# Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

***Системы линейных дифференциальных уравнений***

Дана система $n$ уравнений с $n$ неизвестными функциями $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$

Нормальная система дифференциальных уравнений (1) называется линейной, если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, входящие в правые части, линейны относительно неизвестных функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) называется неоднородной, если хотя бы одна из функций $b_i(x)\,(i=1\div n)$ не равна тождественно нулю.

- Система (3) называется однородной, если все функции $b_i(x)\equiv 0\,(\forall i=1\div n)$

Запись системы (3) в матричной форме.

Обозначим

$$Y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \qquad A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \qquad B(x)=\begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y'(x)=A(x)Y(x)+B(x)}$$

Коротко: $Y'=AY+B$

# Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Пусть в системе (3) все коэффициенты $a_{ij}\ (i, j = 1 \div n)$ постоянны и $b_i \equiv 0 (i = 1 \div n)$.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (4)$$

Или в векторной форме $Y' = AY$.

Какой вид имеет общее решение системы ( 4)?

Пусть

$$Y_1(x)=\begin{pmatrix} y_1^{[1]}(x) \\ y_2^{[1]}(x) \\ \vdots \\ y_n^{[1]}(x) \end{pmatrix}$$ - одно решение системы (4),

$$Y_2(x)=\begin{pmatrix} y_1^{[2]}(x) \\ y_2^{[2]}(x) \\ \vdots \\ y_n^{[2]}(x) \end{pmatrix}$$ - второе решение системы (4)

$$Y_n(x)=\begin{pmatrix} y_1^{[n]}(x) \\ y_2^{[n]}(x) \\ \vdots \\ y_n^{[n]}(x) \end{pmatrix}$$ - *n*-ое решение системы (4)

# Определитель Вронского системы решений

В случае системы определителем Вронского для функций $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ называется:

$$W(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \begin{vmatrix} y_1^{[1]} & y_2^{[1]} & \cdots & y_n^{[1]} \\ y_1^{[2]} & y_2^{[2]} & \cdots & y_n^{[2]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{[n]} & y_2^{[n]} & \cdots & y_n^{[n]} \end{vmatrix}$$

Система решений $Y_1(x), Y_2(x), \cdots, Y_n(x)$ образует ФСР на $[a;b]$, если $W(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \neq 0 \ \forall x \in [a;b]$

# Теорема о структуре общего решения системы $Y' = AY$

Если решения $Y_1(x), Y_2(x), \cdots, Y_n(x)$ образуют ФСР, то общее решение этой системы находится по формуле:

$$\boxed{Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + \dots + C_nY_n(x)},$$ где

$C_1, C_2, \dots, C_n$ произвольные постоянные.

Пусть $n = 3$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ y_3' = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{cases} \quad (5)$$

Решаем (5) методом Эйлера. Ищем частное решение $y_1, y_2, y_3$ в виде:

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}; y_2 = \alpha_2 e^{kx}; y_3 = \alpha_3 e^{kx}$$

Определим постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k$ так, чтобы $y_1, y_2, y_3$ было решением системы (5):

После подстановки в (5) получим

следующую систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 k e^{kx} = a_{11}\alpha_1 e^{kx} + a_{12}\alpha_2 e^{kx} + a_{13}\alpha_3 e^{kx} \\ \alpha_2 k e^{kx} = a_{21}\alpha_1 e^{kx} + a_{22}\alpha_2 e^{kx} + a_{23}\alpha_3 e^{kx} \\ \alpha_3 k e^{kx} = a_{31}\alpha_1 e^{kx} + a_{32}\alpha_2 e^{kx} + a_{33}\alpha_3 e^{kx} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = 0 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + (a_{33} - k)\alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Это система линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ имеет ненулевые решения, если ее основной определитель равен нулю:

То есть

получаем характеристическое уравнение системы (5):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0$$

Получим уравнение третьей степени относительно *k*. Значит оно имеет 3 корня, действительных или комплексных, простых или кратных.

## Первый случай: корни характеристического уравнения действительные и различные.

В этом случае мы получаем три следующих частных решения системы (5):

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} e^{k_1 x} \\ \alpha_2^{(1)} e^{k_1 x} \\ \alpha_3^{(1)} e^{k_1 x} \end{pmatrix}; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} e^{k_2 x} \\ \alpha_2^{(2)} e^{k_2 x} \\ \alpha_3^{(2)} e^{k_2 x} \end{pmatrix}; \quad Y_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(3)} e^{k_3 x} \\ \alpha_2^{(3)} e^{k_3 x} \\ \alpha_3^{(3)} e^{k_3 x} \end{pmatrix}$$

При этом найдем значения постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ как решение системы (6), полагая последовательно

$k = k_1, k_2, k_3$.

Можно показать, что $W(Y_1;Y_2;Y_3) \neq 0$.

Следовательно, $Y_1;Y_2;Y_3$ образуют фундаментальную систему решений для (5), и тогда общее решение системы (5) будет:

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + C_3 Y_3(x).$$

Или подробнее

$$y_1(x) = C_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 x} + C_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 x} + C_3 \alpha_1^{(3)} e^{k_3 x};$$

$$y_2(x) = C_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 x} + C_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 x} + C_3 \alpha_2^{(3)} e^{k_3 x};$$

$$y_3(x) = C_1 \alpha_3^{(1)} e^{k_1 x} + C_2 \alpha_3^{(2)} e^{k_2 x} + C_3 \alpha_3^{(3)} e^{k_3 x}.$$

# Пример (первый способ)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} + 4(3x + y), \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} + 12x + 4y,$$

$$4y = \frac{dx}{dt} - 5x \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} + 12x + \frac{dx}{dt} - 5x, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} - 7x = 0$$

$$x'' - 6x' - 7x = 0 \quad x = e^{kt}, k^2 - 6k - 7 = 0, k_1 = 7, k_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = C_1e^{7t} + C_2e^{-t},$$

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - 5x\right) = \frac{1}{4}(7C_1e^{7t} - C_2e^{-t} - 5C_1e^{7t} - 5C_2e^{-t}) = \frac{1}{4}(2C_1e^{7t} - 6C_2e^{-t}) = \frac{1}{2}C_1e^{7t} - \frac{3}{2}C_2e^{-t}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = C_1e^{7t} + C_2e^{-t} \\ y = \dfrac{1}{2}C_1e^{7t} - \dfrac{3}{2}C_2e^{-t} \end{cases}}$$

# Пример (второй способ)

Дана та же система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

. Ищем решение в виде: $x = \alpha_1 e^{kt}, \; y = \alpha_2 e^{kt},$

$$x' = \alpha_1 k e^{kt}, \; y' = \alpha_2 k e^{kt},$$

$$\begin{cases} \alpha_1 k e^{kt} = 5\alpha_1 e^{kt} + 4\alpha_2 e^{kt} \\ \alpha_2 k e^{kt} = 3\alpha_1 e^{kt} + \alpha_2 e^{kt} \end{cases} \qquad \begin{cases} (5-k)\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + (1-k)\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

$$k^2 - 6k - 7 = 0; \; k_1 = 7; \; k_2 = -1$$

$$\boxed{k_1 = 7} \qquad (5-7)\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 \qquad Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} e^{7t} \\ \dfrac{1}{2}\alpha_1^{(1)} e^{7t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{k_2 = -1} \qquad (5+1)\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_2 = -\frac{3}{2}\alpha_1 \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} e^{-t} \\ -\dfrac{3}{2}\alpha_1^{(2)} e^{-t} \end{pmatrix}$$

## Общее решение:

По теореме о структуре общего решения

$$\boxed{Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2}$$

$$Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} e^{7t} \\ \frac{1}{2}\alpha_1^{(1)} e^{7t} \end{pmatrix} \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} e^{-t} \\ -\frac{3}{2}\alpha_1^{(2)} e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1\alpha_1^{(1)} e^{7t} + C_1\alpha_1^{(2)} e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{2} C_1\alpha_1^{(1)} e^{7t} - \frac{3}{2} C_1\alpha_1^{(2)} e^{-t} \end{cases}$$

Пусть $\tilde{C}_1 = C_1\alpha_1^{(1)}$ $,\tilde{C}_2 = C_2\alpha_1^{(2)}$ тогда

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \tilde{C}_1 e^{7t} + \tilde{C}_2 e^{-t} \\ y = \frac{1}{2}\tilde{C}_1 e^{7t} - \frac{3}{2}\tilde{C}_2 e^{-t} \end{cases}}$$

# Случай комплексных корней характеристического уравнения

Пусть корни характеристического уравнения - комплексно-сопряженные.

$Y$ и $\overline{Y}$ заменим на пару действительных решений:

$$\frac{Y+\overline{Y}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{Y-\overline{Y}}{2i}$$

# Пример

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases} \qquad y_1 = \alpha_1 e^{kx}, y_2 = \alpha_2 e^{kx},$$

$$\begin{cases} k\alpha_1 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2 \\ k\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-k)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (1-k)\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 3-k & -2 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-k)(1-k) + 2 = 0 \quad 3 - k - 3k + k^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow k^2 - 4k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = 2 \pm i$$

$$\boxed{k_1 = 2 + i} \qquad \begin{cases} (3-2-i)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (1-2-i)\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-i)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (-1-i)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-i)\alpha_1 = 2\alpha_2 \\ \alpha_1 = (1+i)\alpha_2 \end{cases} \qquad \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 1 + i \quad \Rightarrow \qquad Y_1 = \begin{pmatrix} (1+i)e^{(2+i)x} \\ e^{(2+i)x} \end{pmatrix}$$

Выделяем действительную и мнимую части

Получим:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} (1+i)e^{(2+i)x} \\ e^{(2+i)x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)e^{2x}(\cos x + i\sin x) \\ e^{2x}(\cos x + i\sin x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x}(\cos x + i\sin x + i\cos x - \sin x) \\ e^{2x}(\cos x + i\sin x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2x}[\cos x - \sin x + i(\sin x + \cos x)] \\ e^{2x}(\cos x + i\sin x) \end{pmatrix};$$

$$\tilde{Y}_1 = \begin{pmatrix} e^{2x}(\cos x - \sin x) \\ e^{2x}\cos x \end{pmatrix}; \quad \tilde{Y}_2 = \begin{pmatrix} e^{2x}(\sin x + \cos x) \\ e^{2x}\sin x \end{pmatrix}$$

Общее решение: $\boxed{Y = C_1\tilde{Y}_1 + C_2\tilde{Y}_2}$ значит

$$\boxed{Y = C_1\begin{pmatrix} e^{2x}(\cos x - \sin x) \\ e^{2x}\cos x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{2x}(\sin x + \cos x) \\ e^{2x}\sin x \end{pmatrix}}$$

# Кратные корни характеристического уравнения

Например, корень характеристического уравнения имеет кратность 3, то решение нужно искать в виде:

$$\begin{cases} y_1 = (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_3 x^2)e^{kx} \\ y_2 = (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_3 x^2)e^{kx} \\ y_3 = (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 x^2)e^{kx} \end{cases}$$

Числа $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \ (i = 1 \div 3)$ находятся методом неопределенных коэффициентов.

# Пример

Дана система двух уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, характеристическое уравнение: $|A - kE| = \begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ -1 & 4-k \end{vmatrix} = 0$

$$(2-k)(4-k) + 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 3$$

Ищем решение системы в виде:

$$\begin{cases} y_1 = (\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x} \\ y_2 = (\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x} \end{cases}$$

Найдем производные и подставим в данную систему:

$$y_1' = 3(\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x} + \beta_1 e^{3x}, \quad y_2' = 3(\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x} + \beta_2 e^{3x},$$

$$\begin{cases} 3(\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x} + \beta_1 e^{3x} = 2(\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x} + (\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x} \\ 3(\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x} + \beta_2 e^{3x} = -(\alpha_1 + \beta_1 x)e^{3x} + 4(\alpha_2 + \beta_2 x)e^{3x} \end{cases}$$

Разделим на $e^{3x}$

Получим:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 3\beta_1 x + \beta_1 = 2\alpha_1 + 2\beta_1 x + \alpha_2 + \beta_2 x \\ 3\alpha_2 + 3\beta_2 x + \beta_2 = -\alpha_1 - \beta_1 x + 4\alpha_2 + 4\beta_2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\beta_1 x + 3\alpha_1 + \beta_1 = (2\beta_1 + \beta_2)x + 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\beta_2 x + 3\alpha_2 + \beta_2 = (-\beta_1 + 4\beta_2)x - \alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases}$$

Приравняем коэффициенты при $x$ :

$$\begin{cases} 3\beta_1 = 2\beta_1 + \beta_2 \\ 3\beta_2 = -\beta_1 + 4\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \beta_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

Приравняем коэффициенты при $x^0$:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_2 + \beta_2 = -\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases}$$

Получаем систему:

$$\beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2$$
$$\beta_2 = \beta_1$$

2 уравнения с 4-мя неизвестными, 2 из них являются свободными. Пусть $\alpha_1 = C_1, \beta_1 = C_2$ тогда

$$\beta_2 = C_2, \alpha_2 = C_1 + C_2.$$

Ответ: $\begin{cases} y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{3x} \\ y_2 = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^{3x} \end{cases}$

# Неоднородные системы дифференциальных уравнений

Найти общее решение:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - z = \cos x \\ \dfrac{dz}{dx} + y = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Соответствующая однородная система: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - z = 0 \\ \dfrac{dz}{dx} + y = 0 \end{cases}$

Ее общее решение: $\begin{cases} y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$ .

Подставляем эти значения в (1), считая $C_1, C_2$ неизвестными функциями *x*.

После приведения, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dx}\cos x + \dfrac{dC_2}{dx}\sin x = \cos x \\ -\dfrac{dC_1}{dx}\sin x + \dfrac{dC_2}{dx}\cos x = 1 \end{cases}$$

Решая ее относительно $\dfrac{dC_1}{dx}, \dfrac{dC_2}{dx}$ и затем интегрируя, получим

$$\frac{dC_1}{dx} = \cos^2 x - \sin x,$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \sin x \cos x + \cos x$$

$$C_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x \cos x + \cos x + \tilde{C}_1,$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \sin x + \tilde{C}_2$$

Подставляя найденные выражения в *y* и *z,* получим

Общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{x}{2}\cos x + 1 \\ z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \dfrac{x}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x \end{cases}$$