

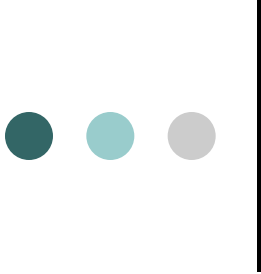
**Системы обыкновенных
дифференциальных уравнений**

***Системы линейных
дифференциальных уравнений***

Дана система n уравнений с n неизвестными функциями $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

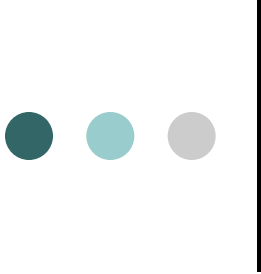
Нормальная система дифференциальных уравнений (1) называется линейной, если функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, входящие в правые части, линейны относительно неизвестных функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \quad (3)$$



Система (3) называется **неоднородной**, если хотя бы одна из функций $b_i(x)$ ($i=1 \div n$) не равна тождественно нулю.

□ Система (3) называется **однородной**, если все функции $b_i(x) \equiv 0$ ($\forall i = 1 \div n$)



Запись системы (3) в матричной форме.

Обозначим

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \boxtimes \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \boxtimes & a_{1n}(x) \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1}(x) & \boxtimes & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \boxtimes \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

Коротко: $Y' = AY + B$

Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Пусть в системе (3) все коэффициенты a_{ij} ($i, j = 1 \div n$) постоянны и $b_i \equiv 0$ ($i = 1 \div n$).

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \boxed{} + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \boxed{} + a_{2n}y_n \\ \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \boxed{} + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (4)$$

Или в векторной форме $Y' = AY$.

Какой вид имеет общее решение системы (4)?



Пусть

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_1^{[1]}(x) \\ y_2^{[1]}(x) \\ \boxtimes \\ y_n^{[1]}(x) \end{pmatrix} - \text{одно решение системы (4),}$$

$$Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_1^{[2]}(x) \\ y_2^{[2]}(x) \\ \boxtimes \\ y_n^{[2]}(x) \end{pmatrix} - \text{второе решение системы (4)}$$

$$Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_1^{[n]}(x) \\ y_2^{[n]}(x) \\ \boxtimes \\ y_n^{[n]}(x) \end{pmatrix} - n\text{-ое решение системы (4)}$$

Определитель Вронского системы решений

В случае системы определителем Вронского для функций $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ называется:

$$W(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \begin{vmatrix} y_1^{[1]} & y_2^{[1]} & \dots & y_n^{[1]} \\ y_1^{[2]} & y_2^{[2]} & \dots & y_n^{[2]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{[n]} & y_2^{[n]} & \dots & y_n^{[n]} \end{vmatrix}$$

Система решений $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ образует ФСР на $[a; b]$, если $W(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \neq 0 \forall x \in [a; b]$



Теорема о структуре общего решения системы $Y' = AY$

Если решения $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ образуют ФСР, то общее решение этой системы находится по формуле:

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \dots + C_n Y_n(x), \text{ где}$$

C_1, C_2, \dots, C_n произвольные постоянные.



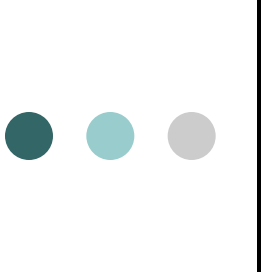
Пусть $n = 3$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ y_3' = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{cases} \quad (5)$$

Решаем (5) методом Эйлера. Ищем частное решение y_1, y_2, y_3 в виде:

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}; y_2 = \alpha_2 e^{kx}; y_3 = \alpha_3 e^{kx}$$

Определим постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k$ так, чтобы y_1, y_2, y_3 было решением системы (5):



После подстановки в (5) получим
следующую систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 k e^{kx} = a_{11} \alpha_1 e^{kx} + a_{12} \alpha_2 e^{kx} + a_{13} \alpha_3 e^{kx} \\ \alpha_2 k e^{kx} = a_{21} \alpha_1 e^{kx} + a_{22} \alpha_2 e^{kx} + a_{23} \alpha_3 e^{kx} \\ \alpha_3 k e^{kx} = a_{31} \alpha_1 e^{kx} + a_{32} \alpha_2 e^{kx} + a_{33} \alpha_3 e^{kx} \end{cases}$$

ИЛИ

$$\begin{cases} (a_{11} - k) \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + a_{13} \alpha_3 = 0 \\ a_{21} \alpha_1 + (a_{22} - k) \alpha_2 + a_{23} \alpha_3 = 0 \\ a_{31} \alpha_1 + a_{32} \alpha_2 + (a_{33} - k) \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Это система линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ имеет ненулевые решения, если ее основной определитель равен нулю:

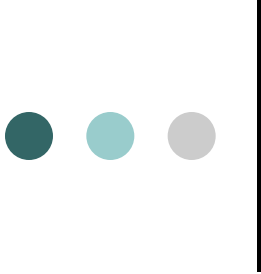


То есть

получаем характеристическое уравнение системы (5):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

Получим уравнение третьей степени относительно k .
Значит оно имеет 3 корня, действительных или комплексных, простых или кратных.



Первый случай: корни характеристического уравнения действительные и различные.

В этом случае мы получаем три следующих частных решения системы (5):

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} e^{k_1 x} \\ \alpha_2^{(1)} e^{k_1 x} \\ \alpha_3^{(1)} e^{k_1 x} \end{pmatrix}; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} e^{k_2 x} \\ \alpha_2^{(2)} e^{k_2 x} \\ \alpha_3^{(2)} e^{k_2 x} \end{pmatrix}; \quad Y_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(3)} e^{k_3 x} \\ \alpha_2^{(3)} e^{k_3 x} \\ \alpha_3^{(3)} e^{k_3 x} \end{pmatrix}$$

При этом найдем значения постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ как решение системы (6), полагая последовательно

$$k = k_1, k_2, k_3.$$

Можно показать, что $W(Y_1; Y_2; Y_3) \neq 0$.

Следовательно, $Y_1; Y_2; Y_3$ образуют фундаментальную систему решений для (5), и тогда общее решение системы (5) будет:

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + C_3 Y_3(x).$$

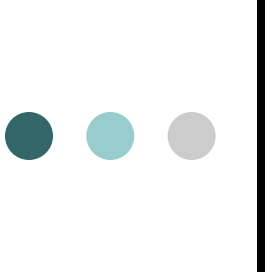
Или подробнее

$$y_1(x) = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 x} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 x} + C_3 \alpha_1^{(3)} e^{k_3 x};$$

$$y_2(x) = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 x} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 x} + C_3 \alpha_2^{(3)} e^{k_3 x};$$

$$y_3(x) = C_1 \alpha_3^{(1)} e^{k_1 x} + C_2 \alpha_3^{(2)} e^{k_2 x} + C_3 \alpha_3^{(3)} e^{k_3 x}.$$

Пример (первый способ)


$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} + 4(3x + y), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} + 12x + 4y,$$

$$4y = \frac{dx}{dt} - 5x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} + 12x + \frac{dx}{dt} - 5x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} - 7x = 0$$

$$x'' - 6x' - 7x = 0 \quad x = e^{kt}, k^2 - 6k - 7 = 0, k_1 = 7, k_2 = 1 \Rightarrow x = C_1 e^{7t} + C_2 e^{-t},$$

$$y = \frac{1}{4} \left(\frac{dx}{dt} - 5x \right) = \frac{1}{4} (7C_1 e^{7t} - C_2 e^{-t} - 5C_1 e^{7t} - 5C_2 e^{-t}) = \frac{1}{4} (2C_1 e^{7t} - 6C_2 e^{-t}) = \frac{1}{2} C_1 e^{7t} - \frac{3}{2} C_2 e^{-t}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{7t} + C_2 e^{-t} \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^{7t} - \frac{3}{2} C_2 e^{-t} \end{cases}$$

Пример (второй способ)

Дана та же система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases} . \text{ Ищем решение в виде: } x = \alpha_1 e^{kt}, y = \alpha_2 e^{kt},$$
$$x' = \alpha_1 k e^{kt}, y' = \alpha_2 k e^{kt},$$

$$\begin{cases} \alpha_1 k e^{kt} = 5\alpha_1 e^{kt} + 4\alpha_2 e^{kt} \\ \alpha_2 k e^{kt} = 3\alpha_1 e^{kt} + \alpha_2 e^{kt} \end{cases} \quad \begin{cases} (5-k)\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + (1-k)\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

$$k^2 - 6k - 7 = 0; k_1 = 7; k_2 = -1$$

$$\boxed{k_1 = 7} \quad (5-7)\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 \quad Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} e^{7t} \\ \frac{1}{2}\alpha_1^{(1)} e^{7t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{k_2 = -1} \quad (5+1)\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \quad \alpha_2 = -\frac{3}{2}\alpha_1 \quad Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} e^{-t} \\ -\frac{3}{2}\alpha_1^{(2)} e^{-t} \end{pmatrix}$$

Общее решение:

По теореме о структуре общего решения

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$$

$$Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} e^{7t} \\ \frac{1}{2} \alpha_1^{(1)} e^{7t} \end{pmatrix} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} e^{-t} \\ -\frac{3}{2} \alpha_1^{(2)} e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{7t} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{2} C_1 \alpha_1^{(1)} e^{7t} - \frac{3}{2} C_2 \alpha_1^{(2)} e^{-t} \end{cases}$$

Пусть $\tilde{C}_1 = C_1 \alpha_1^{(1)}$, $\tilde{C}_2 = C_2 \alpha_1^{(2)}$ тогда

$$\begin{cases} x(t) = \tilde{C}_1 e^{7t} + \tilde{C}_2 e^{-t} \\ y = \frac{1}{2} \tilde{C}_1 e^{7t} - \frac{3}{2} \tilde{C}_2 e^{-t} \end{cases}$$



Случай комплексных корней характеристического уравнения

Пусть корни характеристического уравнения - комплексно-сопряженные.

Y и \bar{Y} заменим на пару действительных решений:

$$\frac{Y + \bar{Y}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{Y - \bar{Y}}{2i}$$

Пример

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases} \quad y_1 = \alpha_1 e^{kx}, y_2 = \alpha_2 e^{kx},$$

$$\begin{cases} k\alpha_1 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2 \\ k\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-k)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (1-k)\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 3-k & -2 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-k)(1-k) + 2 = 0 \quad 3 - k - 3k + k^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow k^2 - 4k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = 2 \pm i$$

$$\boxed{k_1 = 2 + i} \quad \begin{cases} (3 - 2 - i)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (1 - 2 - i)\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - i)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (-1 - i)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - i)\alpha_1 = 2\alpha_2 \\ \alpha_1 = (1 + i)\alpha_2 \end{cases} \quad \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 1 + i \quad \Rightarrow \quad Y_1 = \begin{pmatrix} (1 + i)e^{(2+i)x} \\ e^{(2+i)x} \end{pmatrix}$$

Выделяем действительную и мнимую части

Получим:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} (1+i)e^{(2+i)x} \\ e^{(2+i)x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)e^{2x}(\cos x + i \sin x) \\ e^{2x}(\cos x + i \sin x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x}(\cos x + i \sin x + i \cos x - \sin x) \\ e^{2x}(\cos x + i \sin x) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2x}[\cos x - \sin x + i(\sin x + \cos x)] \\ e^{2x}(\cos x + i \sin x) \end{pmatrix};$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} e^{2x}(\cos x - \sin x) \\ e^{2x} \cos x \end{pmatrix}; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} e^{2x}(\sin x + \cos x) \\ e^{2x} \sin x \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$$

значит

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} e^{2x}(\cos x - \sin x) \\ e^{2x} \cos x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2x}(\sin x + \cos x) \\ e^{2x} \sin x \end{pmatrix}$$

Кратные корни характеристического уравнения

Например, корень характеристического уравнения имеет кратность 3, то решение нужно искать в виде:

$$\begin{cases} y_1 = (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2) e^{kx} \\ y_2 = (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2) e^{kx} \\ y_3 = (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 x^2) e^{kx} \end{cases}$$

Числа $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1 \div 3$) находятся методом неопределенных коэффициентов.

Пример

Дана система двух уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{характеристическое уравнение: } |A - kE| = \begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ -1 & 4-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-k)(4-k) + 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 3$$

Ищем решение системы в виде:

$$\begin{cases} y_1 = (\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x} \\ y_2 = (\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x} \end{cases}$$

Найдем производные и подставим в данную систему:

$$y_1' = 3(\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x} + \beta_1 e^{3x}, \quad y_2' = 3(\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x} + \beta_2 e^{3x},$$

$$\begin{cases} 3(\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x} + \beta_1 e^{3x} = 2(\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x} + (\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x} \\ 3(\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x} + \beta_2 e^{3x} = -(\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x} + 4(\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x} \end{cases}$$

Разделим на e^{3x}

Получим:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 3\beta_1x + \beta_1 = 2\alpha_1 + 2\beta_1x + \alpha_2 + \beta_2x \\ 3\alpha_2 + 3\beta_2x + \beta_2 = -\alpha_1 - \beta_1x + 4\alpha_2 + 4\beta_2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\beta_1x + 3\alpha_1 + \beta_1 = (2\beta_1 + \beta_2)x + 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\beta_2x + 3\alpha_2 + \beta_2 = (-\beta_1 + 4\beta_2)x - \alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases}$$

Приравняем коэффициенты при x :

$$\begin{cases} 3\beta_1 = 2\beta_1 + \beta_2 \\ 3\beta_2 = -\beta_1 + 4\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \beta_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

Приравняем коэффициенты при x^0 :

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_2 + \beta_2 = -\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases}$$



Получаем систему:

$$\beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2$$

$$\beta_2 = \beta_1$$

2 уравнения с 4-мя неизвестными, 2 из них являются свободными. Пусть $\alpha_1 = C_1, \beta_1 = C_2$ тогда

$$\beta_2 = C_2, \alpha_2 = C_1 + C_2.$$

Ответ:
$$\begin{cases} y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{3x} \\ y_2 = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^{3x} \end{cases}$$

Неоднородные системы дифференциальных уравнений

Найти общее решение:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - z = \cos x \\ \frac{dz}{dx} + y = 1 \end{cases} \quad (1)$$

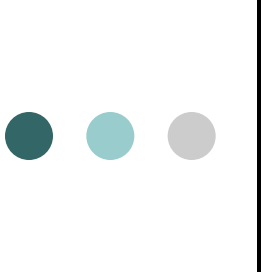
Соответствующая однородная система:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - z = 0 \\ \frac{dz}{dx} + y = 0 \end{cases}$$

Ее общее решение:
$$\begin{cases} y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$$

Подставляем эти значения в (1), считая неизвестными функциями x .

C_1, C_2



После приведения, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dx} \cos x + \frac{dC_2}{dx} \sin x = \cos x \\ -\frac{dC_1}{dx} \sin x + \frac{dC_2}{dx} \cos x = 1 \end{cases}$$

Решая ее относительно $\frac{dC_1}{dx}$, $\frac{dC_2}{dx}$ и затем интегрируя, получим

$$\frac{dC_1}{dx} = \cos^2 x - \sin x,$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \sin x \cos x + \cos x$$

$$C_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x + \cos x + C_1,$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \cos^2 x + \sin x + C_2$$



Подставляя найденные выражения в y и z , получим

Общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \cos x + 1 \\ z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{x}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \end{cases}$$