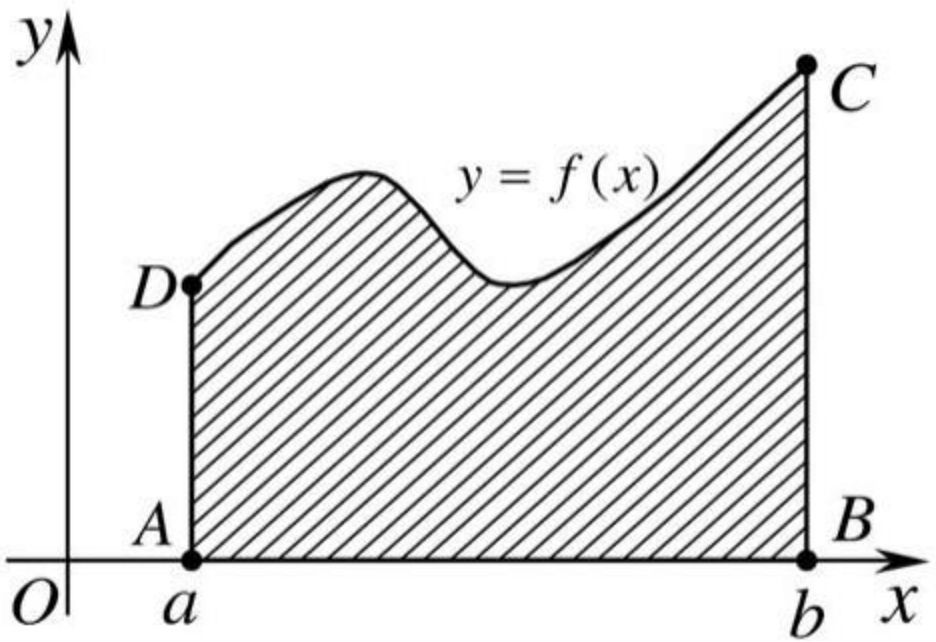
«Интеграл. Определенный интеграл. Свойства. Примеры. Применение определенного интеграла для нахождения длин, площадей и объемов»

Выполнила:
Студентка 10 группы, 1 курса
Котельникова Анна

Что такое интеграл?

Интеграл – одно из важнейших понятий математического анализа, которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и т.п., а также в задаче о восстановлении функции по её производной.



Определенный интеграл

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

где, $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$. Формула называется формулой Ньютона Лейбница.

Свойства определенного интеграла

1. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt =$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

4. Если функция $y=f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $a<b<c$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx.$$

5. (теорема о среднем). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(C) \cdot (b-a).$$

Формула Ньютона - Лейбница

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) – какая-либо ее первообразная на этом отрезке, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

которая называется формулой Ньютона-Лейбница. Разность F(b) – F(a) принято записывать следующим образом:

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

где символ называется знаком двойной подстановки. Таким образом, формулу (2) можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример 1. вычислить интеграл

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

Решение. Для подынтегральной функции $f(x)=x^2$ произвольная первообразная имеет вид

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+C$$

Так как в формуле Ньютона – Лейбница можно использовать любую первообразную, то для вычисления интеграла возьмем первообразную, имеющую наиболее простой вид:

$$F(x)=\frac{x^3}{3}$$

$$\int_1^3 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=9-\frac{1}{3}=8\frac{1}{3}$$

Вычисление длин дуг с помощью определенного интеграла.

Если x=x(t), y=y(t), $t\in[t_1,t_2]$ – параметрические уравнения гладкой кривой, то длина ее дуги равна

$$l=\int_a^b \sqrt{x^2(t)+y^2(t)dx}$$

где x(t) и y(t) - производные функции x(t) и y(t) соответственно, по параметру t.

Существует аналогичная формула для длины дуги пространственной гладкой кривой.

x=x(t), y=y(t)z=z(t), $t\in [t_1,t_2]$:

$$l=\int_a^b \sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)dx}$$

Пример. Вычислить $$I = \int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy$$

Область интегрирования – часть смещенного круга, ограниченная кривыми

$$x = 0, x = 1, y = x,\ \ y = 1 + \sqrt{1-x^2}, x^2 + (y-1)^2 = 1,$$

$$x^2 + y^2 = 2y \ \rightarrow \ \ r = 2sin\varphi$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2sin\varphi} r^2 dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin^3\varphi d\varphi = -\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2\varphi) dcos\varphi = \frac{20}{9\sqrt{2}}$$

Вычисление площади с помощью интеграла

Криволинейная трапеция – фигура, ограниченная отрезком [a,b] оси Ox, отрезками прямых x=a, x=b и графиком непрерывной на отрезке [a,b] функции y=f(x), где f(x)≥0 при x €[a,b].

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Пример 1: Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезками x=a, x=b, осью Ox и графиком функции y=f(x), если a=2, b=3, $f(x)=5x-x^2$

$$S = \int_2^3 \left(5x - x^2\right)dx = \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 = \left(\frac{5\cdot 3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{5\cdot 2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) = \left(\frac{45}{2} - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{20}{2} - \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \frac{45}{2} - \frac{27}{3} - \frac{20}{2} + \frac{8}{3} = \frac{25}{2} - \frac{19}{3} \approx 6{,}17$$

Вычисление объема с помощью определенного интеграла

Если тело заключено между двумя перпендикулярными к оси Ох плоскостями, проходящими через точки х= а и х=b, то

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Где S(x) – площадь сечения тела плоскостью, которая проходит через точку и перпендикулярна к оси Ох.

Пример. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох одной полуволны синусоиды y=sinx

Решение: Воспользуемся формулой для вычисления объема тела вращения получаем $V = \pi \int_0^\pi sin^2 x dx$ далее вычисляется определенный интеграл:

$$V = \pi \int_0^\pi sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - cos2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi dx - \int_0^\pi cos2x dx\right) = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{sin2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Спасибо за внимание!