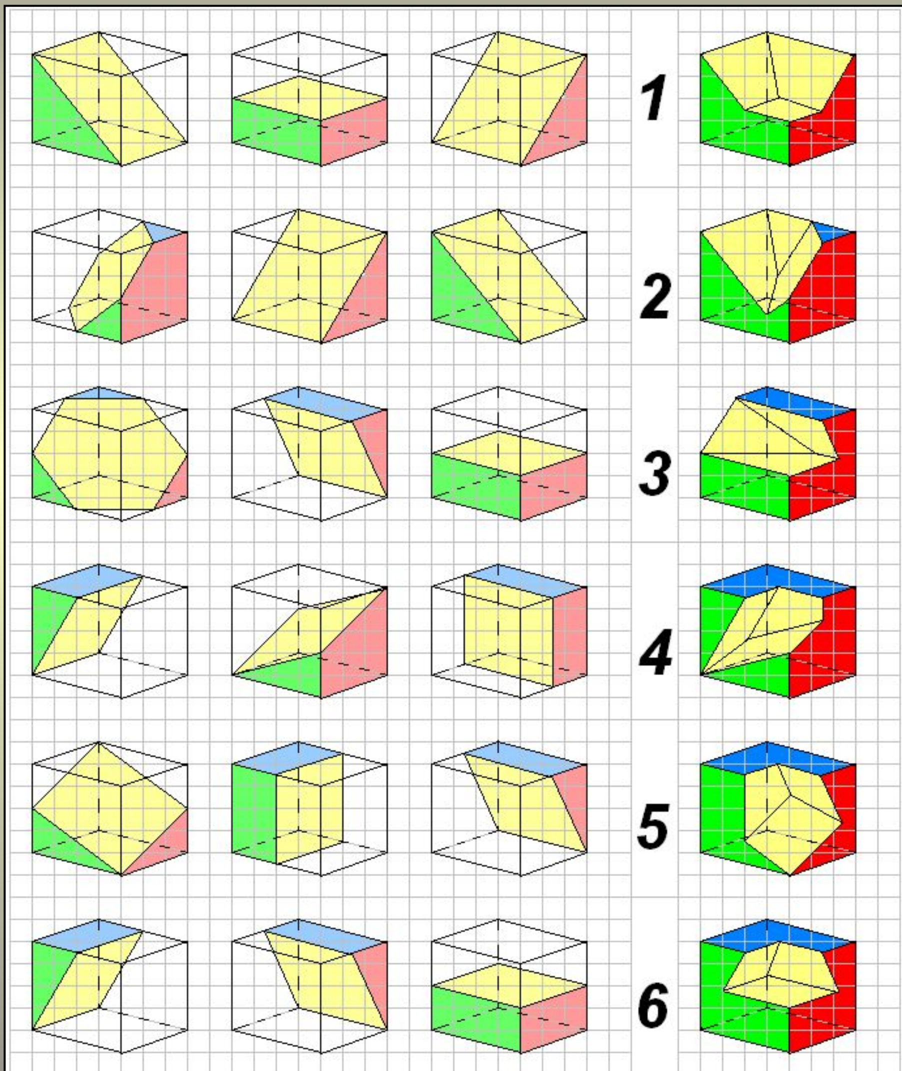


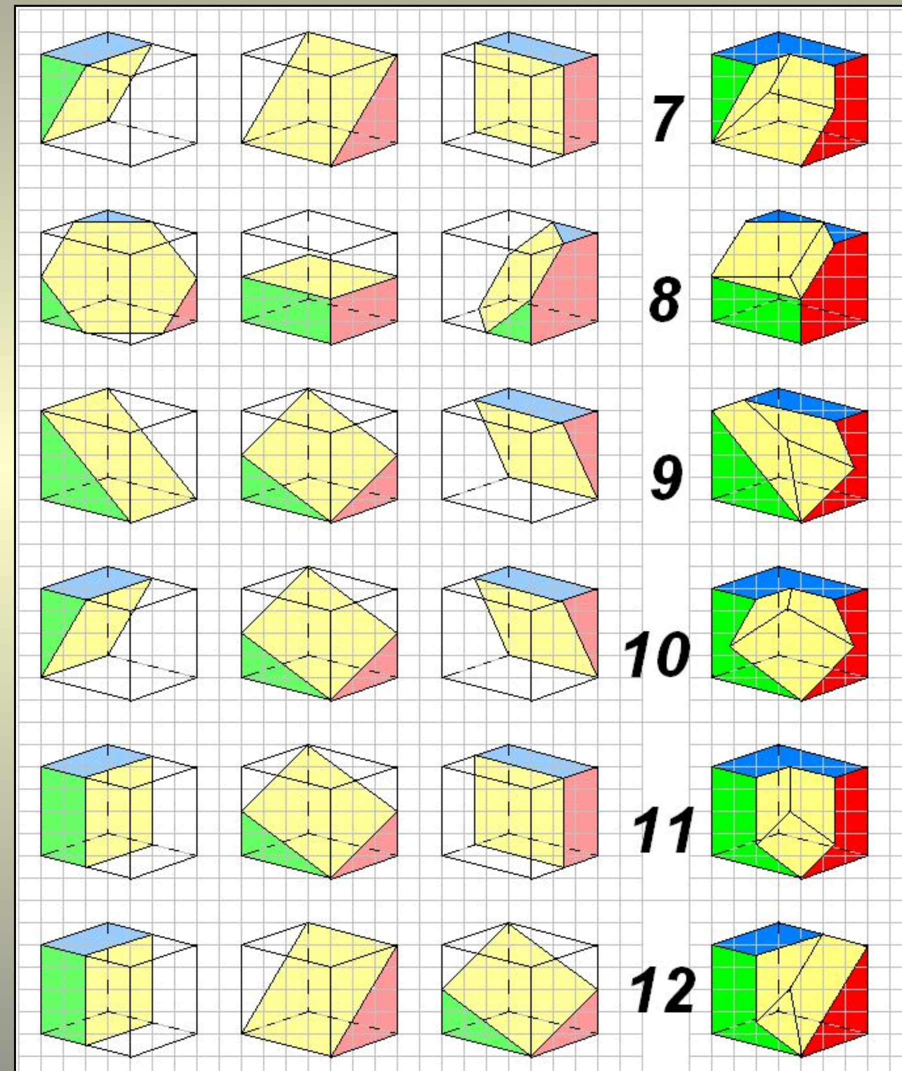
Прямая OB:

$O(k/2; k/2; k)$; $B(0; 0; 0)$ $BO(k/2; k/2; k)$

Уравнение прямой: $\dfrac{x-k/2}{k/2} = \dfrac{y-k/2}{k/2} = \dfrac{z-k}{k}$

Варианты заданий



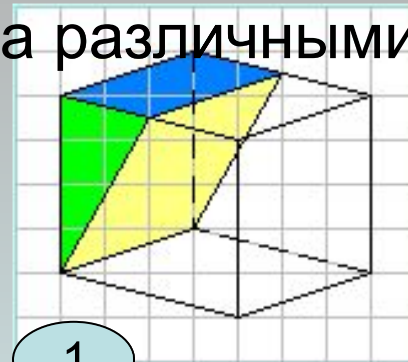


Сечения куба различными плоскостями

Какие многоугольники получаются в результате сечения куба плоскостями?

Найдите одинаковые сечения.

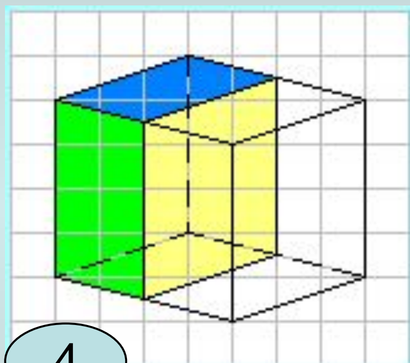
Сколько на рисунке различных сечений?



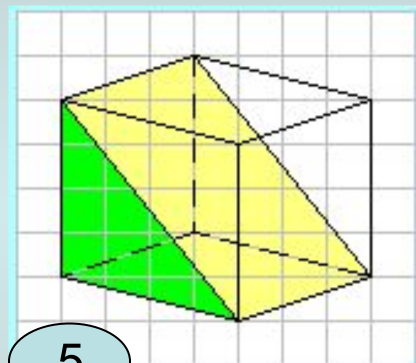
1

2

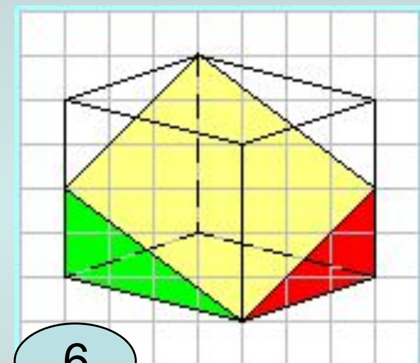
3



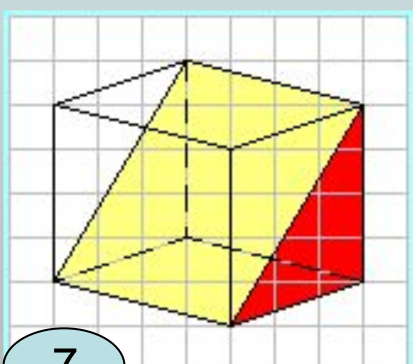
4



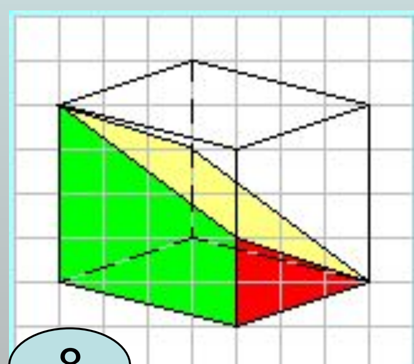
5



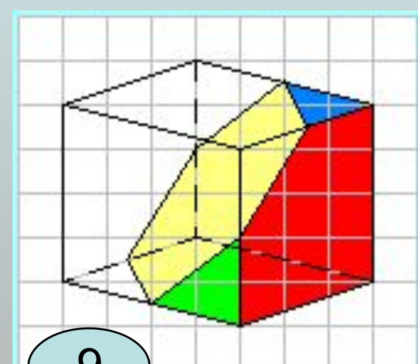
6



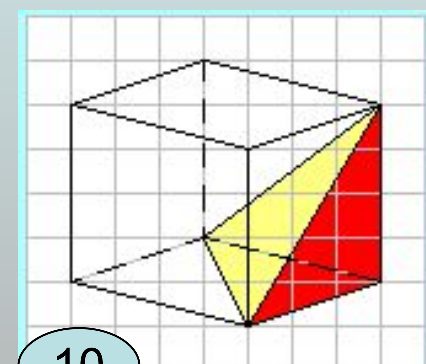
7



8

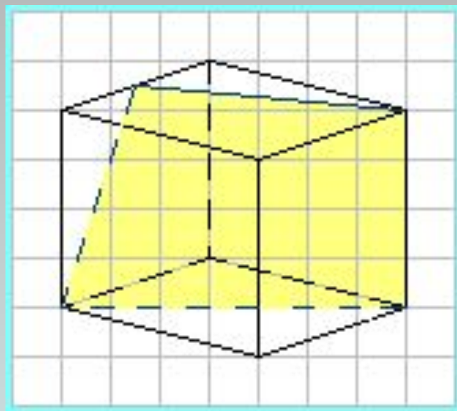


9

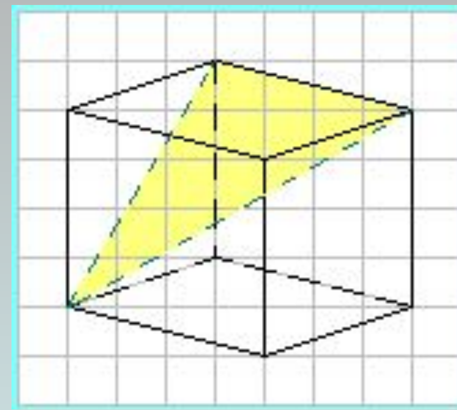


10

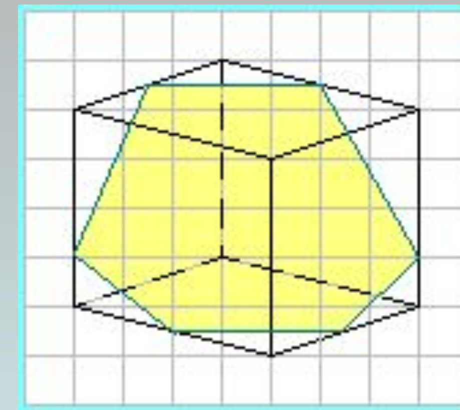
Сечения куба различными плоскостями



1

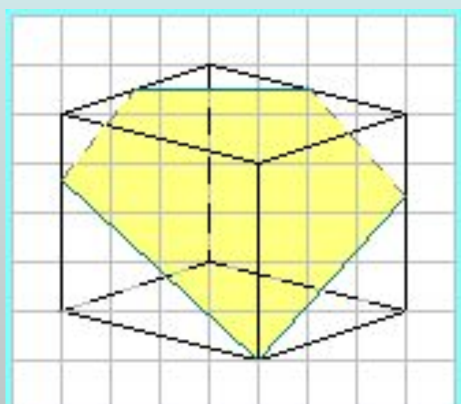


2

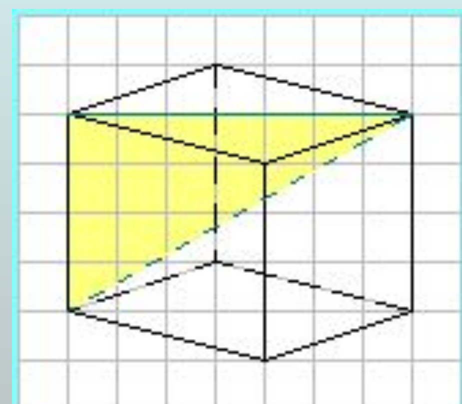


3

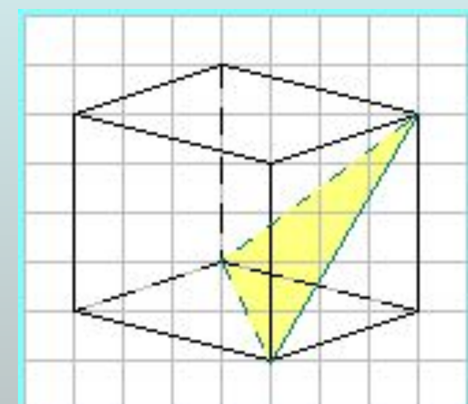
Верно ли построены сечения? Ответ обоснуйте.



4

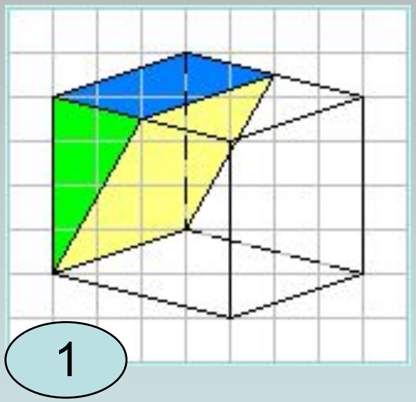


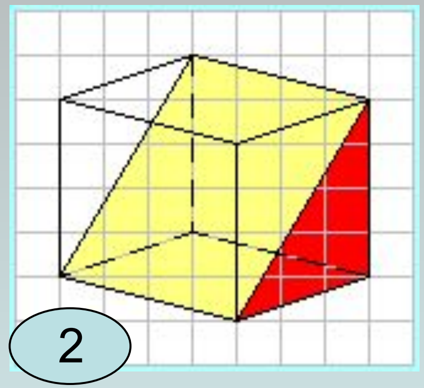
5



6

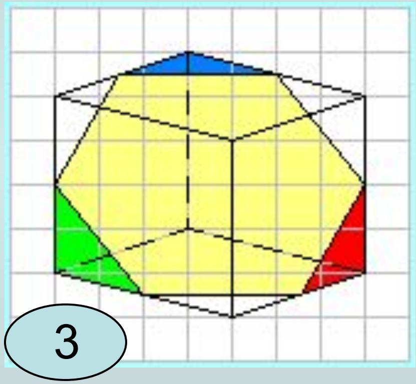
Сечения куба различными плоскостями

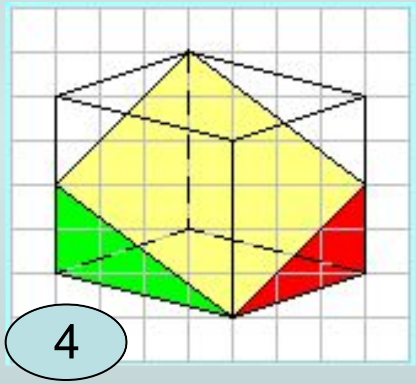




Равны ли площади сечений фигур 1 и 2?

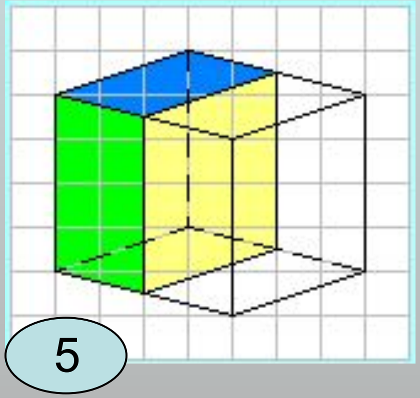
Можно ли утверждать, что на рис.4 изображен ромб? Квадрат? Почему?

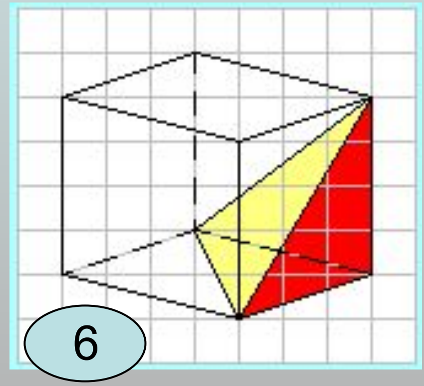




Определите вид треугольника на рис.6

Какая часть куба изображена на каждом из рисунков?





Может ли в результате сечения куба плоскостью получиться пятиугольник? Семиугольник?

ГОСУДАРСТВЕННОЕК ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 489
Кабинет математики

Проектная работа

по стереометрии

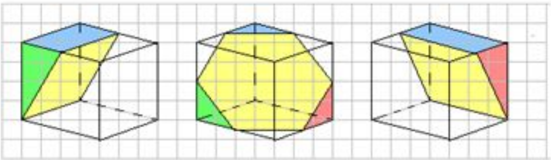
«Исследование многогранника»

на примере куба с сечениями

класс: 10 «А»
учащийся: ______________
учитель: Меркулова Т.И.

Москва
2010-2011 учебный год

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА ПО СТЕРЕОМЕТРИИ
Вариант 22



1. Совместите три вида. Опишите этапы построения.
2. На полученной модели найдите суммарную площадь сечения, приняв сторону куба за **а**.
3. Найдите площадь поверхности всей модели.
4. Выполните развертку полученной детали при **а** = 6 см *и развертку удаленной части.*
5. Предложите два своих варианта сечений куба тремя различными плоскостями.
6. Рассчитайте углы между плоскостями сечений:
   a. Используя построение плоскости, перпендикулярной линии пересечения плоскостей сечений
   b. Используя теорему косинусов для трехгранного угла.

7. Поместив модель в систему координат, составьте уравнение плоскости для каждого из сечений.
8. Составьте уравнения прямых, получившихся в результате пересечения данных плоскостей.
9. *Докажите, что все три прямые пересекаются в одной точке.*
10. Рассчитайте углы между плоскостями сечений:
    a. Используя метод координат
11. Сопоставьте результаты расчетов в п.п. 5а,б и 9а. Сделайте выводы.

12. Вычислите объемы исходных геометрических тел, приняв сторону куба за **а**.
13. «Разбив» построенную модель на простейшие геометрические тела найдите объем данной модели.
14. «Разбив» построенную модель на пирамиды, найдите объем модели, используя «Метод векторов».
15. Сделайте вывод о преимуществах и недостатках применении методов п.п. 13 и 14 для данной модели.