КОМБИНАТОРИКА

Барынина Марина Витальевна

ВСТАВЬТЕ ПРОПУЩЕННОЕ СЛОВО

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке.

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ из n элементов по k $(k \le n)$ называется любое множество, состоящее из k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ из n элементов по k называется любое множество из k элементов, выбранных из n элементов.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ
(ПОВТОРЯЕМ ФОРМУЛЫ)

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

ПЕРЕСТАНОВКИ

$$\boxed{P_n = n!}$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

СОЧЕТАНИЯ

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$$

КАК РАЗЛИЧИТЬ ЗАДАЧИ НА РАЗМЕЩЕНИЕ, ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЕ?

Типичная задача

Решаемая с помощью **перестановок:** Сколькими способами можно ***n*** различных предметов расставить на ***n*** различных местах?

Решаемая с помощью **размещений:** Сколькими способами можно выбрать из ***n*** различных предметов ***k*** предметов и разместить их на ***k*** различных местах?

Решаемая с помощью **сочетаний:** Сколькими способами можно выбрать ***k*** из ***n*** различных предметов?

АЛГОРИТМ ДЕЙСТВИЙ

ЗАДАЧА № 1.

СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ МОГУТ ВСТАТЬ В ОЧЕРЕДЬ В БИЛЕТНУЮ КАССУ 5 ЧЕЛОВЕК?

1. **6 способов**
2. **50 способов**
3. **100 способов**
4. **120 способов**

ЗАДАЧА № 1

Решение:

Различные варианты n человек в очереди отличаются один от другого только порядком расположения людей, т.е. являются различными перестановками из n элементов.

Пять человек могут встать в очередь

$P5 = 5! = 120$ различными способами.

Ответ: 120 способами.

ЗАДАЧА № 2

СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ 4 ЧЕЛОВЕКА МОГУТ РАЗМЕСТИТСЯ НА ЧЕТЫРЕХМЕСТНОЙ СКАМЕЙКЕ?

1. 4 способами
2. 16 способами
3. 24 способами
4. 48 способами

ЗАДАЧА № 2

Решение:

Количество человек равно количеству мест на скамейке, поэтому количество способов размещения равно числу перестановок из 4 элементов:

Р = 4! = 24

Можно рассуждать по правилу произведения: для первого человека можно выбрать любое из 4 мест, для второго – любое из 3 оставшихся, для третьего – любое из 2 оставшихся, последний займет 1 оставшееся место; всего 4·3·2·1 = 24.

Ответ: 24 способами.

ЗАДАЧА № 3

НАЙДИТЕ СУММУ ЦИФР ВСЕХ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ МОЖНО СОСТАВИТЬ ИЗ ЦИФР 1, 3, 5, 7 (БЕЗ ИХ ПОВТОРЕНИЯ).

1 **380**

2 **16**

3 **105**

4 **384**

ЗАДАЧА № 3

Решение:

Каждое четырехзначное число, составленное из цифр 1, 3, 5, 7 (без повторения), имеет сумму цифр, равную 1+3+5+7=16.

Из этих цифр можно составить $P_4 = 4! = 24$ различных числа, отличающихся только порядком цифр.

Сумма цифр всех этих чисел равна

16 х 24 = 384.

Ответ: 384.

ЗАДАЧА № 4

СКОЛЬКО СУЩЕСТВУЕТ СПОСОБОВ ВЫБРАТЬ ТРОИХ РЕБЯТ ИЗ ШЕСТЕРЫХ ЖЕЛАЮЩИХ ДЕЖУРИТЬ ПО СТОЛОВОЙ?

1 **20**

2 **720**

3 **6**

4 **18**

ЗАДАЧА № 4

Решение:

Количество сочетаний из 6 по 3 (<u>порядок выбора не имеет значения</u>) равно:

$$C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

Ответ: 20 способов

ЗАДАЧА № 5

В КЛАССЕ 9 ЧЕЛОВЕК УСПЕШНО ЗАНИМАЮТСЯ МАТЕМАТИКОЙ. СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ МОЖНО ВЫБРАТЬ ИЗ НИХ ДВОИХ УЧАЩИХСЯ ДЛЯ УЧАСТИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ?

1 2

2 18

3 81

4 36

ЗАДАЧА № 5

Решение:

Выбираем двух учащихся из 9, <u>порядок выбора не имеет значения</u> (оба выбранных пойдут на олимпиаду как равноправные); количество способов выбора равно числу <u>сочетаний из 9 по 2</u>:

$$C_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!2!} = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 36$$

Ответ: 36 способов

ЗАДАЧА № 6

В КЛАССЕ УЧАТСЯ 18 МАЛЬЧИКОВ И 14 ДЕВОЧЕК. ДЛЯ УБОРКИ ТЕРРИТОРИИ ШКОЛЫ ТРЕБУЕТСЯ ВЫДЕЛИТЬ ЧЕТЫРЕХ МАЛЬЧИКОВ И ТРЕХ ДЕВОЧЕК. СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ ЭТО МОЖНО СДЕЛАТЬ?

1. **840**
2. **400400**
3. **1113840**
4. **111000000**

ЗАДАЧА № 6

Решение:

Нужно сделать два выбора: 4 мальчика из 18 (всего способов) и 3 девочки из 14 (всего способов); порядок выбора значения не имеет (все идущие на уборку равноправны). Каждый вариант выбора мальчиков может сочетаться с каждым выбором девочек, поэтому по правилу произведения общее число способов выбора равно:

$$C_{18}^{4} \cdot C_{14}^{3} = \frac{18!}{(18-4)! \cdot 4!} \cdot \frac{14!}{(14-3)! \cdot 3!} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1113840$$

Ответ: 1113840 способов

ЗАДАЧА № 7

ИЗ 25 УЧАСТНИКОВ СОБРАНИЯ НАДО ВЫБРАТЬ ПРЕДСЕДАТЕЛЯ И СЕКРЕТАРЯ. СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ ЭТО МОЖНО СДЕЛАТЬ?

1. 140
2. 600
3. 625
4. 2

ЗАДАЧА № 7

Решение:

Из 25 элементов выбираем 2, причем порядок выбора имеет значение.

Количество способов выбора равно

$$A_{25}^{2} = \frac{25!}{(25-2)!} = 25 \cdot 24 = 600$$

Ответ: 600 способов

ЗАДАЧА № 8

СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ 5 ВЫПУСКНИКОВ, СДАЮЩИХ ГИА, МОГУТ ЗАНЯТЬ МЕСТА В АУДИТОРИИ, В КОТОРОЙ СТОИТ 15 ОДНОМЕСТНЫХ СТОЛОВ?

1. 36
2. 360
3. 360360
4. 3636

ЗАДАЧА № 8

Решение:

Выбираем 5 столов для выпускников из 15 имеющихся: (порядок выбора учитывается (кто сидит около преподавателя, кто на последней парте, кто около окна и т. п.):

$$A_{15}^{5} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$$

Ответ: 360 360 способов

ЗАДАЧА № 9

НА СОРЕВНОВАНИЯХ ПО ЛЕГКОЙ АТЛЕТИКЕ ПРИЕХАЛА КОМАНДА ИЗ 12 СПОРТСМЕНОК. СКОЛЬКИМИ СПОСОБАМИ ТРЕНЕР МОЖЕТ ОПРЕДЕЛИТЬ, КТО ИЗ НИХ ПОБЕЖИТ В ЭСТАФЕТЕ 4×100 М НА ПЕРВОМ, ВТОРОМ, ТРЕТЬЕМ И ЧЕТВЕРТОМ ЭТАПАХ?

1 11880

2 48

3 144

4 11800

ЗАДАЧА № 9

Решение:

Выбор из 12 по 4 с учетом порядка.

$$A_{12}^{4} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880$$

Ответ: 11 880

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

I вариант	II вариант
Задание 1.Сколькими способами можно разместить во время проведения итоговой аттестации по алгебре 15 учащихся девятого класса за 15 столами так, чтобы за каждым сидело по одному ученику?	Задание 1.Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу 14 человек?
Задание 2. Сколькими способами могут быть распределены первая, вторая и третья премии между 10 участниками конкурса?	Задание 2. Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 15 участниц забега на дистанции 100 метров?
Задание 3. Школьному координатору по проведению итоговой аттестации учащихся 11 классов необходимо разместить в период с 1 по 10 июня три экзамена из семи, которые были определены выбором учащихся.	Задание 3. Школьному координатору по проведению итоговой аттестации учащихся 9 классов необходимо разместить в период с 1 по 10 июня два экзамена из семи, которые были определены выбором учащихся.

САМОПРОВЕРКА

I вариант	II вариант
Задание 1. Решение: Воспользуемся определением и формулой <u>перестановок:</u> $P_{15} = 15! = 1307674368000$. Ответ: 1 307 674 368 000 способов.	Задание 1. Решение: Воспользуемся определением и формулой перестановок: $P_{14} = 14! = 87\ 178\ 291\ 200$. Ответ: 87 178 291 200 способов.
Задание 2. Выбираем трех призеров из 10 участников конкурса с учетом порядка (кому какая премия, т. е. задача на размещения): $A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ Ответ: 720 способов	Задание 2. Выбираем трех призеров из 15 участников конкурса с учетом порядка (кому какая премия, т. е. задача на размещения): $A_{15}^{3} = \frac{15!}{(15-3)!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ Ответ: 2730 способов
Задание 3. В данной задаче, например, геометрия, физика, химия и всевозможные перестановки являются одним вариантом, значит, для решения воспользуемся формулой сочетаний: $C_{7}^{3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ Ответ: 35	Задание 3. В данной задаче, например, геометрия, физика, химия и всевозможные перестановки являются одним вариантом, значит, для решения воспользуемся формулой сочетаний: $C_{7}^{2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$ Ответ:21.

ОЦЕНКА СВОЕЙ РАБОТЫ

- «5» - правильно выполнены все три задания.
- «4» - правильно выполнены два задания.
- «3» - правильно выполнено только одно задание.
- «2» - все задания выполнены неверно или не выполнены.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Придумайте и решите

по одной задачи на каждую из тем

- Перестановки
- Размещения
- сочетания

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ