

Исследование модели многогранника с сечениями

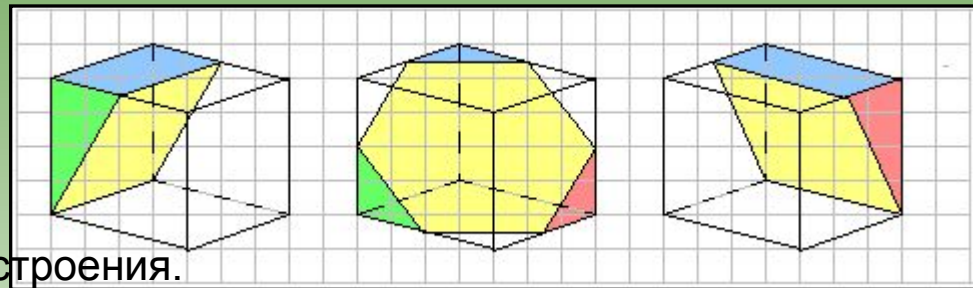
на примере куба

проектная работа по геометрии

учитель математики Меркулова Т.И.

ГБОУ СОШ № 2088 Москва

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА
ПО СТЕРЕОМЕТРИИ
Вариант 22



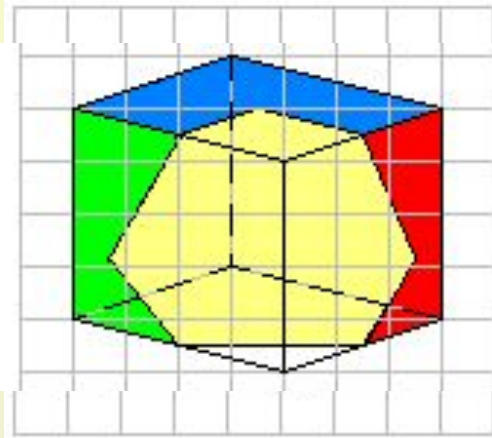
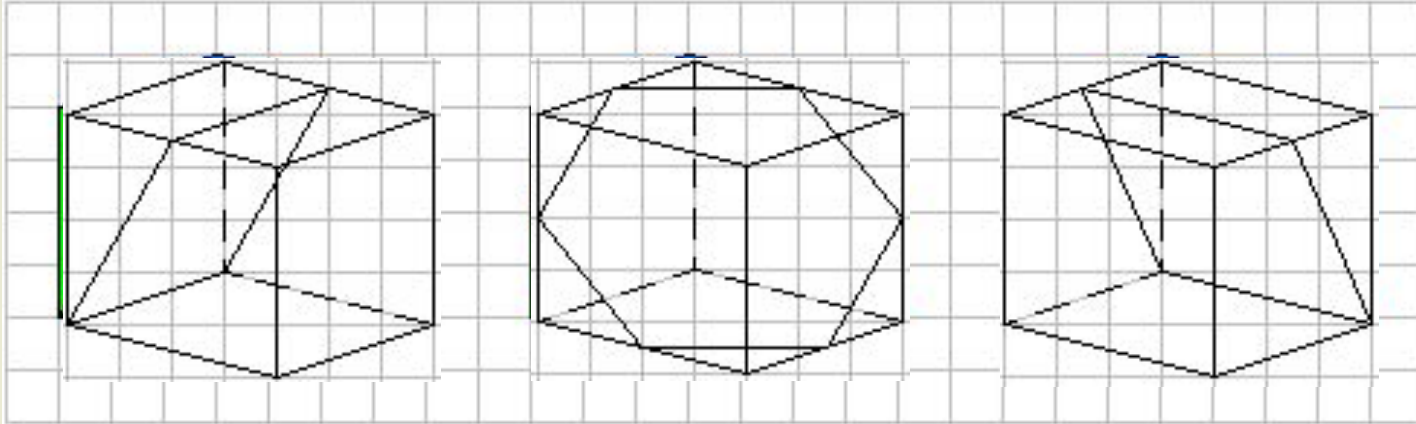
1. Совместите три вида. Опишите этапы построения.
2. На полученной модели найдите суммарную площадь сечения, приняв сторону куба за a .
3. Найдите площадь поверхности всей модели.
4. Выполните развертку полученной детали при $a = 6$ см **и развертку удаленной части.**
5. Предложите два своих варианта сечений куба тремя различными плоскостями.
6. Рассчитайте углы между плоскостями сечений:
 - а. Используя построение плоскости, перпендикулярной линии пересечения плоскостей сечений
 - б. Используя теорему косинусов для трехгранного угла.
7. Поместив модель в систему координат, составьте уравнение плоскости для каждого из сечений.
8. Составьте уравнения прямых, получившихся в результате пересечения данных плоскостей.
9. **Докажите, что все три прямые пересекаются в одной точке.**
10. Рассчитайте углы между плоскостями сечений:
 1. Используя метод координат
11. Сопоставьте результаты расчетов в п.п. 5а,б и 9а. Сделайте выводы.
 - а. Вычислите объемы исходных геометрических тел, приняв сторону куба за a .
 - б. «Разбив» построенную модель на простейшие геометрические тела найдите объем данной модели.
12. «Разбив» построенную модель на пирамиды, найдите объем модели, используя «Метод координат».
13. Сделайте вывод о преимуществах и недостатках применения методов 12 и 14 для данной модели.

Содержание

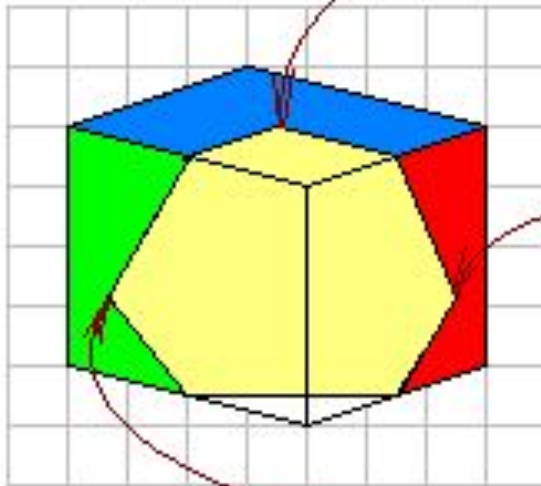
- Построение изображения
- Построение сечений
- Построение развертки куба со сложным сечением
- Построение изображения удаленной части
- Построение развертки удаленной части
- Вычисление площадей
- Вычисление объемов
- Вычисление углом между плоскостями
- Задания по теме «Метод координат»
 - Уравнения плоскостей
 - Вычисление углов между плоскостям
 - Уравнения прямых
- Варианты заданий

- Тренировочные задания

Построение изображения



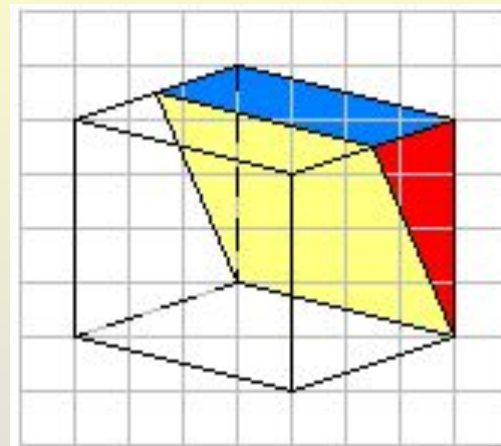
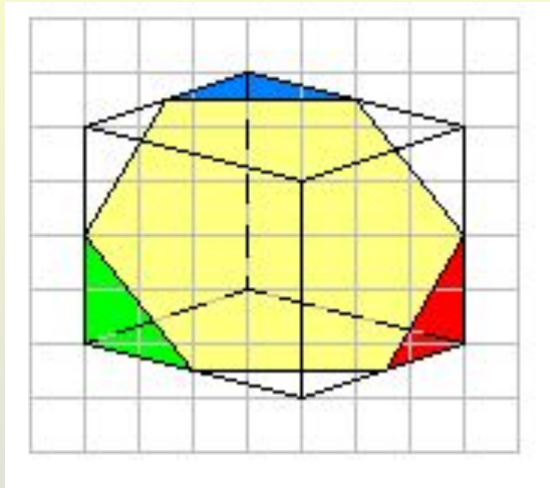
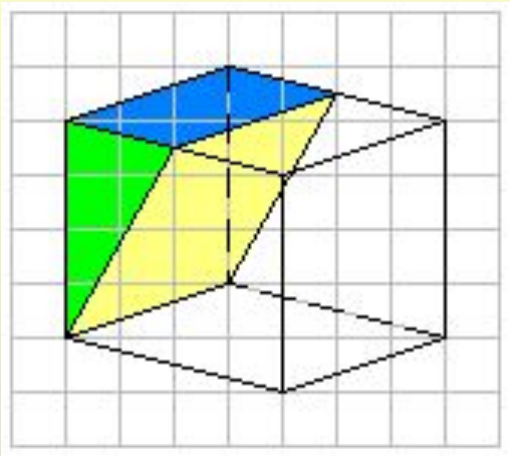
Построение изображения



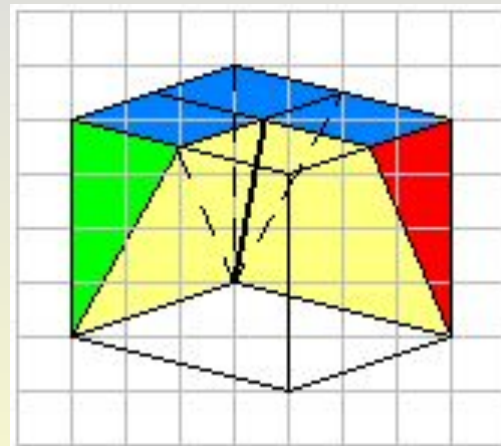
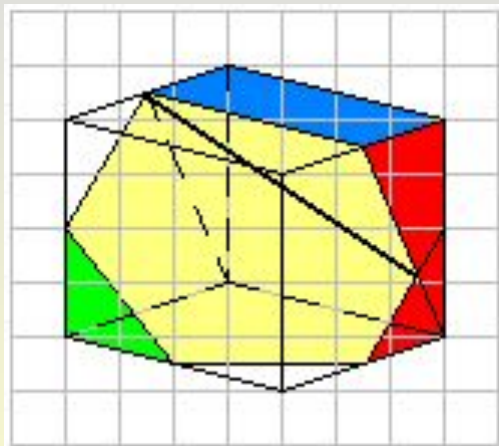
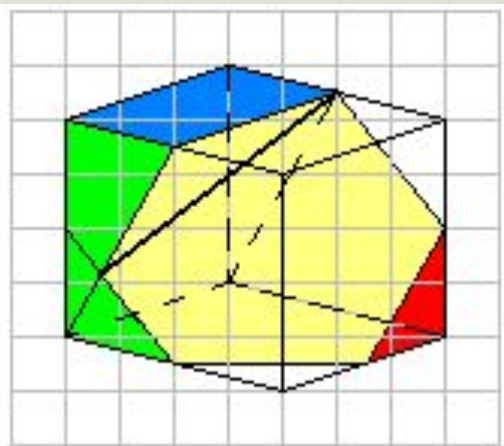
Если две плоскости
имеют общую точку,
то они имеют и общую
прямую



Построение изображения

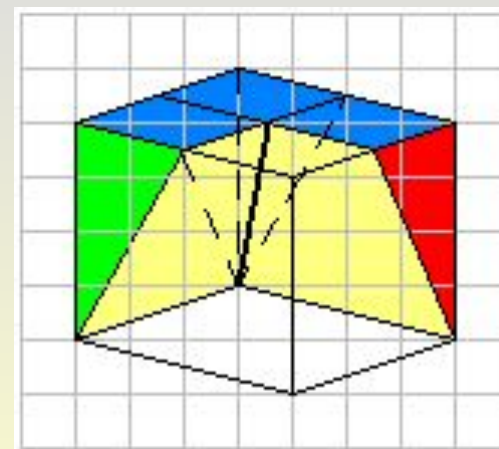
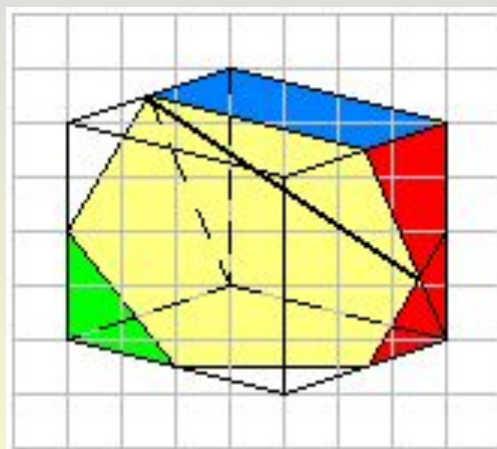
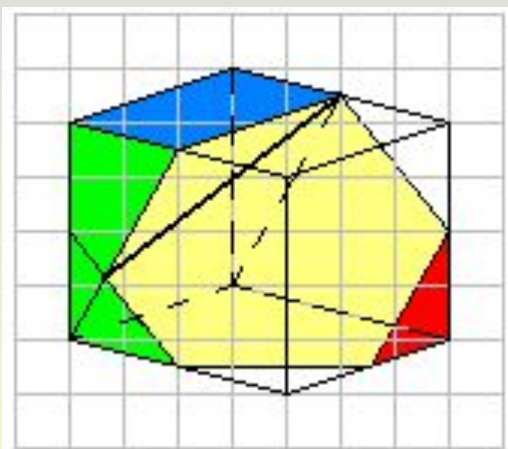
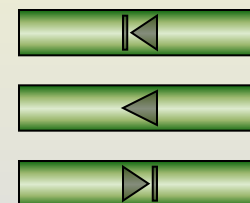
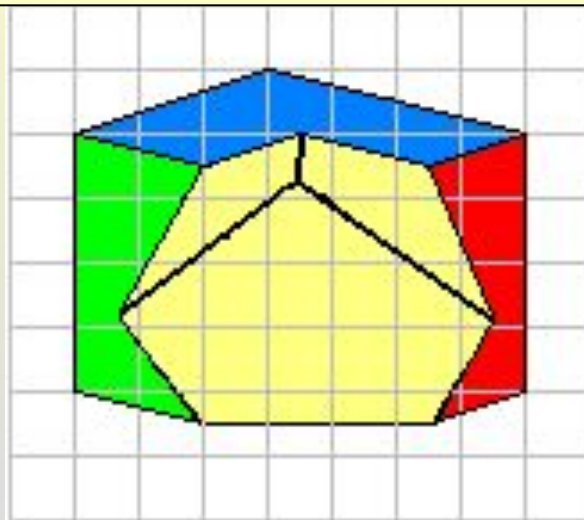


Построение линий пересечения плоскостей



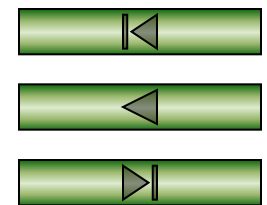
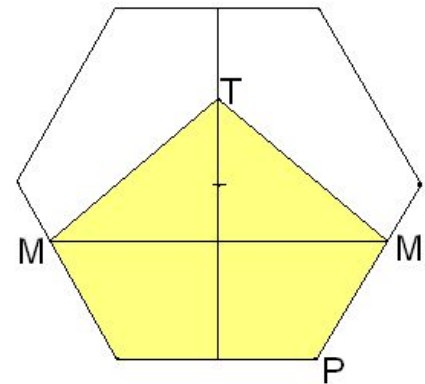
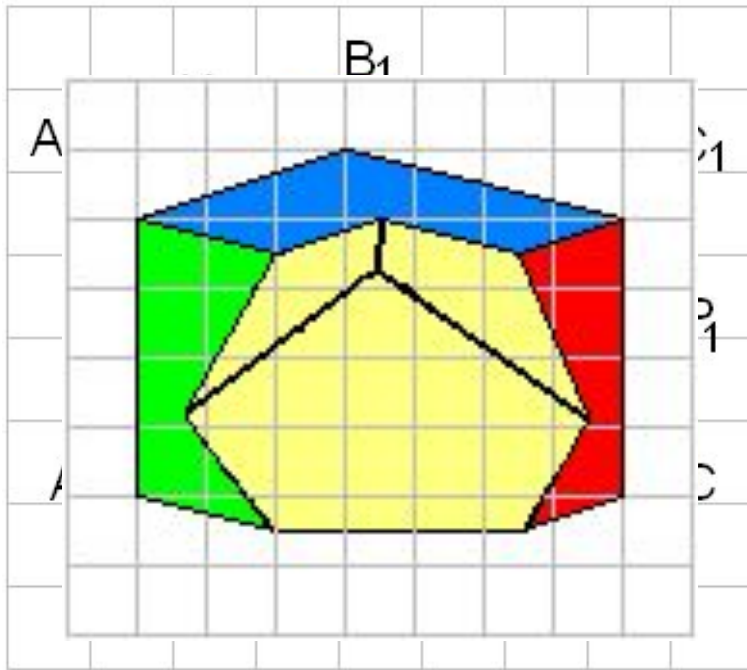
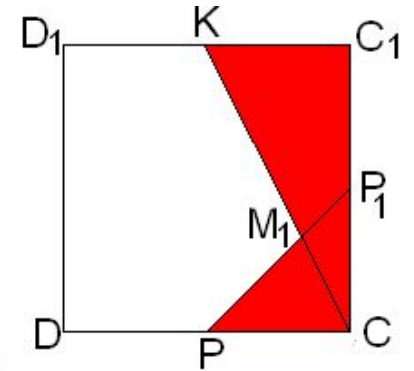
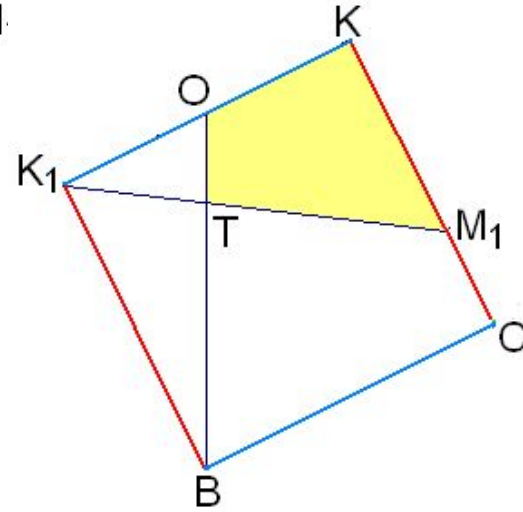
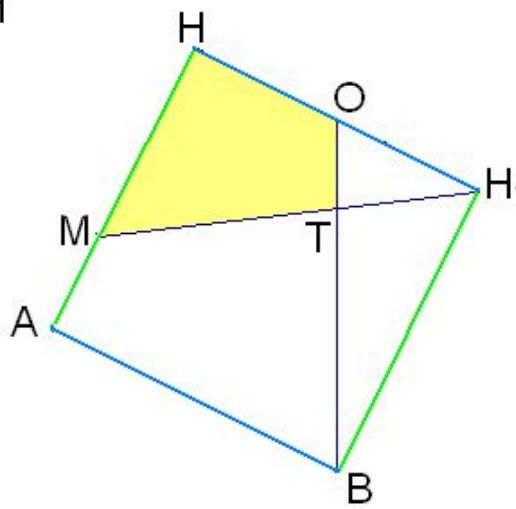
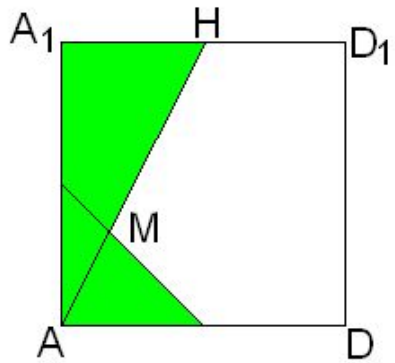
Пересечение плоскостей попарно

Совмещение всех изображений

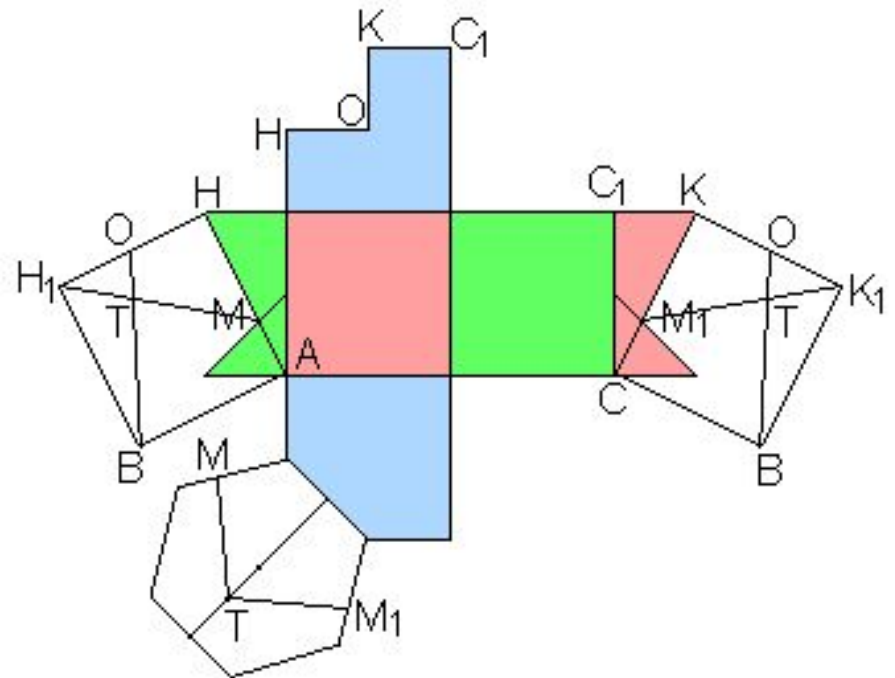
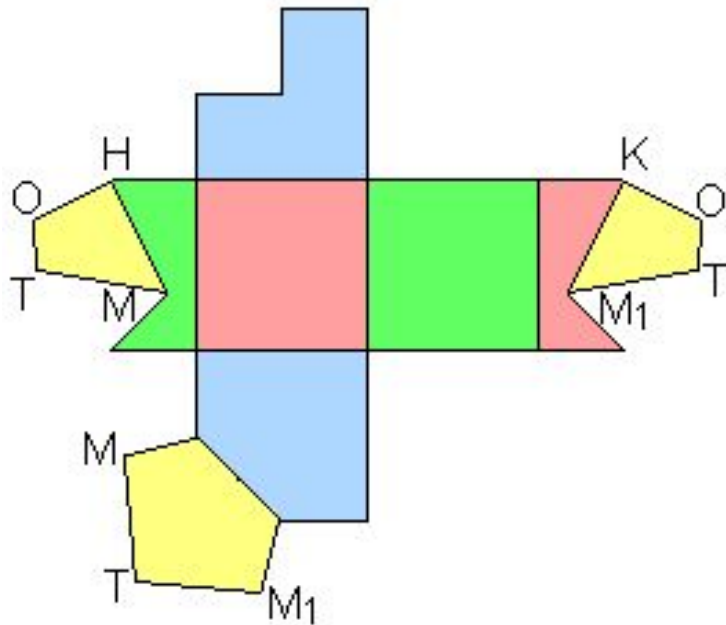
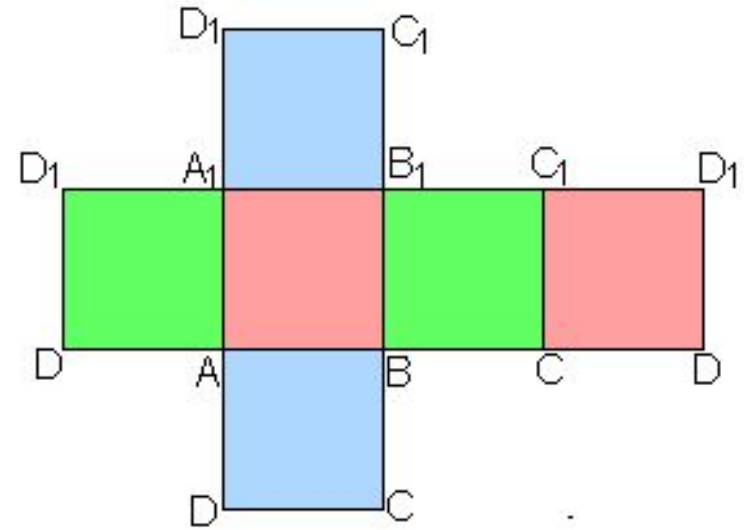
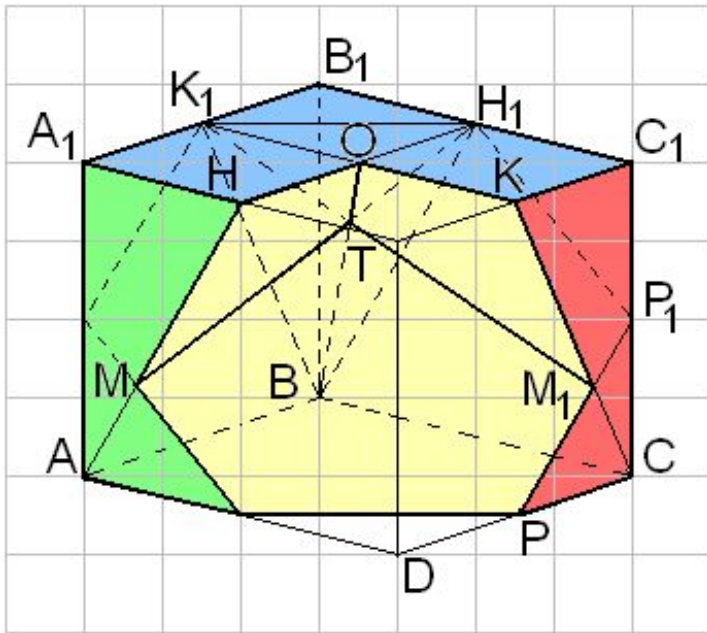


Пересечение плоскостей попарно

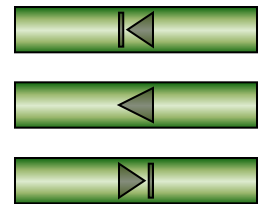
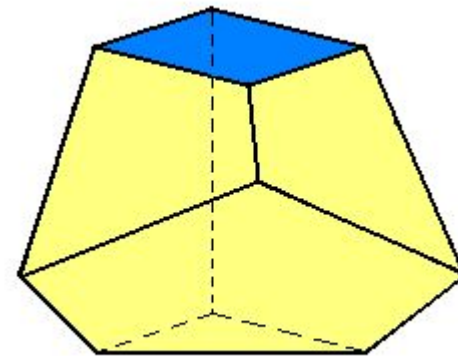
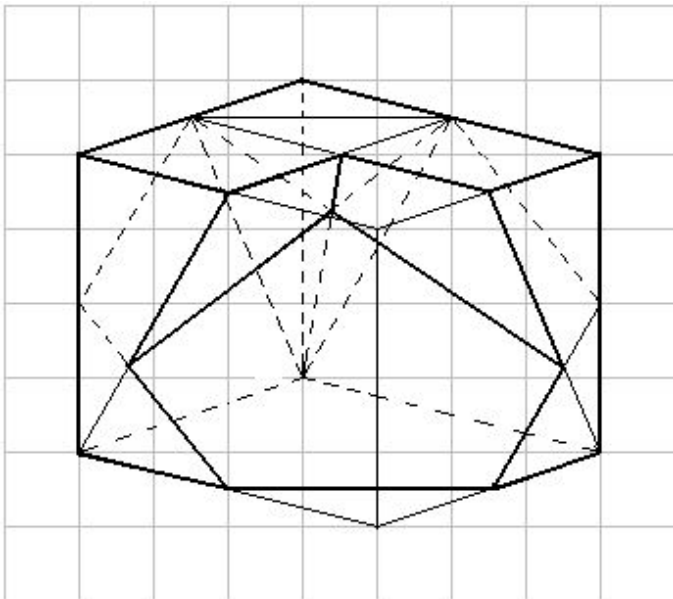
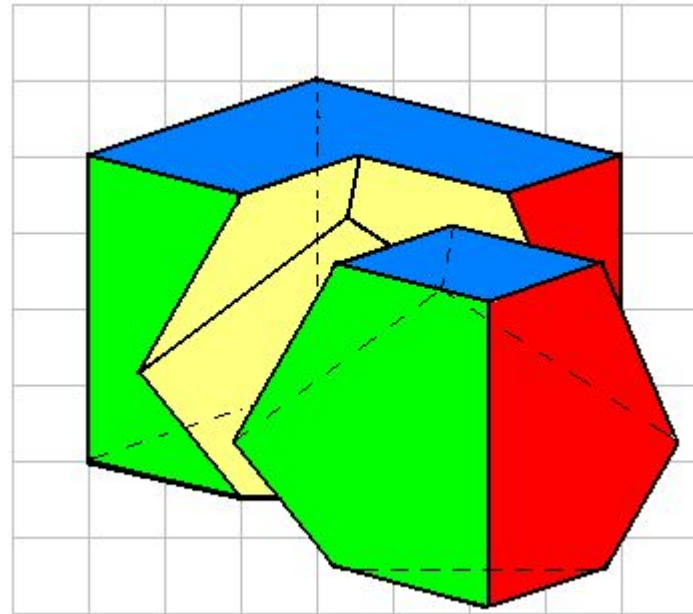
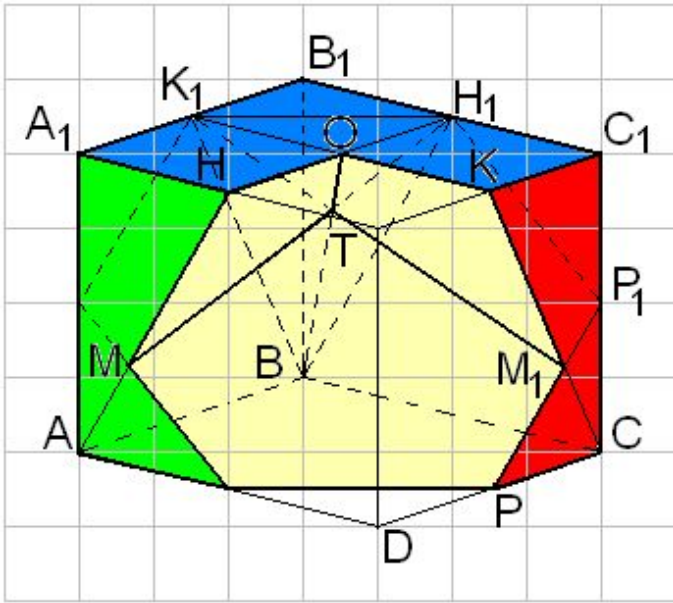
Построение сечений



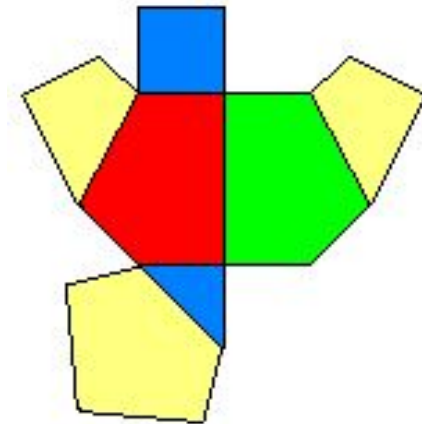
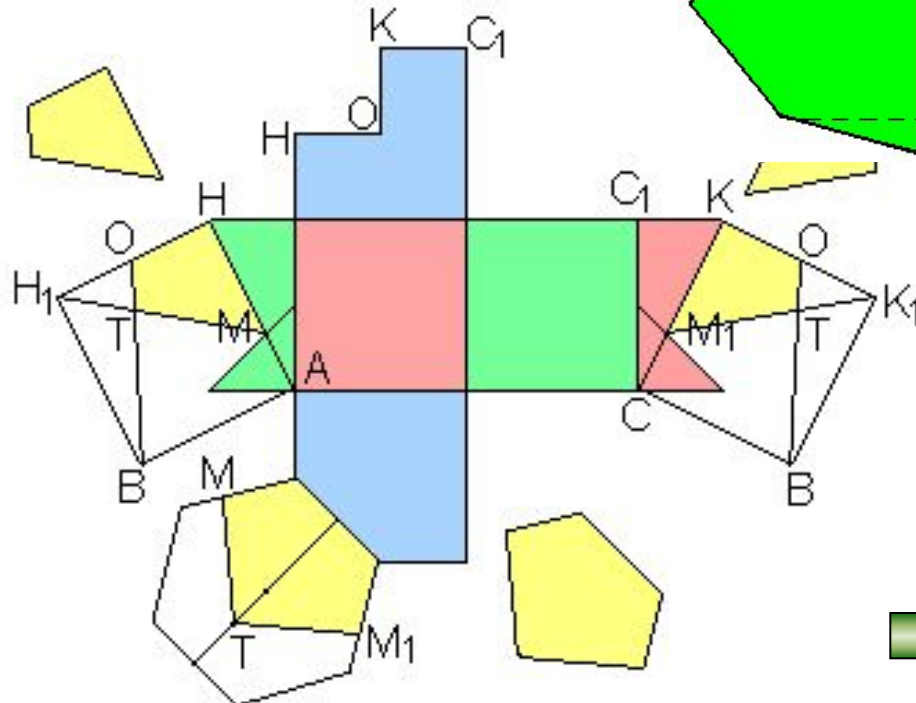
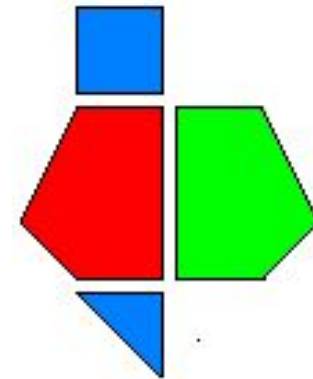
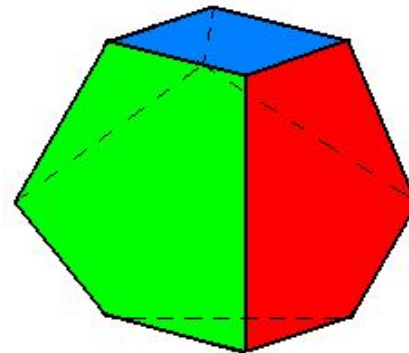
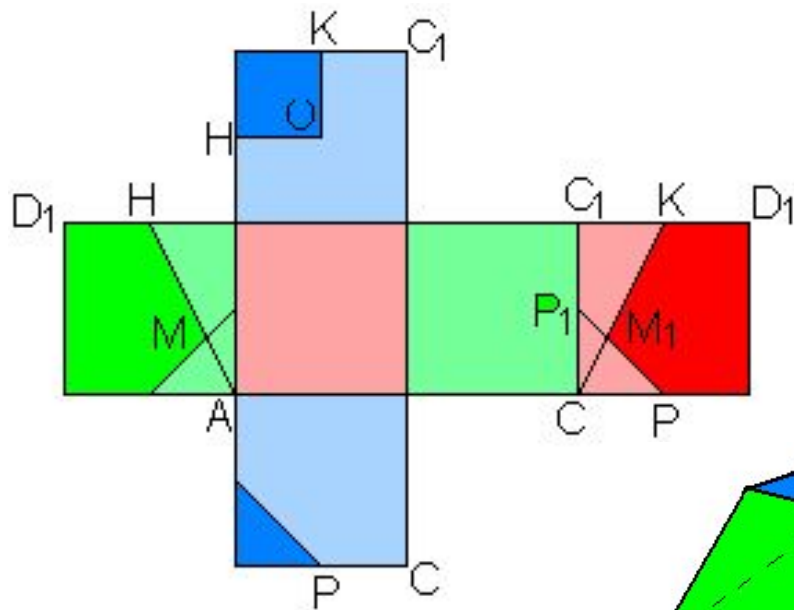
Построение развертки



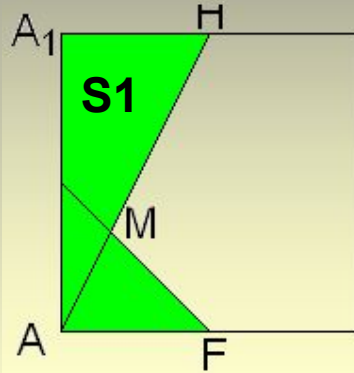
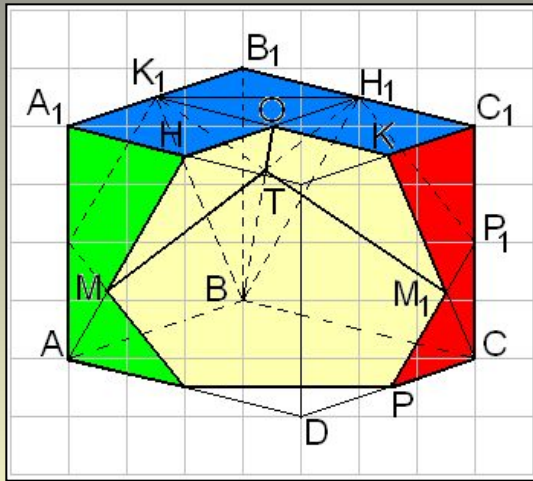
Построение изображения удаленной части



Построение развертки удаленной части



Площадь поверхности



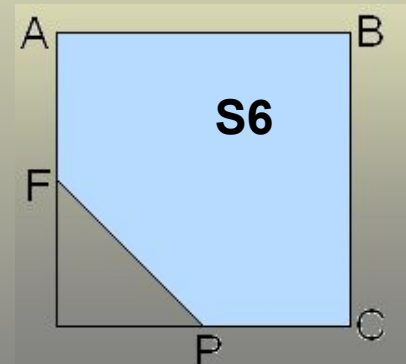
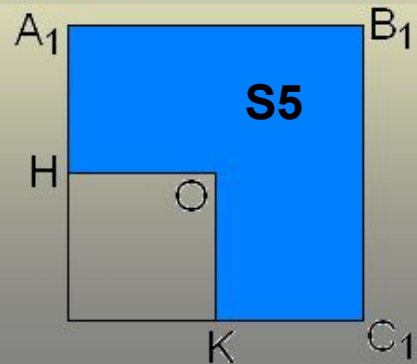
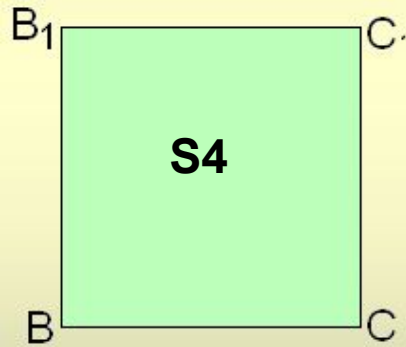
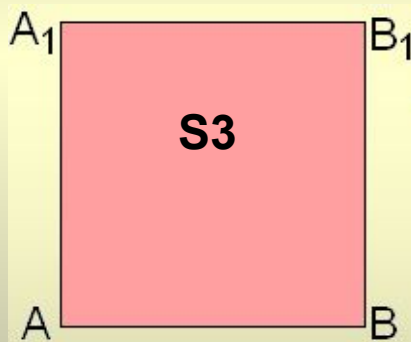
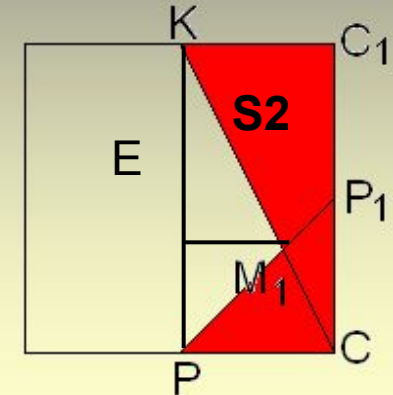
$$S_1 = S_2$$

$$\triangle KPM_1 \sim \triangle M_1P_1C$$

$$KP = 2CP_1$$

$$EM_1 = 2/3PC$$

$$S_2 = 1/2a^2 - S_{KPM_1}$$



$$S_1 = S_2 = 1/2a^2 - 1/2 \cdot a \cdot 2/3a = 1/6a^2$$

$$S_3 = S_4 = a^2$$

$$S_5 = a^2 - 1/4a^2 = 3/4a^2$$

$$S_6 = a^2 - 1/2 \cdot 1/2a \cdot 1/2a = 7/8a^2$$

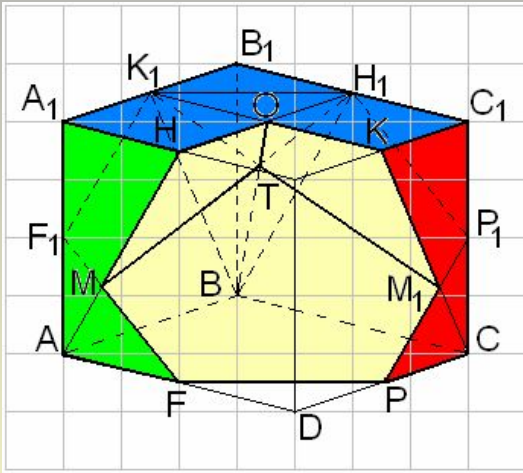
$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 =$$

$$1/6a^2 + 1/6a^2 + a^2 + a^2 + 3/4a^2 + 7/8a^2$$

$$S_{\Sigma} = \frac{3^{23}}{24} \cdot a$$



Площади сечений



$$D_1K = KC_1; DP = PC \Rightarrow (KP) \parallel (C_1C) \Rightarrow$$

$$\Delta KM_1H \sim \Delta M_1P_1C$$

$$KP = 2P_1C \Rightarrow KM_1 = 2M_1C = 2/3KC$$

$$KC^2 = KP^2 + PC^2 \Rightarrow KC = (a^2 + (a/2)^2)^{1/2} = a\sqrt{5}/2$$

$$KC = a\sqrt{5}/2 \quad KM_1 = a\sqrt{5}/3$$

Рассмотрим сечение плоскостью ВКС.

$$[BO] \cap [CK] = M_2$$

$$BK_1 \parallel CK; K_1O = OK; \angle K_1OB = \angle M_2OK \Rightarrow$$

$$\Delta K_1OB = \Delta M_2OK \Rightarrow M_2K = K_1B$$

$$K_1M_1 \cap BO = T; \Delta K_1TB \sim \Delta TM_2M_1;$$

$$K_1B/M_1M_2 = KC/(KC + 2/3KC) = 3/5 \Rightarrow$$

$$|T; (K_1B)| = 3/8BC \text{ и } |T; (CK)| = 5/8BC = 5/8a$$

$$S_{\text{ТОКМ}_1} = S_{\Delta TM_2M_1} - S_{\Delta OM_2K}$$

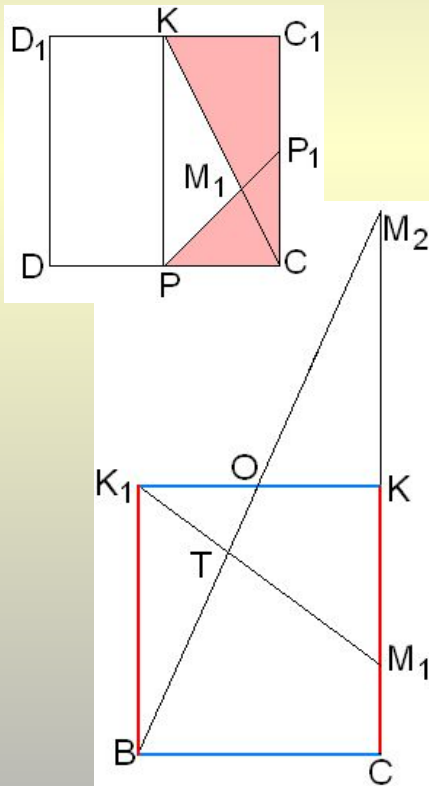
$$M_2M_1 = 5/3KC = 5a\sqrt{5}/6;$$

$$S_{\Delta TM_2M_1} = 1/2 M_2M_1 \cdot |T; (CK)| = 1/2 \cdot 5a\sqrt{5}/6 \cdot 5/8a = 25a^2\sqrt{5}/96$$

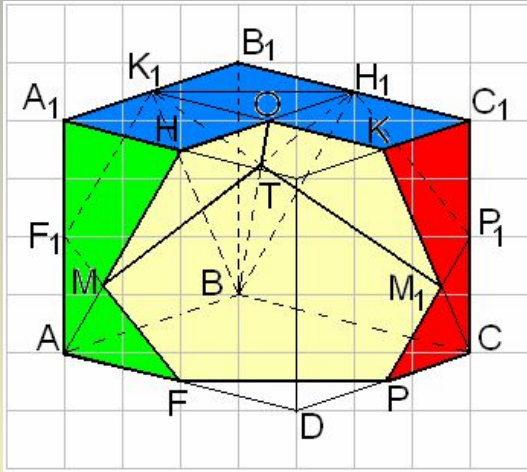
$$S_{\Delta OM_2K} = 1/2 \cdot OK \cdot KM_2 = 1/2 \cdot 1/2a \cdot a\sqrt{5}/2 = a^2\sqrt{5}/8$$

$$S_{\text{ТОКМ}_1} = 25a^2\sqrt{5}/96 - a^2\sqrt{5}/8 = 13a^2\sqrt{5}/96$$

$$S_{\text{МНОТ}} = S_{\text{ТОКМ}_1} = 13a^2\sqrt{5}/96$$



1. На полученной модели найдите суммарную площадь сечений, приняв сторону куба за a .



Рассмотрим сечение куба плоскостью (FPP_1)

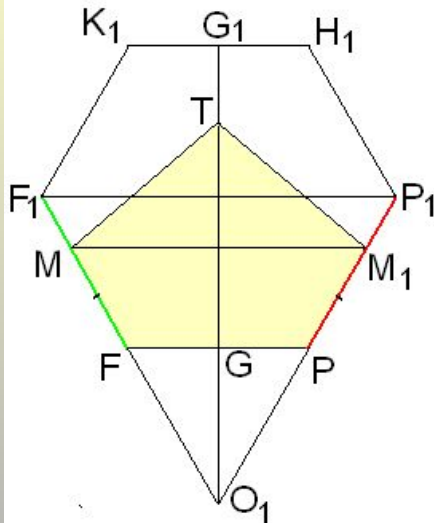
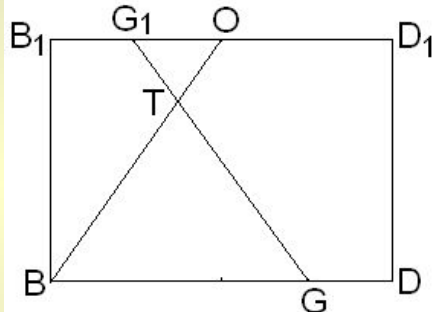
$$BD^2 = BA^2 + AD^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{2}$$

FP - средняя линия ΔADC ; $AD \cap FP = G \Rightarrow BG = 3/4BD = 3a\sqrt{2}/4$;

$$B_1G_1 = 1/4BD = a\sqrt{2}/4$$

$$\Delta G_1OT \sim \Delta BTG; G_1O = BG/3; TG = 3TG_1 = 3/4G_1G$$

$$GG_1 = (DD_1^2 + (D_1B_1/2)^2)^{1/2} = a\sqrt{6}/2$$



$$[F_1F] \cap [P_1P] = O_1$$

$$\Delta F_1P_1O_1 \sim \Delta MM_1O_1; M_1P_1 = 1/2M_1P = 1/3P_1P$$

$$O_1P = PP_1 \Rightarrow MM_1 : F_1P_1 = O_1M_1 : O_1P_1 = 5:6$$

$$MM_1 = 5/6F_1P_1 = 5/6BD = 5a\sqrt{2}/6$$

$$O_1T = 3/4GG_1 + O_1G = (3/4 + 1/2)GG_1 = 5/4 \cdot a\sqrt{6}/2 = 5a\sqrt{6}/8$$

$$S_{MTM_1PF} = S_{MTM_1} + S_{MM_1PF} = 1/2 N_1 T \cdot MM_1 + 1/2 \cdot (MM_1 + FP) \cdot N_1 G =$$

$$= 1/2 \cdot (1/4 + 1/6) \cdot G_1G \cdot MM_1 + 1/2 \cdot (MM_1 + FP) \cdot 1/3 \cdot G_1G =$$

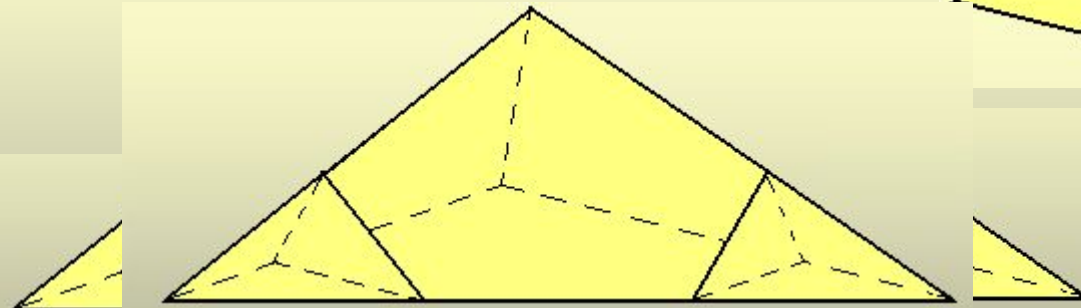
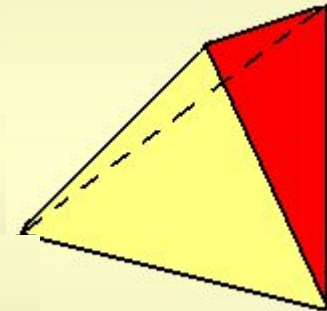
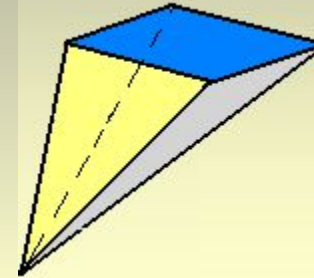
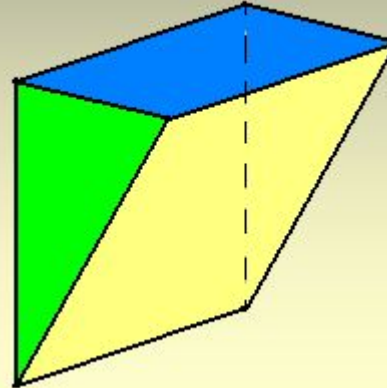
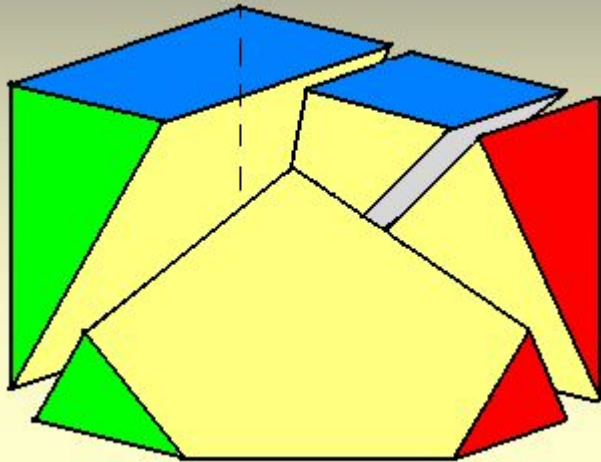
$$= 1/2 \cdot 5/12 \cdot a\sqrt{6}/2 \cdot 5a\sqrt{2}/6 + 1/2 \cdot (5a\sqrt{2}/6 + a\sqrt{2}/2) \cdot 1/3 \cdot a\sqrt{6}/2$$

$$S_{MTM_1PF} = 47a^2\sqrt{3}/144$$

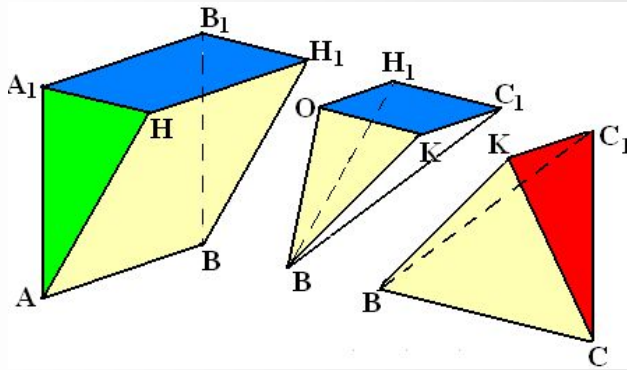


Вычисление объема

Разбиение на многогранники



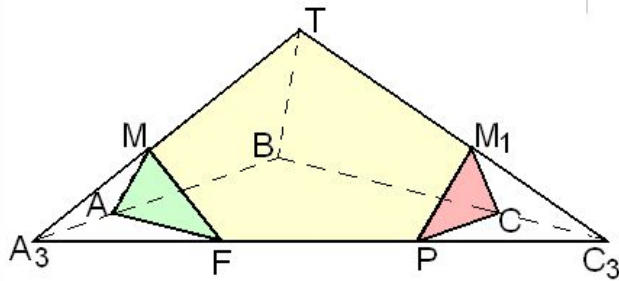
Вычисление объема



$$V_1 = S_{AA_1H} \cdot AB = 1/2 \cdot a \cdot a/2 \cdot a = a^3/4$$

$$V_2 = 1/3 \cdot S_{OH_1C_1K} \cdot B_1B = 1/3 \cdot a/2 \cdot a/2 \cdot a = a^3/12$$

$$BC \perp (KCC_1) \Rightarrow V_3 = 1/3 \cdot S_{KCC_1} \cdot BC = 1/3 \cdot 1/2 \cdot a \cdot a/2 \cdot a = a^3/12$$



$$S_{A_3BC_3} = 1/2 \cdot BA_3 \cdot BC_3 = 1/2 \cdot 3a/2 \cdot 3a/2 = 9a^2/8$$

$$H_{A_3BC_3} = |T; (ABC)| = 3a/4$$

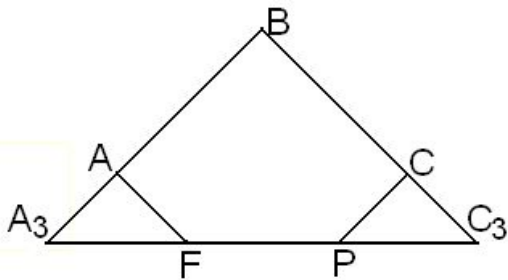
$$S_{A_3AF} = S_{PCC_3} = 1/2 \cdot AA_3 \cdot AF = 1/2 \cdot a/2 \cdot a/2 = a^2/8$$

$$H_{A_3AF} = |M; (ABC)| = a/3$$

$$V_{A_3BC_3} = 1/3 \cdot S_{A_3BC_3} \cdot H_{A_3BC_3} = 1/3 \cdot 9a^2/8 \cdot 3a/4 = 9a^3/32$$

$$V_{A_3AF} = 1/3 \cdot S_{A_3AF} \cdot H_{A_3AF} = 1/3 \cdot a^2/8 \cdot a/3 = a^3/72$$

$$V_4 = V_{A_3BC_3} - 2 \cdot V_{A_3AF} = 9a^3/32 - 2 \cdot a^3/72 = 73a^3/288$$



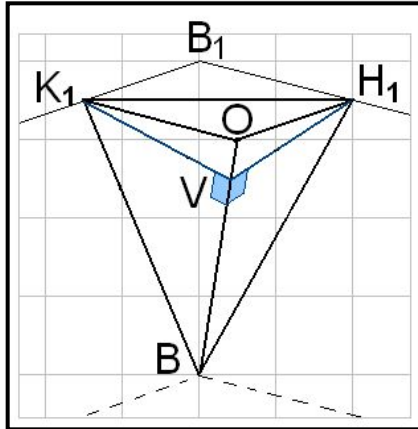
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = a^3/4 + a^3/12 + a^3/12 + 73a^3/288$$

$$V = 193a^3/288$$



Вычисление углов между плоскостями

Сечения 1-3 «Построение плоскости, перпендикулярной общему ребру»



$$K_1B = H_1B; K_1O = H_1O; OB - \text{общая} \Rightarrow \Delta K_1OB = \Delta H_1OB;$$

$$K_1V \perp OB \Rightarrow H_1V \perp OB \Rightarrow (K_1VH_1) \perp OB \Rightarrow \angle K_1VH_1 = \beta;$$

$$\cos \beta = (K_1V^2 + H_1V^2 - K_1H_1^2) / (2 \cdot K_1V \cdot H_1V) \quad K_1V = H_1V$$

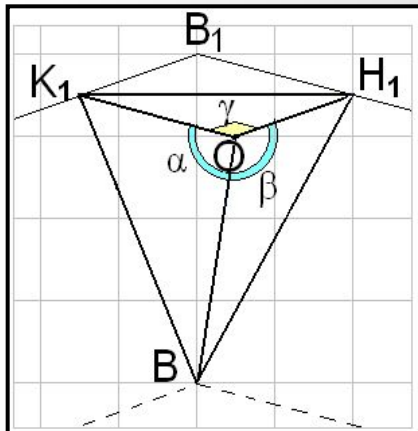
$$K_1O \perp (B_1BA) \Rightarrow K_1O \perp K_1B \Rightarrow$$

$$K_1V = K_1O \cdot K_1B / OB = a/2 \cdot a\sqrt{5}/2 / ((a/2)^2 + (a\sqrt{5}/2)^2)^{1/2} = a\sqrt{30}/12$$

$$\cos \beta = (2K_1V^2 - K_1H_1^2) / (2 \cdot K_1V^2) = -1/5$$

Угол между плоскостями лежит в диапазоне $[0^\circ; 90^\circ] \Rightarrow$

$$\cos \beta = 1/5$$



«Трехгранный угол»

$$\angle K_1OB = \alpha; \angle H_1OB = \beta; \angle K_1OH_1 = \gamma = 90^\circ;$$

δ – угол при ребре OB

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \delta$$

$$K_1B = H_1B; K_1O = H_1O; OB - \text{общая} \Rightarrow$$

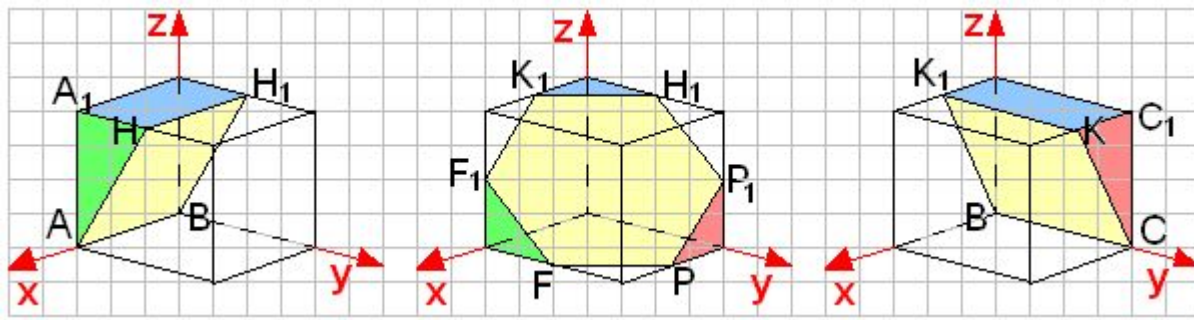
$$\Delta K_1OB = \Delta H_1OB \Rightarrow \alpha = \beta; \quad \cos \gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\cos \delta = -\text{ctg}^2 \alpha = -(K_1O/K_1B)^2 = -(1/\sqrt{5})^2 = -1/5 \Rightarrow$$

$$\cos \delta = 1/5$$



«Метод координат»



Составьте уравнение плоскости для каждого сечения

Сечение 1: $A(k; 0; 0)$; $B(0; 0; 0)$; $H(k; k/2; k)$

$$Ax + By + Cz + D = 0 (*): \quad B: A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \quad (1) \Rightarrow D = 0 \Rightarrow (3)$$

$$A: Ak + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \quad (2) \Rightarrow A = 0 \Rightarrow (3)$$

$$H: Ak + Bk/2 + Ck + D = 0 \quad (3) \Rightarrow C = -B/2 \Rightarrow (*)$$

$$By - B/2 \cdot z = 0 \Rightarrow$$

$$2y - z = 0 \Rightarrow \quad n_1(0; 2; -1)$$

Сечение 2: $F(k; k/2; 0)$; $P(k/2; k; 0)$; $H_1(0; k/2; k)$

$$F: A \cdot k + B \cdot k/2 + C \cdot 0 + D = 0 \quad (4)$$

$$P: A \cdot k/2 + B \cdot k + C \cdot 0 + D = 0 \quad (5)$$

$$H_1: A \cdot 0 + B \cdot k/2 + C \cdot k + D = 0 \quad (6)$$

$$(4) - (5): A \cdot k/2 - B \cdot k/2 = 0 \Rightarrow A = B \Rightarrow (4) \Rightarrow 3B \cdot k/2 = -D \Rightarrow B = -2D/(3k) \Rightarrow (6);$$

$$*) \Rightarrow -D/3 + C \cdot k + D = 0 \Rightarrow C = -2D/(3k) \Rightarrow (*) \Rightarrow$$

$$-2D/(3k) \cdot x - 2D/(3k) \cdot y - 2D/(3k) \cdot z + D = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 2y + 2z - 3 = 0 \Rightarrow \quad n_2(2; 2; 2)$$



«Метод координат»

Вычислите углы между плоскостями

$$\vec{n}_1(0; 2; -1); \quad \vec{n}_2(2; 2; 2); \quad \vec{n}_3(2; 0; -1)$$

$$|\vec{n}_1| = |\vec{n}_3| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ = 2\sqrt{3}$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}$$

α – угол между плоскостями 1-2; β – угол между плоскостями 1-3

γ – угол между плоскостями 2-3

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}} = 1/\sqrt{15} = \cos$$

$$\gamma$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_3|} = \frac{0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = 1/5$$

$$\alpha = \gamma = \arccos(1/\sqrt{15}) \quad \beta = \arccos(1/5)$$



«Метод координат»

Составьте уравнения прямых,
получившихся в результате
пересечения плоскостей

Прямая MH_1 :

$$x_M = k; y_M = 1/3 \cdot AF = 1/3 \cdot 1/2 \cdot k = k/6; z_M = 2/3 \cdot 1/2 \cdot k = k/3 \Rightarrow M(k; k/6; k/3)$$

$$H_1(0; k/2; k) \Rightarrow MH_1(-k; k/3; 2k/3)$$

$$\text{Уравнение прямой: } \frac{x - 0}{-k} = \frac{y - k/2}{k/3} = \frac{z - k}{2k/3}$$

Прямая M_1K_1 : $K_1(k/2; 0; k)$

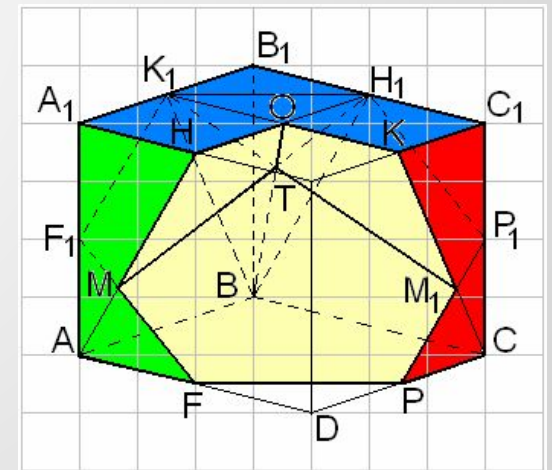
$$x_{M_1} = k/6; y_{M_1} = k; z_{M_1} = k/3 \Rightarrow M_1(k/6; k; k/3) \Rightarrow M_1K_1(k/3; -k; 2k/3)$$

$$\text{Уравнение прямой: } \frac{x - k/2}{k/3} = \frac{y - 0}{-k} = \frac{z - k}{2k/3}$$

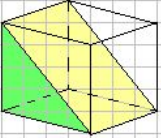
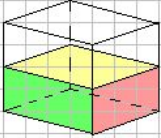
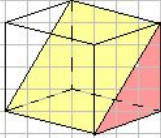
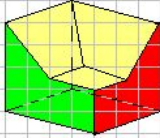
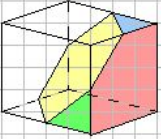
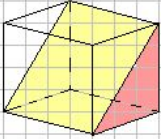
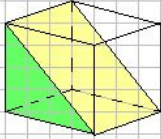
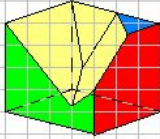
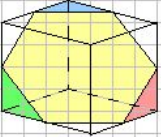
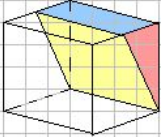
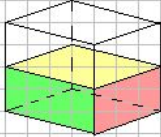
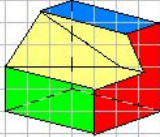
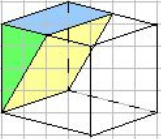
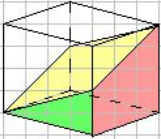
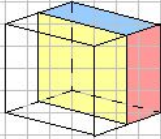
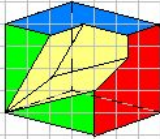
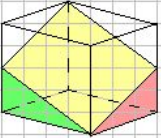
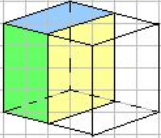
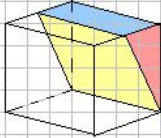
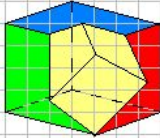
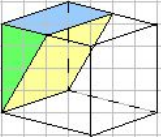
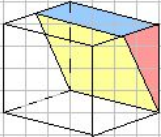
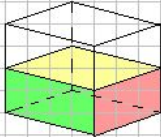
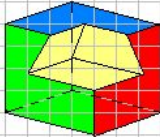
Прямая OB :

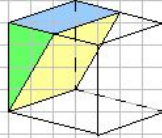
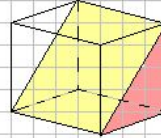
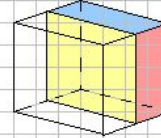
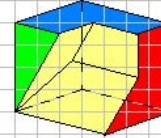
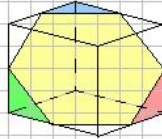
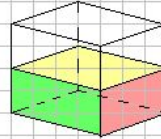
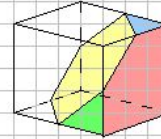
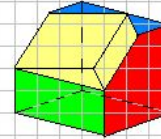
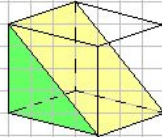
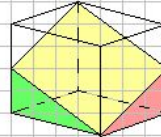
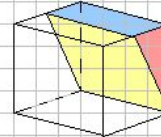
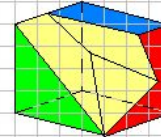
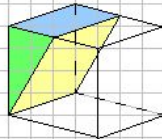
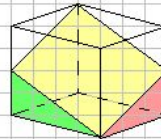
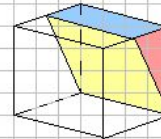
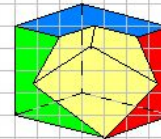
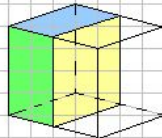
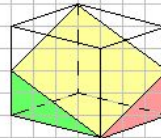
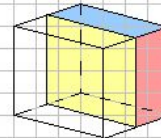
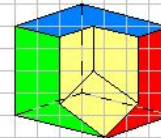
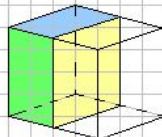
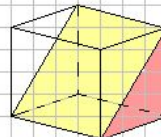
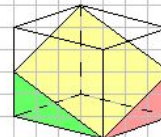
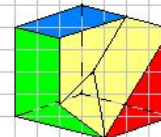
$$O(k/2; k/2; k); B(0; 0; 0) \Rightarrow OB(k/2; k/2; k)$$

$$\text{Уравнение прямой: } \frac{x - k/2}{k/2} = \frac{y - k/2}{k/2} = \frac{z - k}{k}$$



Варианты заданий

			1 
			2 
			3 
			4 
			5 
			6 

			7 
			8 
			9 
			10 
			11 
			12 



Какие многоугольники получают куба различными плоскостями в результате сечения куба плоскостями? Найдите одинаковые сечения.

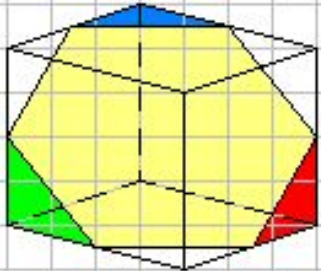
Сколько на рисунке различных сечений?



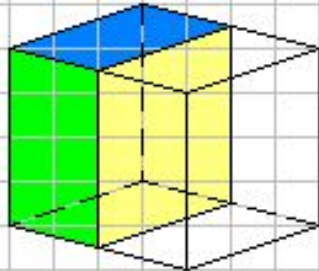
1



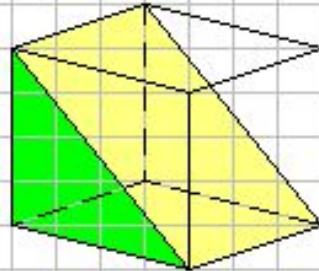
2



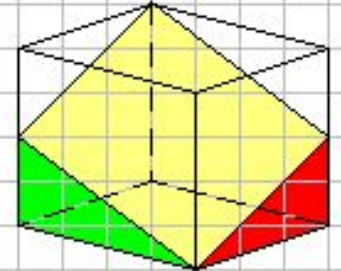
3



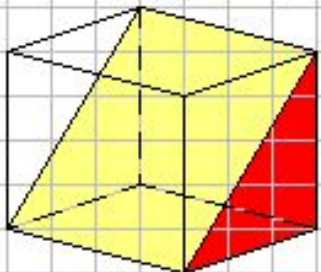
4



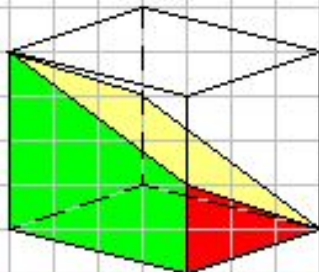
5



6



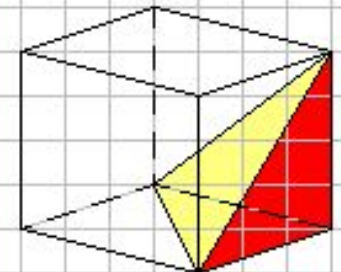
7



8



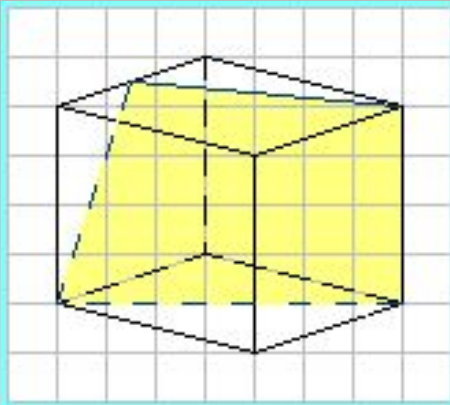
9



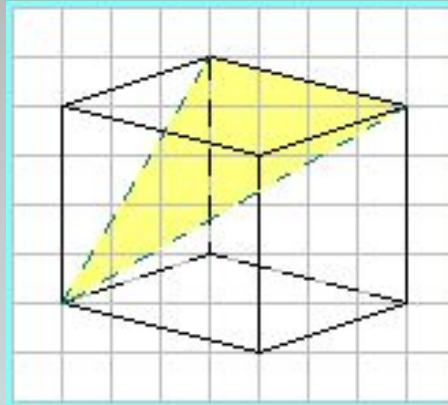
10



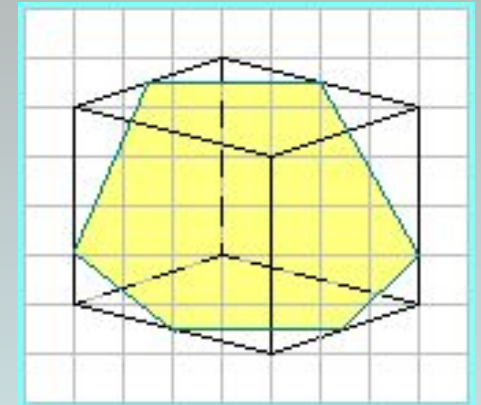
Сечения куба различными плоскостями



1

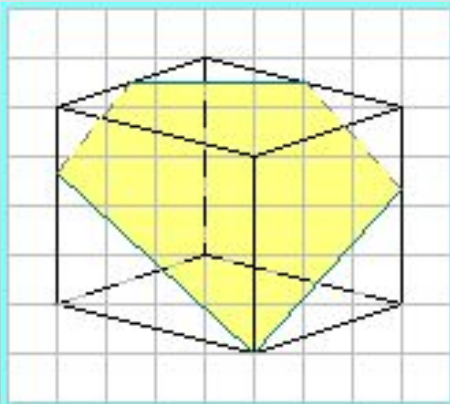


2

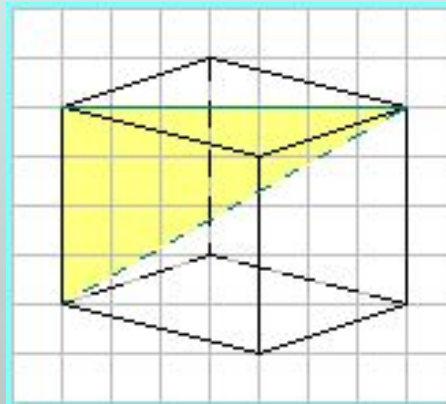


3

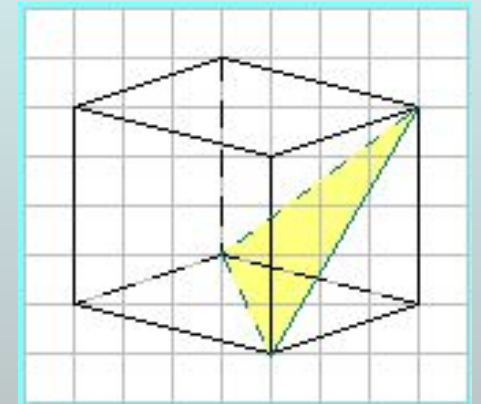
Верно ли построены сечения? Ответ обоснуйте.



4



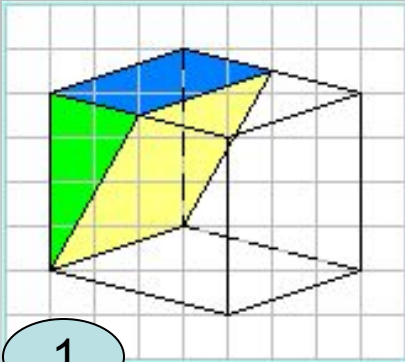
5



6

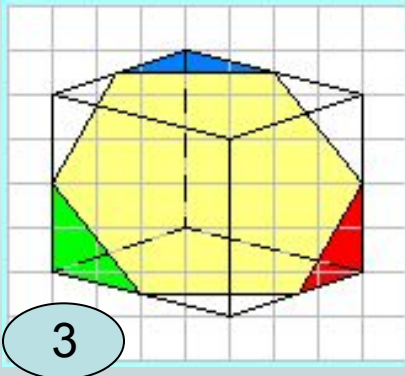


Сечения куба различными плоскостями



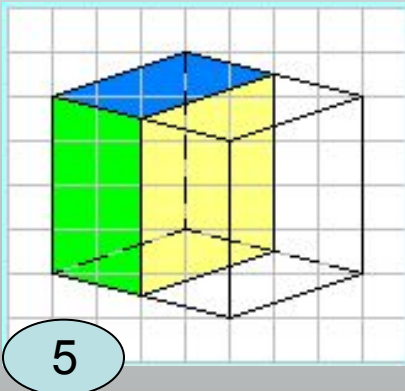
Равны ли площади сечений фигур 1 и 2?

Можно ли утверждать, что на рис.4 изображен ромб? Квадрат? Почему?

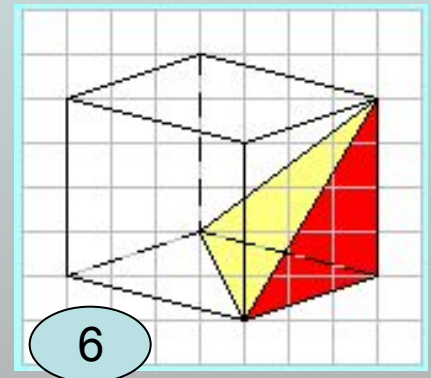
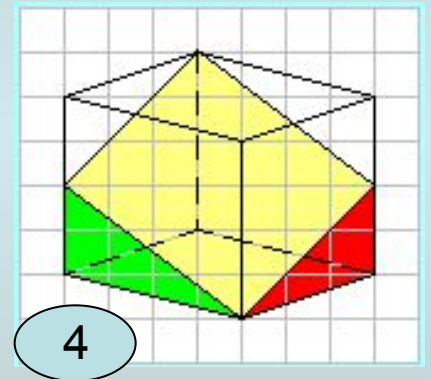
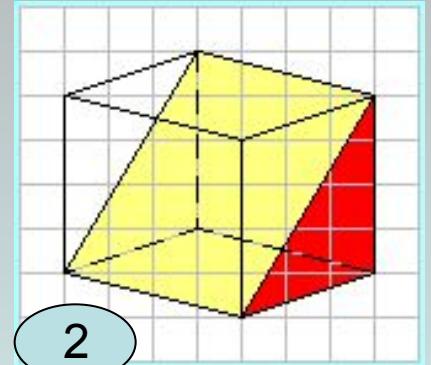


Определите вид треугольника на рис.6

Какая часть куба изображена на каждом из рисунков?



Может ли в результате сечения куба плоскостью получиться пятиугольник? Семиугольник?



Проектная работа

по стереометрии

«Исследование многогранника»

на примере куба с сечениями



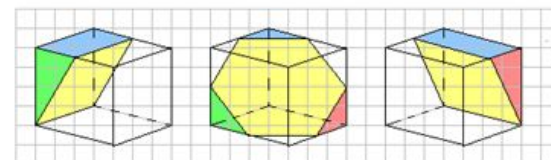
класс: 10 «А»

учащийся: _____

учитель: Меркулова Т.И.

Москва
2010-2011 учебный год

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА ПО СТЕРЕОМЕТРИИ Вариант 22



1. Совместите три вида. Опишите этапы построения.
2. На полученной модели найдите суммарную площадь сечения, приняв сторону куба за a .
3. Найдите площадь поверхности всей модели.
4. Выполните развертку полученной детали при $a = 6$ см и *развертку удаленной части*.
5. Предложите два своих варианта сечений куба тремя различными плоскостями.
6. Рассчитайте углы между плоскостями сечений:
 - а. Используя построение плоскости, перпендикулярной линии пересечения плоскостей сечений
 - б. Используя теорему косинусов для трехгранного угла.
7. Поместив модель в систему координат, составьте уравнение плоскости для каждого из сечений.
8. Составьте уравнения прямых, получившихся в результате пересечения данных плоскостей.
9. *Докажите, что все три прямые пересекаются в одной точке.*
10. Рассчитайте углы между плоскостями сечений:
 - а. Используя метод координат
11. Сопоставьте результаты расчетов в п.п. 5а, б и 9а. Сделайте выводы.
12. Вычислите объемы исходных геометрических тел, приняв сторону куба за a .
13. «Разбив» построенную модель на простейшие геометрические тела найдите объем данной модели.
14. «Разбив» построенную модель на пирамиды, найдите объем модели, используя «Метод векторов».
15. Сделайте вывод о преимуществах и недостатках применении методов п.п. 13 и 14 для данной модели.