Проверка корней тригонометрического уравнения

Учитель математики
МБОУ «Тумакская СОШ»
Сундутова К. М.

В основу метода проверки корней тригонометрического уравнения следует положить понятие периода уравнения.

Пусть дано, например, уравнение:

$$\frac{\cos 4x}{\sin 2x} = \frac{\sin 4x}{\cos 2x}$$

Легко заметить, что периодом этого уравнения может служить угол 180°.

Действительно,

cos 4(x+180°)=cos (4x + 2 *360°) = cos 4x,

sin 2(x+180°)= sin (2x + 360°)= sin 2x и т.д.

Чтобы найти период тригонометрического уравнения, достаточно найти периоды каждой функции, входящей в это уравнение , а затем отыскать их наименьшее общее кратное.

Чтобы найти, пользуясь этим правилом , период вышеприведенного тригонометрического уравнения, надо рассуждать следующим образом: так как период каждой из функций sin 4x и cos 4x равен $\frac{360°}{4}$ =90°, а период каждой из функций sin 2x и cos 2x есть 360°/2=180° , то периодом уравнения будет наименьшее общее кратное углов 90° и 180°, то есть

Пример. Решить уравнение:

$\cos 2x + 3\sin x = 2$ (1)

и проверить найденные корни.

Имеем:

$(1-2\sin^2 x)+3\sin x=2,$

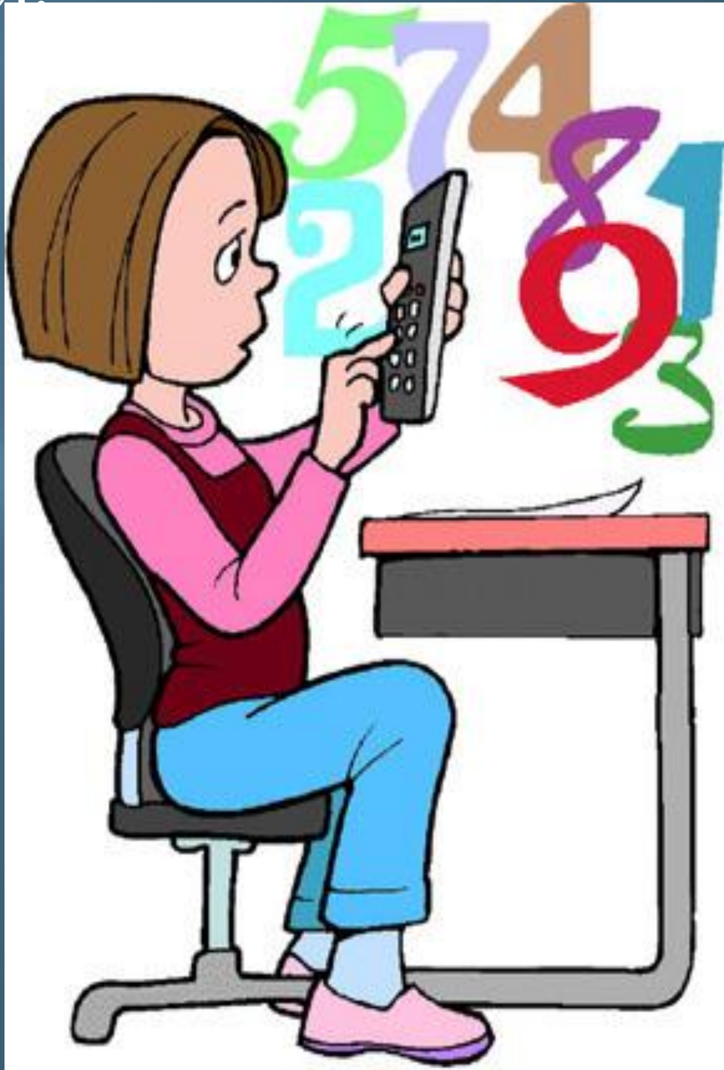
$2\sin^2 x - 3\sin x+1=0.$

Отсюда,

$\sin x1=1, \sin x2 =1/2$

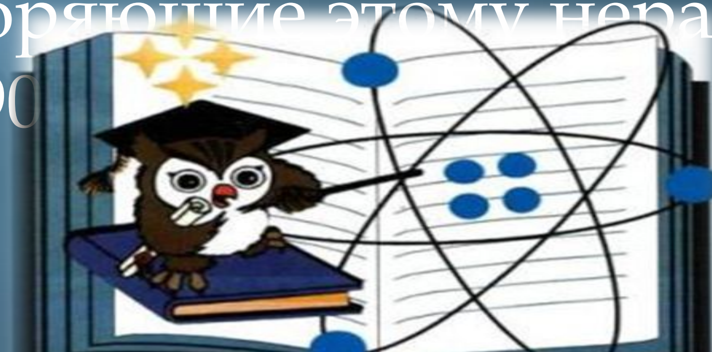
$x1= 360°n +90°,$

$x2= 180°n+ (-1)^n 30°$



Полученное множество корней бесконечно. Чтобы проверить все корни, достаточно произвести проверку только тех из них, которые лежат в пределах одного периода уравнения. Так как периодом уравнения (1) служит угол в 360°, то проверить нужно лишь корни, которые удовлетворяют неравенству: $-180° < x \leq 180°$.

Если придавать n различные целые значения (положительные, отрицательные или нуль), то мы обнаружим лишь три корня, удовлетворяющие этому неравенству, а именно: 90



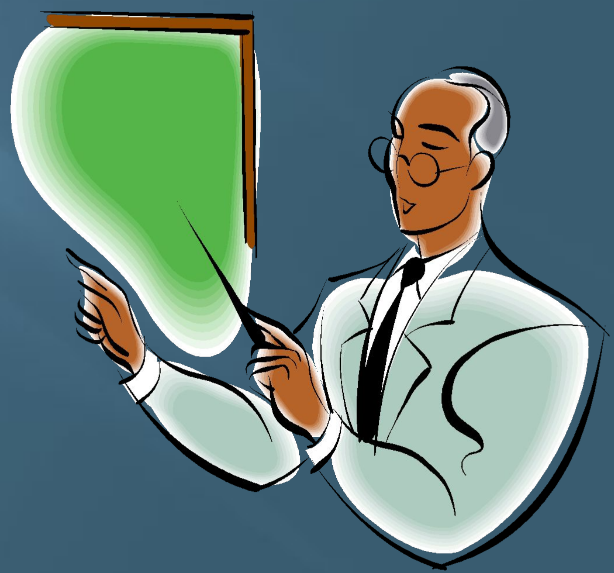
После подстановки их в исходное уравнение (1) найдем, что каждый из них обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Действительно,

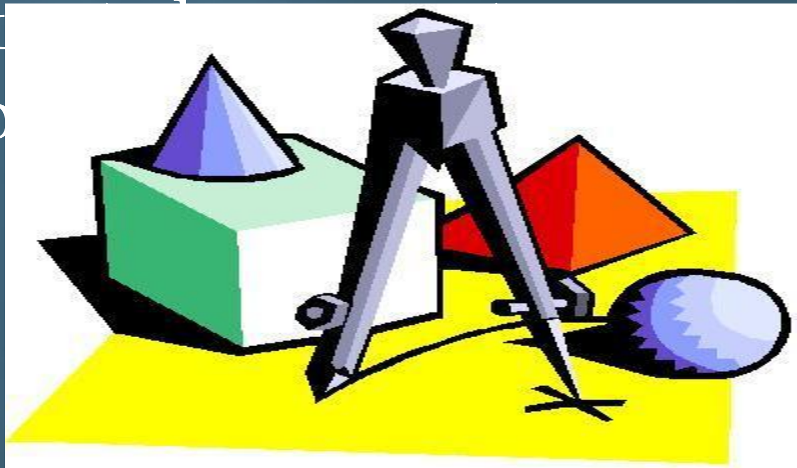
$\cos 180° + 3\sin 90° = -1 + 3 = 2,$

$\cos 60° + 3\sin 30° = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2,$

$\cos 300° + 3\sin 150° = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$



Есть одно затруднение, с которым сталкиваются: иногда общий вид углов, правильно найденный при решении тригонометрического уравнения, не совпадает с общим видом углов, указанным в ответе к задаче. Порой возникает сомнение в правильности своего решения. Рассеять это сомнение можно только посредством доказательства, что множество всех найденных корней и множество всех корней, определяемое об
ответе задачи, между собо



Допустим, что при решении уравнения

$$\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2}$$

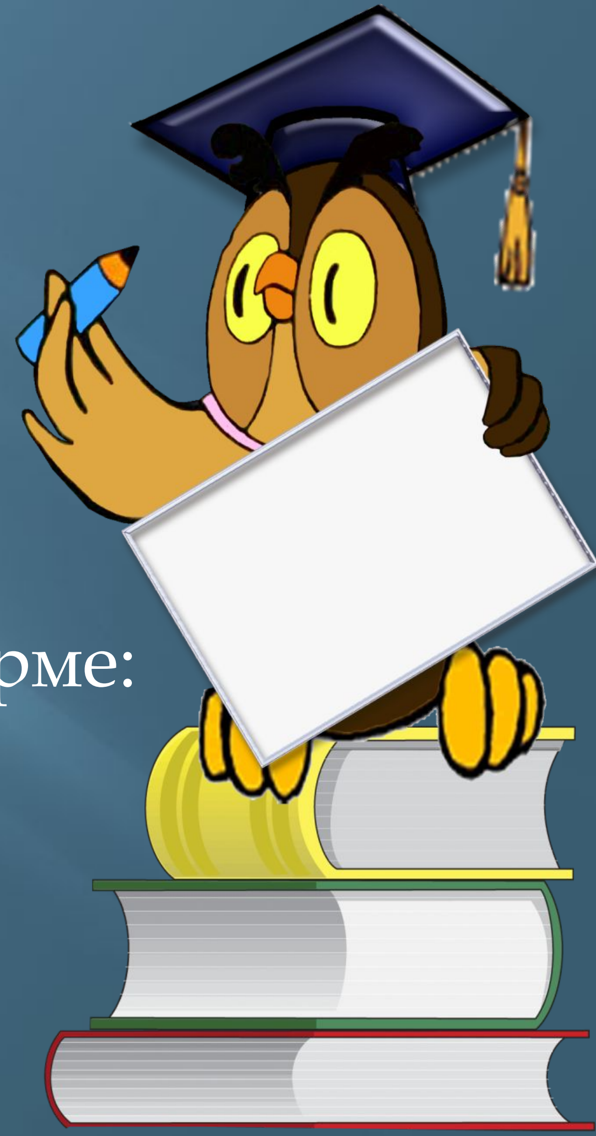
получены корни:

$x1 = 720°n \pm 120°$,

$x2 = 360°(2n+1)$,

а ответ задачи дан в другой форме:

$x = 120°(2n+1)$.



Для того, чтобы убедиться в равносильности того и другого ответа, найдем сначала период уравнения (он равен 720°), а затем отыщем в обоих случаях корни , лежащие в пределах этого периода, то есть удовлетворяющие неравенству:

$$-360° < x \leq 360°.$$

Легко убедиться, что такими корнями в обоих случаях будут лишь ± 120° и 360°. Совпадение корней, лежащих в пределах одного перио зывает на равносильнос