МЕТОД КООРДИНАТ В ЗАДАЧАХ С2

Нахождение углов.

В задаче С2 рассматриваются многогранники,
на основе которых,
как правило, нужно найти одну из следующих величин:

- *Угол между скрещивающимися прямыми* —
- это угол между двумя прямыми, которые
- пересекаются в одной точке и параллельны данным прямым.
- *Угол между прямой и плоскостью* —
- это угол между самой прямой и
- ее проекцией на данную плоскость.
- *Угол между двумя плоскостями* —
- это угол между прямыми, которые лежат в данных плоскостях и перпендикулярны линии пересечения этих плоскостей.

Прямые всегда задаются двумя точками на поверхности или
внутри многогранника, а плоскости — тремя.
Сами многогранники всегда задаются длинами своих граней.

Для того, чтобы использовать метод координат, надо хорошо знать формулы. Их три:

- Главная формула — косинус угла φ между
- векторами a = (x_1; y_1; z_1) и b = (x_2; y_2; z_2):

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

- Уравнение плоскости в трехмерном пространстве: Ax + By + Cz + D = 0, где A, B, C и D — действительные числа, причем, если плоскость проходит через начало координат, D = 0. А если не проходит, то D = 1.

- Вектор, перпендикулярный к плоскости Ax + By + Cz + D = 0, имеет координаты: n = (A; B; C) и называется вектором нормали к плоскости.

Задача. Найти косинус угла между векторами a = (4; 3; 0) и b = (0; 12; 5).

Решение.

Поскольку координаты векторов нам даны, подставляем их в первую формулу:

$$\cos\varphi = \frac{4\cdot 0 + 3\cdot 12 + 0\cdot 5}{\sqrt{4^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+12^2+5^2}} = \frac{36}{5\cdot 13} = \frac{36}{65}$$

Ответ: 36/6
5

Задача.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки
$M = (2; 0; 1)$, $N = (0; 1; 1)$ и $K = (2; 1; 0)$,
если известно, что она не проходит через начало координат.

Решение.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, но,
поскольку искомая плоскость не проходит через начало координат — точку $(0; 0; 0)$
то положим $D = 1$.
Поскольку эта плоскость проходит через точки M, N и K, то координаты этих точек
должны обращать уравнение в верное числовое равенство.
Подставим вместо x, y и z координаты точки $M = (2; 0; 1)$. Имеем:

$$A \cdot 2 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow 2A + C + 1 = 0;$$

Аналогично, для точек $N = (0; 1; 1)$ и $K = (2; 1; 0)$ получим уравнения:

$$A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow B + C + 1 = 0;$$

$$A \cdot 2 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow 2A + B + 1 = 0;$$

Итак, у нас есть три уравнения и три неизвестных.
Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A + C + 1 = 0 \\ B + C + 1 = 0 \\ 2A + B + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} A = -0{,}25 \\ B = -0{,}5 \\ C = -0{,}5 \end{cases}$$

Получили, что уравнение плоскости имеет вид:
$-0{,}25x - 0{,}5y - 0{,}5z + 1 = 0.$

Ответ: $-0{,}25x - 0{,}5y - 0{,}5z + 1 = 0$

Задача.

Плоскость задана уравнением $7x - 2y + 4z + 1 = 0$. Найти координаты вектора, перпендикулярного данной плоскости.

Решение. Используя третью формулу, получаем $n = (7; -2; 4)$

Ответ: $n = (7; -2; 4)$

Вычисление координат векторов

Теорема. Чтобы найти координаты вектора,
надо из координат его конца вычесть координаты начала.

Задача. В пространстве расположены три точки, заданные своими координатами: A = (1; 6; 3), B = (3; − 1; 7) и C = (− 4; 3; − 2). Найти координаты векторов AB, AC и BC.

Решение. Рассмотрим вектор AB: его начало находится в точке A,
а конец — в точке B. Следовательно, чтобы найти его координаты,
надо из координат точки B вычесть координаты точки A:
AB = (3 − 1; − 1 − 6; 7 − 3) = (2; − 7; 4).
Аналогично, начало вектора AC — все та же точка A,
зато конец — точка C. Поэтому имеем:
AC = (− 4 − 1; 3 − 6; − 2 − 3) = (− 5; − 3; − 5).
Наконец, чтобы найти координаты вектора BC,
надо из координат точки C вычесть координаты точки B:
BC = (− 4 − 3; 3 − (− 1); − 2 − 7) = (− 7; 4; − 9).
Ответ: AB = (2; − 7; 4); AC = (− 5; − 3; − 5); BC = (− 7; 4; − 9)

Введение системы координат

Самое замечательное свойство этого метода
заключается в том,
что не имеет никакого значения,
как именно вводить систему координат.
Если все вычисления будут правильными,
то и ответ будет правильным.
Некоторые рекомендации,
как лучше ввести систему координат
для самых часто встречающихся
в задаче С2 многогранников:

1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Пусть начало координат находится в точке A, направление координатных осей показано на рис. 125. Тогда вершины куба имеют координаты:

$$A(0;0;0),\ B(0;a;0),\ C(a;a;0),$$
$$D(a;0;0),\ A_1(0;0;a),\ B_1(0;a;a),$$
$$C_1(a;a;a),\ D_1(a;0;a).$$

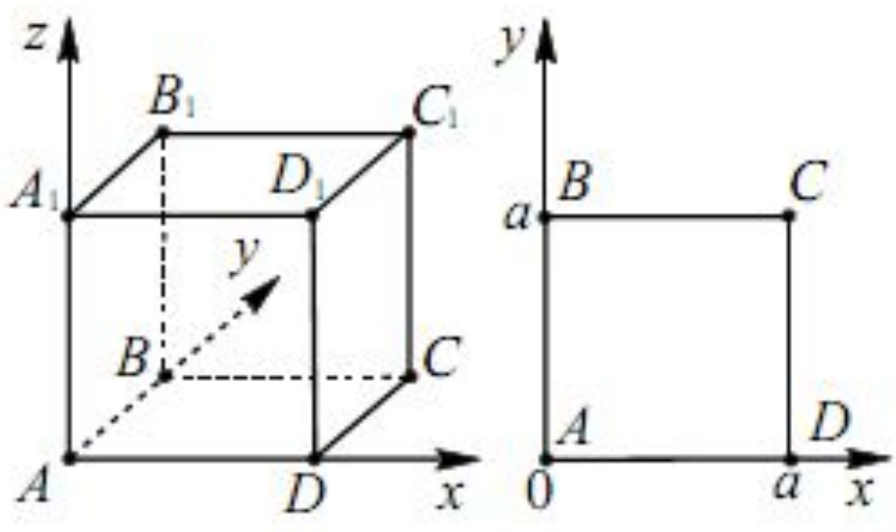


Рис. 125

2. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AC, ось y проходит через точку A перпендикулярно AC, ось z направлена вдоль бокового ребра AA_1 (см. рис. 126). Тогда вершины призмы имеют координаты:

$$A(0;0;0),\ B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ C(a;0;0),$$

$$A_1(0;0;b),\ B_1\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right),\ C_1(a;0;b).$$

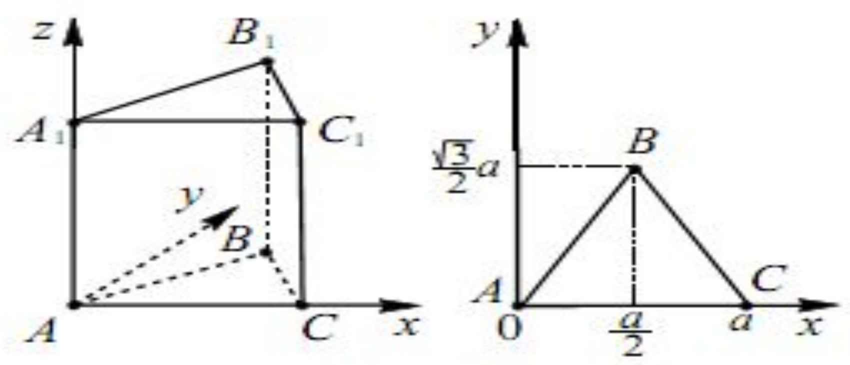


Рис. 126

3. Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AF, ось y проходит через точку A перпендикулярно AF, ось z направлена вдоль бокового ребра AA_1 (см. рис. 128). Тогда вершины призмы имеют координаты:

$$A(0;0;0),\ B\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ C\left(0;a\sqrt{3};0\right),$$

$$D(a;a\sqrt{3};0),\ E\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ F(a;0;0),$$

$$A_1(0;0;b),\ B_1\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right),\ C_1(0;a\sqrt{3};b),$$

$$D_1(a;a\sqrt{3};b),\ E_1\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right),\ F_1(a;0;b).$$

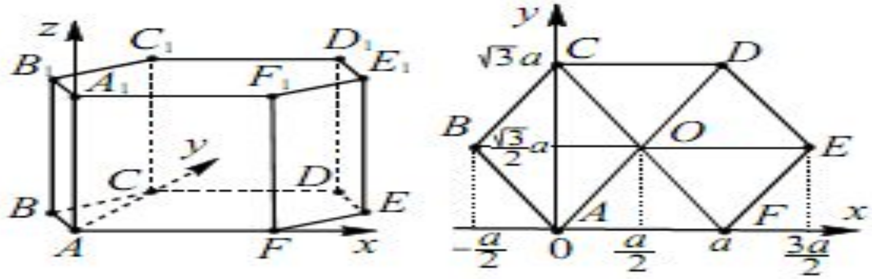


Рис. 128

4. Правильная треугольная пирамида $MABC$, сторона основания которой равна a, а высота h.

Обычно используют один из двух вариантов расположения системы координат.

4.1. Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AC, ось y проходит через точку A перпендикулярно AC, ось z проходит через точку A перпендикулярно плоскости ABC (см. рис. 130). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(0; 0; 0),\ B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right),\ C(a; 0; 0),$$

$$M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; h\right).$$

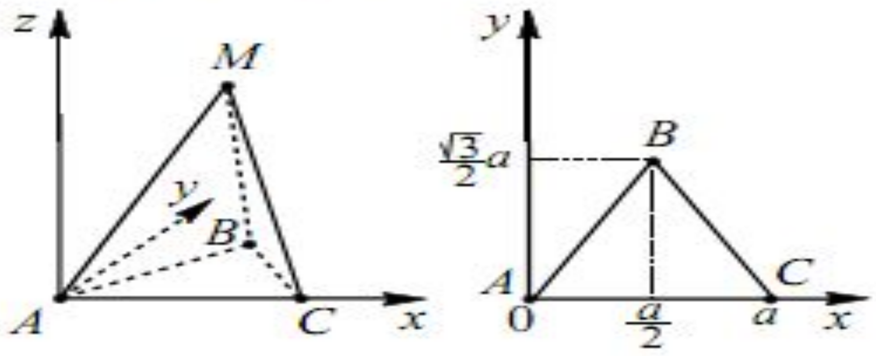


Рис. 130

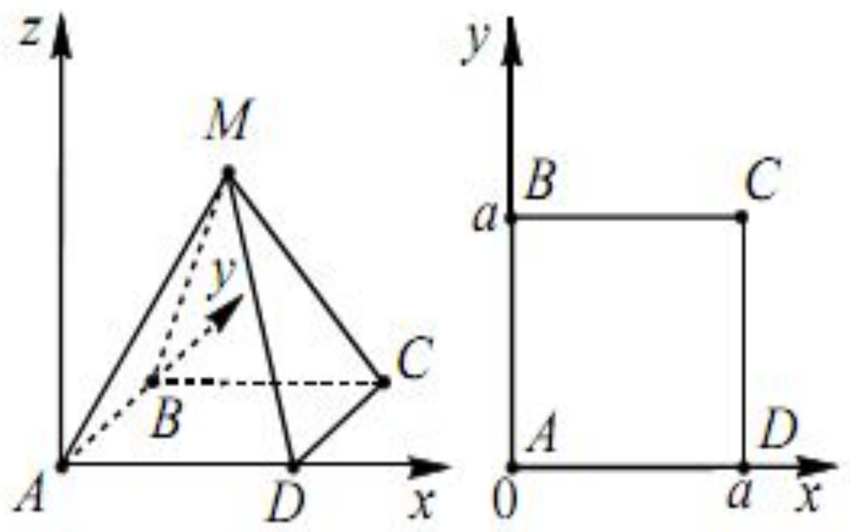
5. Правильная четырехугольная пирамида $MABC$, сторона основания которой равна a, а высота h.

Обычно используют один из двух вариантов расположения системы координат.

5.1. Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AD, ось y – вдоль ребра AB, ось z проходит через точку A перпендикулярно плоскости ABC (см. рис. 133). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(0;0;0),\ B(0;a;0),\ C(a;a;0),$$

$$D(a;0;0),\ M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right).$$



6. Правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$, сторона основания которой равна a, а высота h. Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AC, ось y проходит через точку A перпендикулярно AC, ось z проходит через точку A перпендикулярно плоскости ABC (см. рис. 135). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(0;0;0),\ B\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),$$

$$C\left(0;a\sqrt{3};0\right),\ D(a;a\sqrt{3};0),$$

$$E\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ F(a;0;0),\ M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right).$$

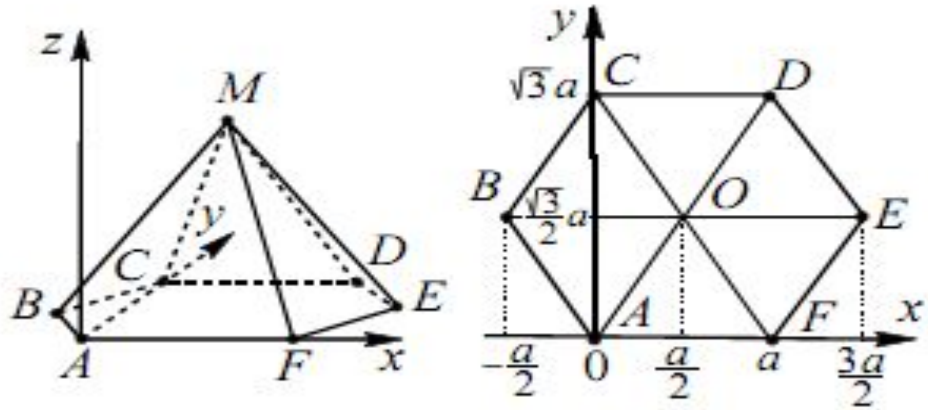


Рис. 135

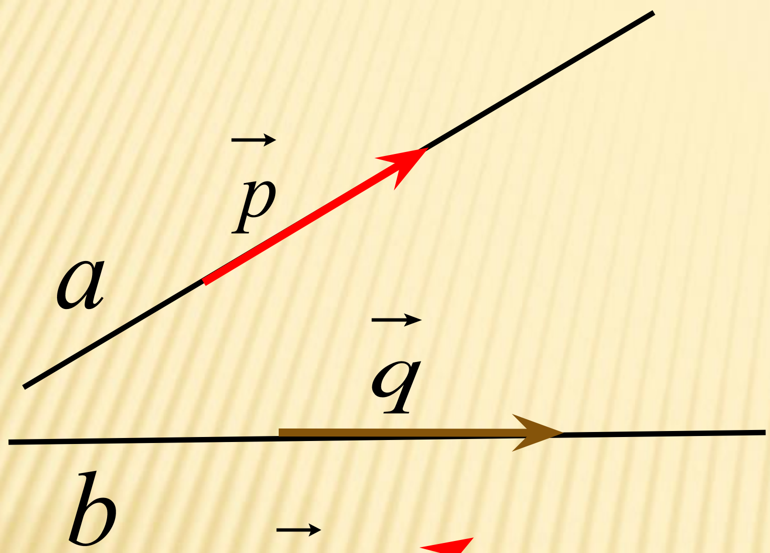
Решение задач методом координат упрощает знание опорной задачи:

4.4. Опорные задачи

1. Координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок M_1M_2 между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в отношении $M_1M : MM_2 = \lambda$, определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

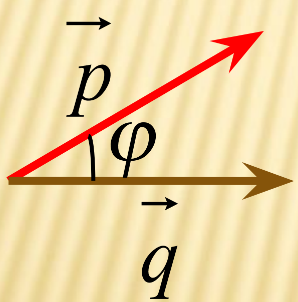
Угол между прямыми



$\vec{p}$ - направляющий вектор прямой ***a***

$\vec{q}$ - направляющий вектор прямой ***b***

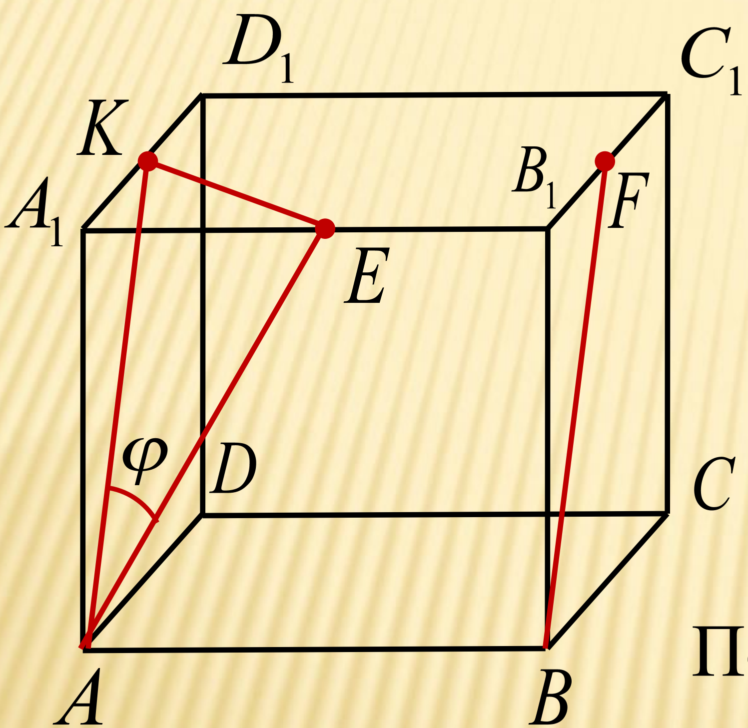
φ - угол между прямыми



$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\quad$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|\,x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AE и BF, где E – середина ребра A_1B_1, а F – середина ребра B_1C_1



Решение (1 способ)

К - середина A_1D_1

$$AK \parallel BF \qquad \angle KAE = \varphi$$

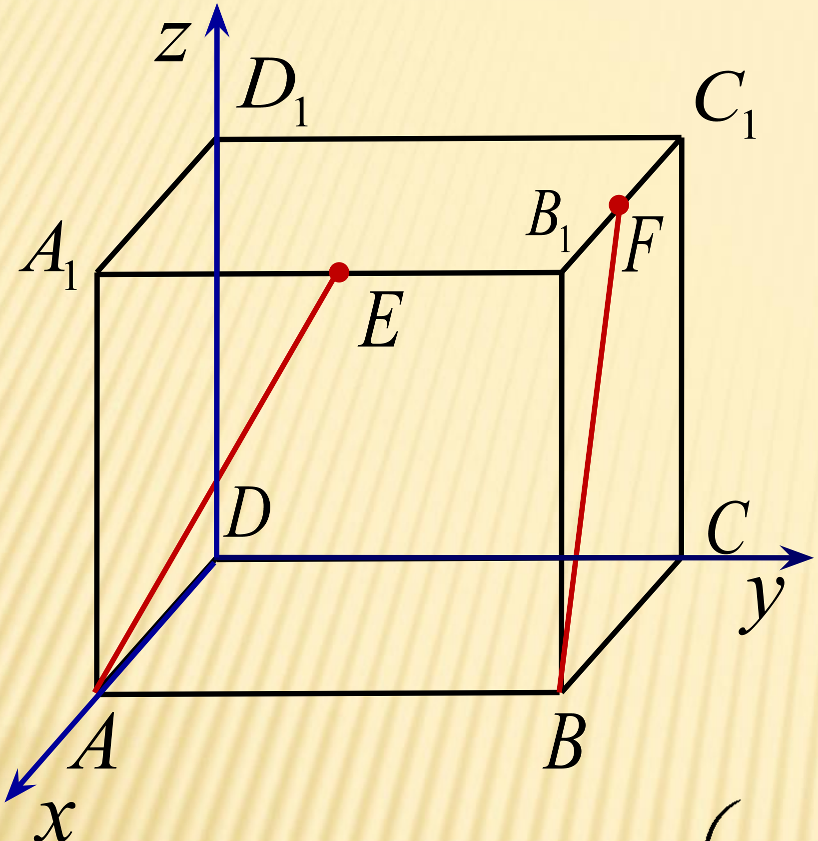
$$AE = AK = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad KE = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

По теореме косинусов для $\triangle AKE$

$$KE^2 = AE^2 + AK^2 - 2 \cdot AE \cdot AK \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad \varphi = \arccos 0{,}8$$

Решение (2 способ)



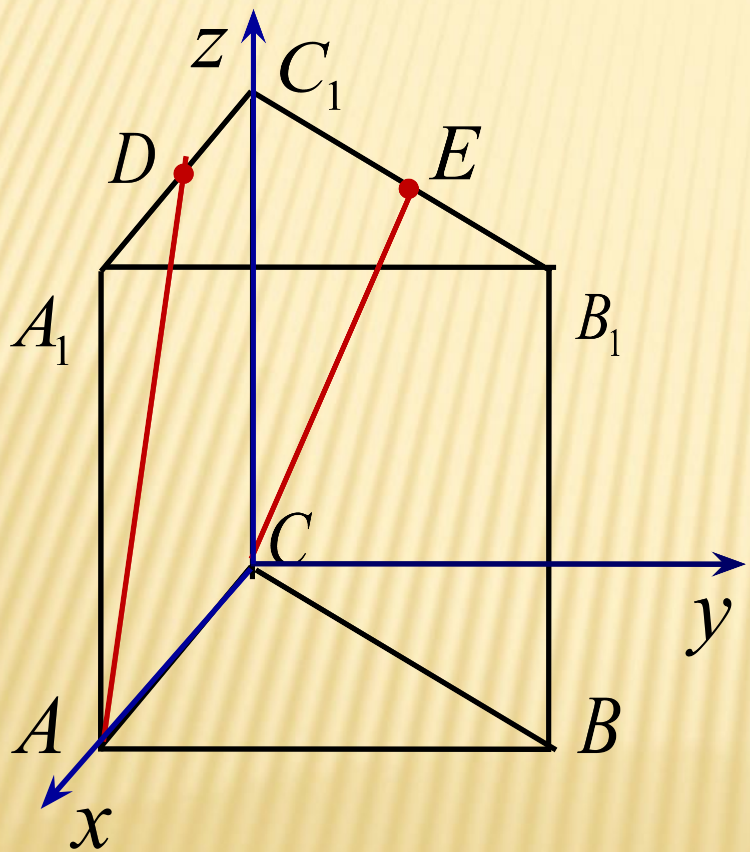
$$A(1;0;0) \qquad E\left(1;\frac{1}{2};1\right)$$

$$B(1;1;0) \qquad F\left(\frac{1}{2};1;1\right)$$

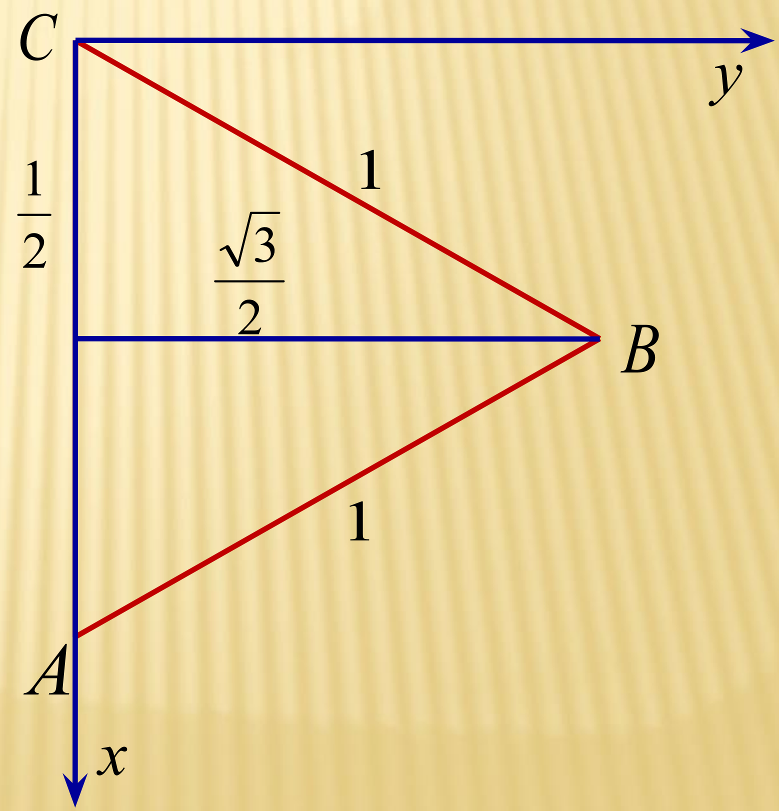
$$\overrightarrow{AE}\left\{0;\frac{1}{2};1\right\} \qquad \overrightarrow{BF}\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot 0+1\cdot 1\right|}{\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}} = 0,8$$

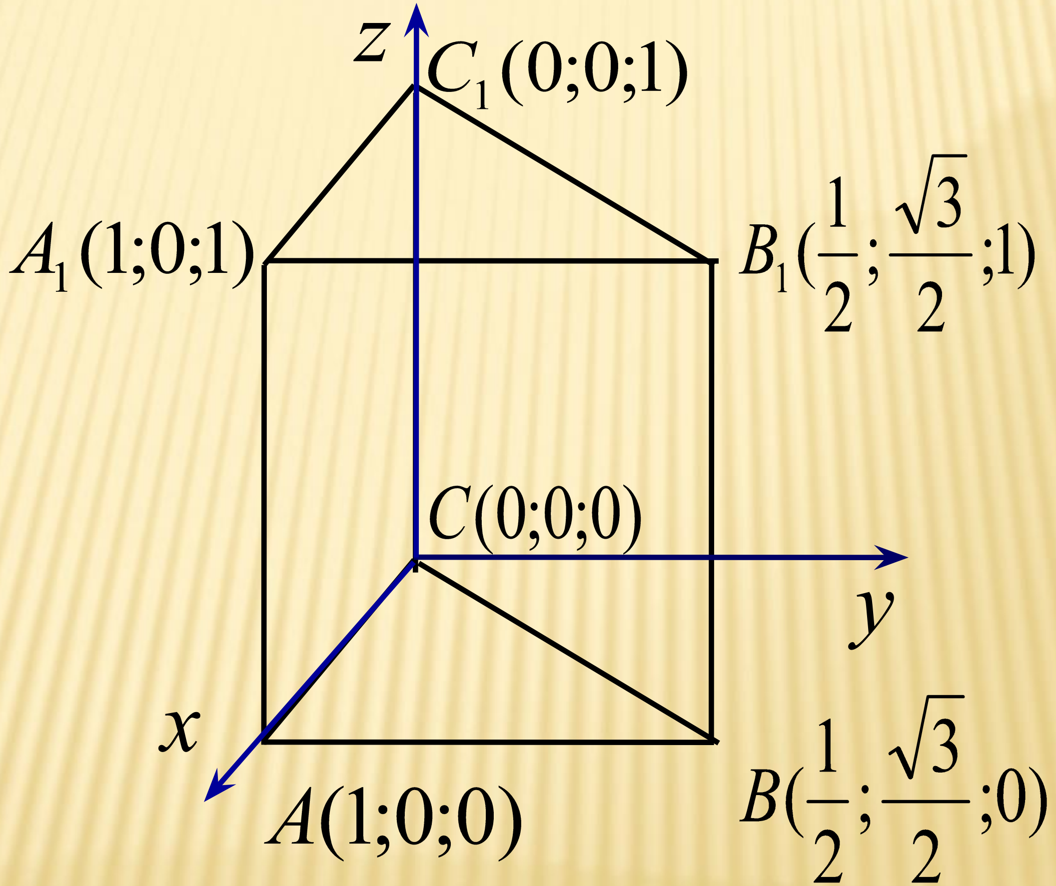
Задача 2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD и CE, где D и E - соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1



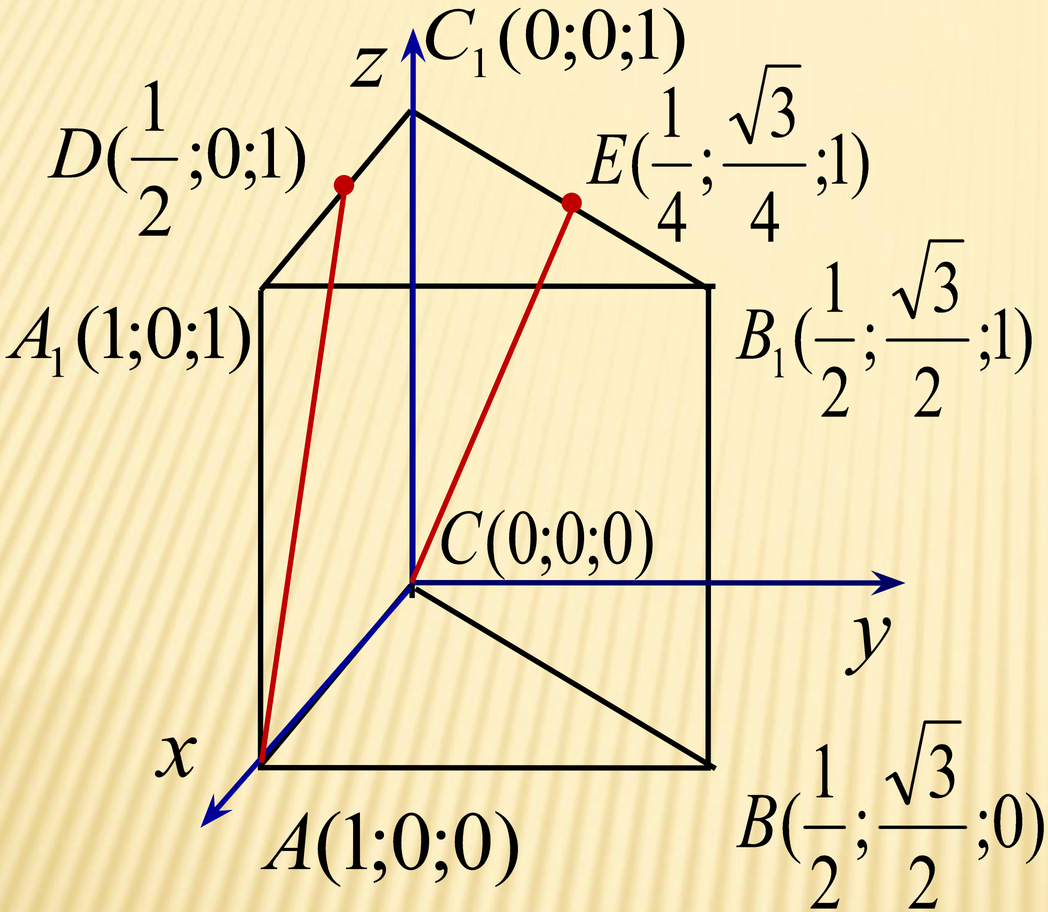
Решение.



Координаты правильной треугольной призмы



Решение.



$$\overrightarrow{AD}\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\}$$

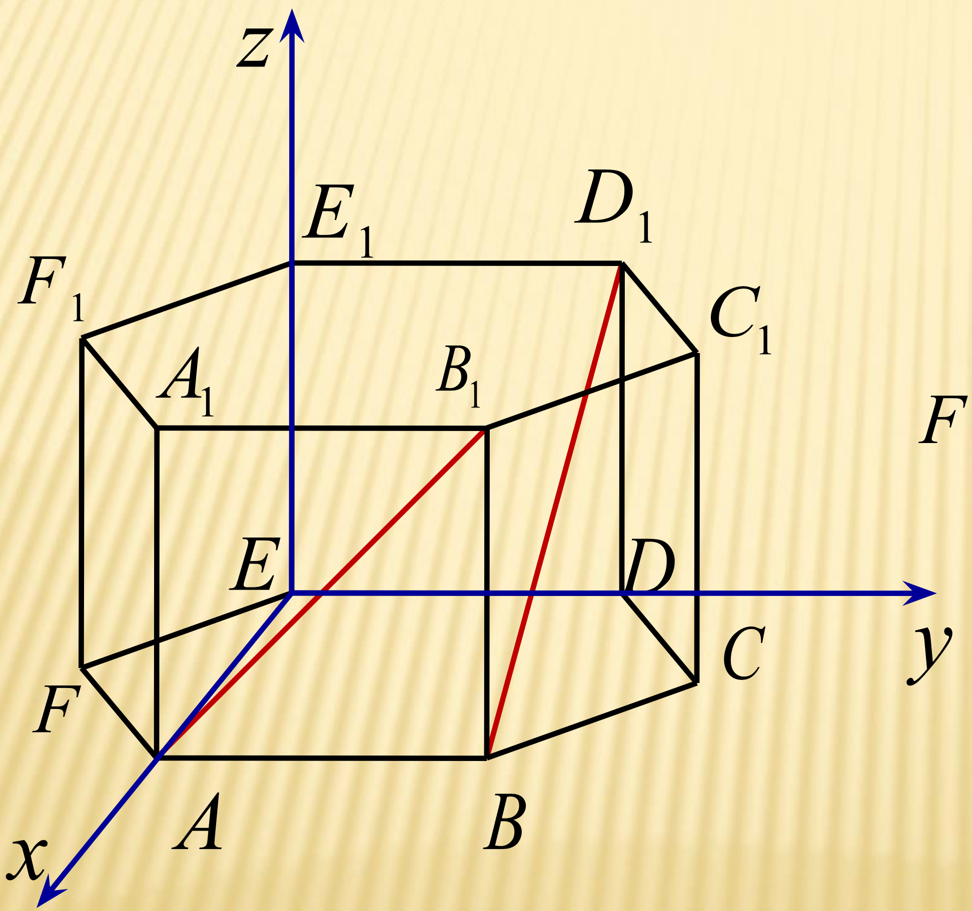
$$\overrightarrow{CE}\left\{\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right\}$$

$$\overrightarrow{AD}\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\} \qquad \overrightarrow{CE}\left\{\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right\}$$

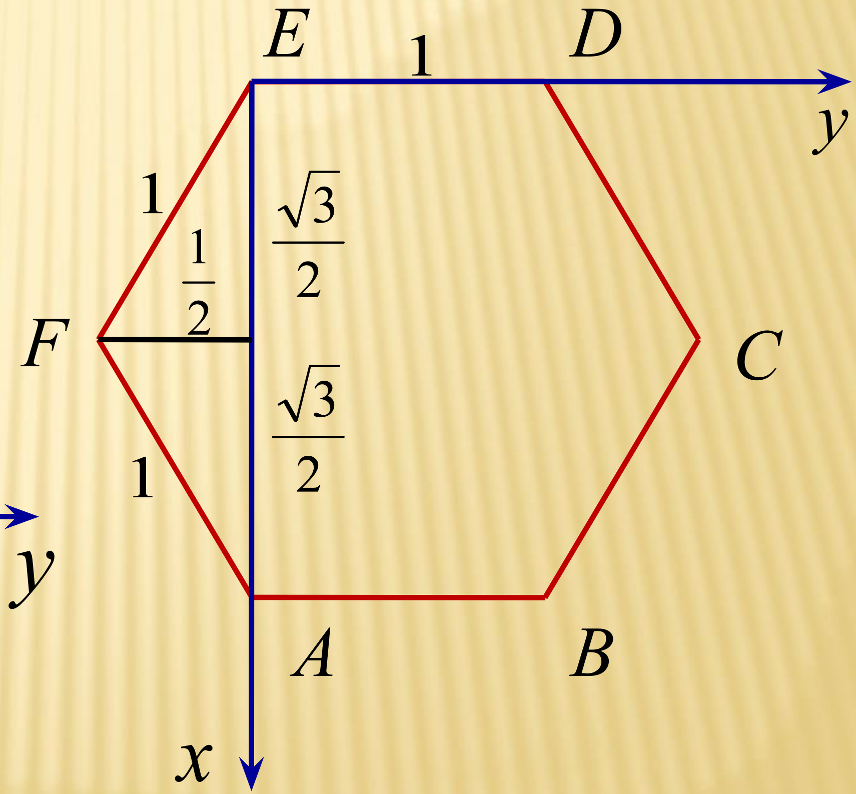
$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+1\cdot 1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}} = 0{,}7$$

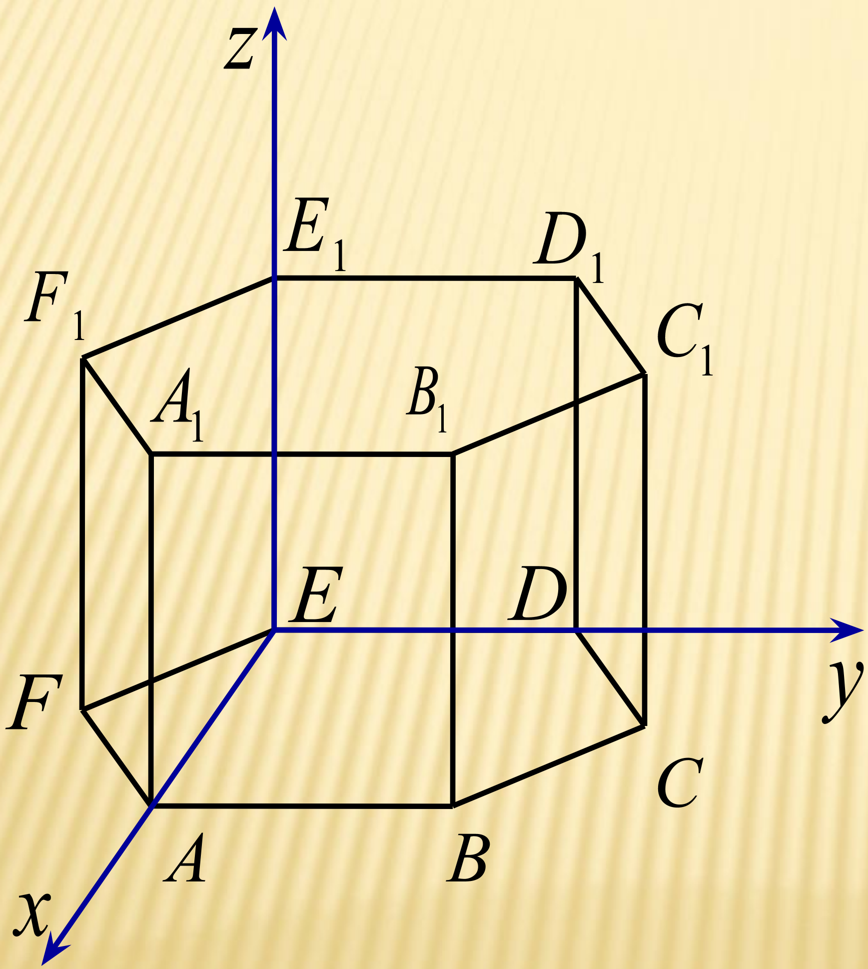
Задача 3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1



Решение.



Координаты правильной шестиугольной призмы



$E_1(0;0;1)$ $D_1(0;1;1)$

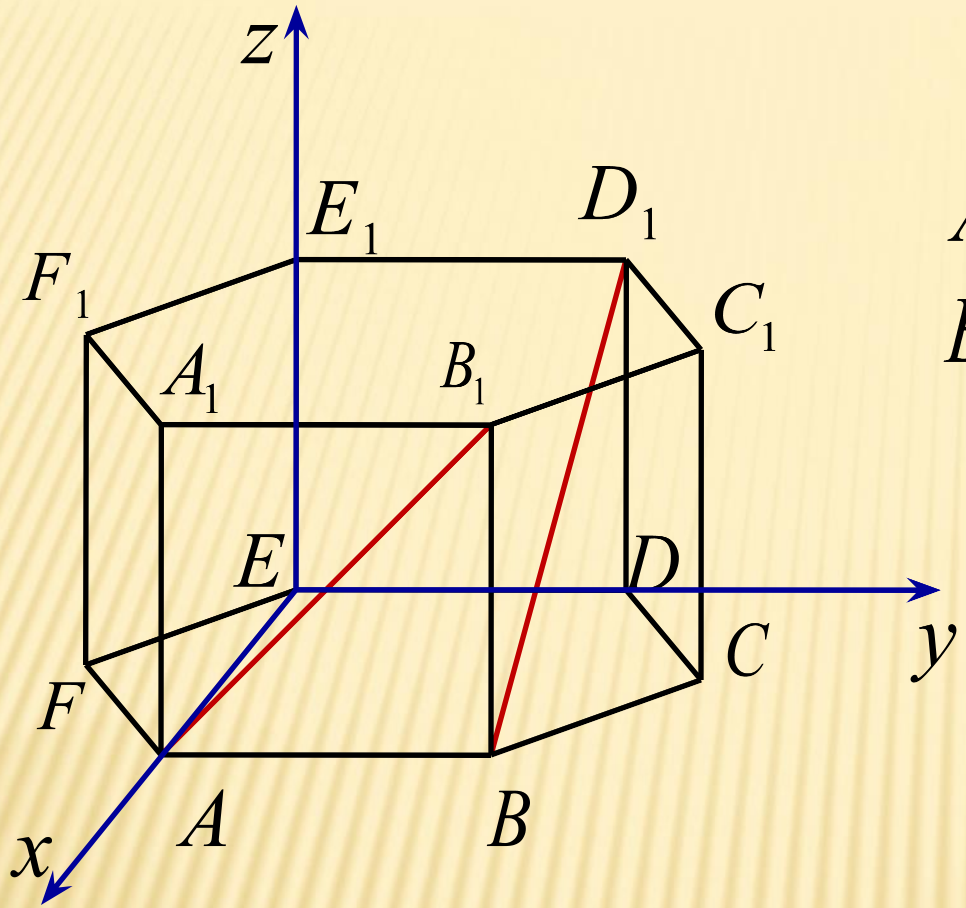
$F_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$ $C_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};1)$

$A_1(\sqrt{3};0;1)$ $B_1(\sqrt{3};1;1)$

$E(0;0;0)$ $D(0;1;0)$

$F(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$ $C(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};0)$

$A(\sqrt{3};0;0)$ $B(\sqrt{3};1;0)$



Решение.

$A(\sqrt{3};0;0)$ $\quad$ $B_1(\sqrt{3};1;1)$

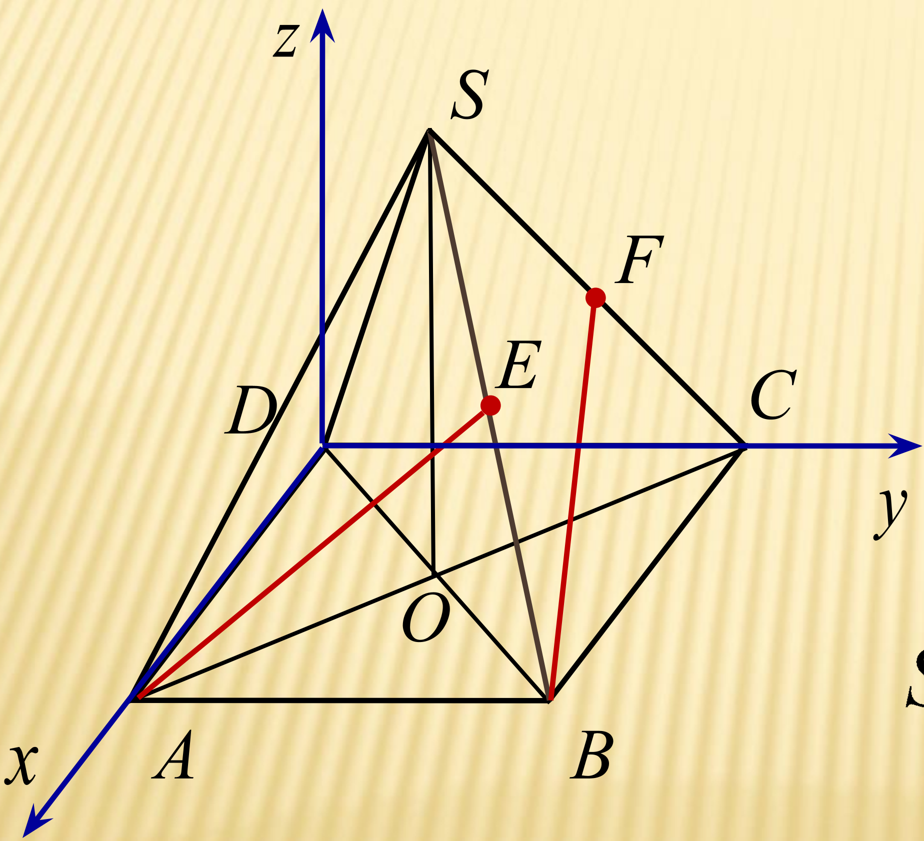
$B(\sqrt{3};1;0)$ $\quad$ $D_1(0;1;1)$

$$\overrightarrow{AB_1}\{0;1;1\}$$

$$\overrightarrow{BD_1}\{-\sqrt{3};0;1\}$$

$$\cos\varphi = \frac{|0\cdot(-\sqrt{3})+1\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Задача 4 В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны *1*, отмечены точки *E* и *F* – середины сторон *SB* и *SC* соответственно. Найдите угол между прямыми *AE* и *BF*.



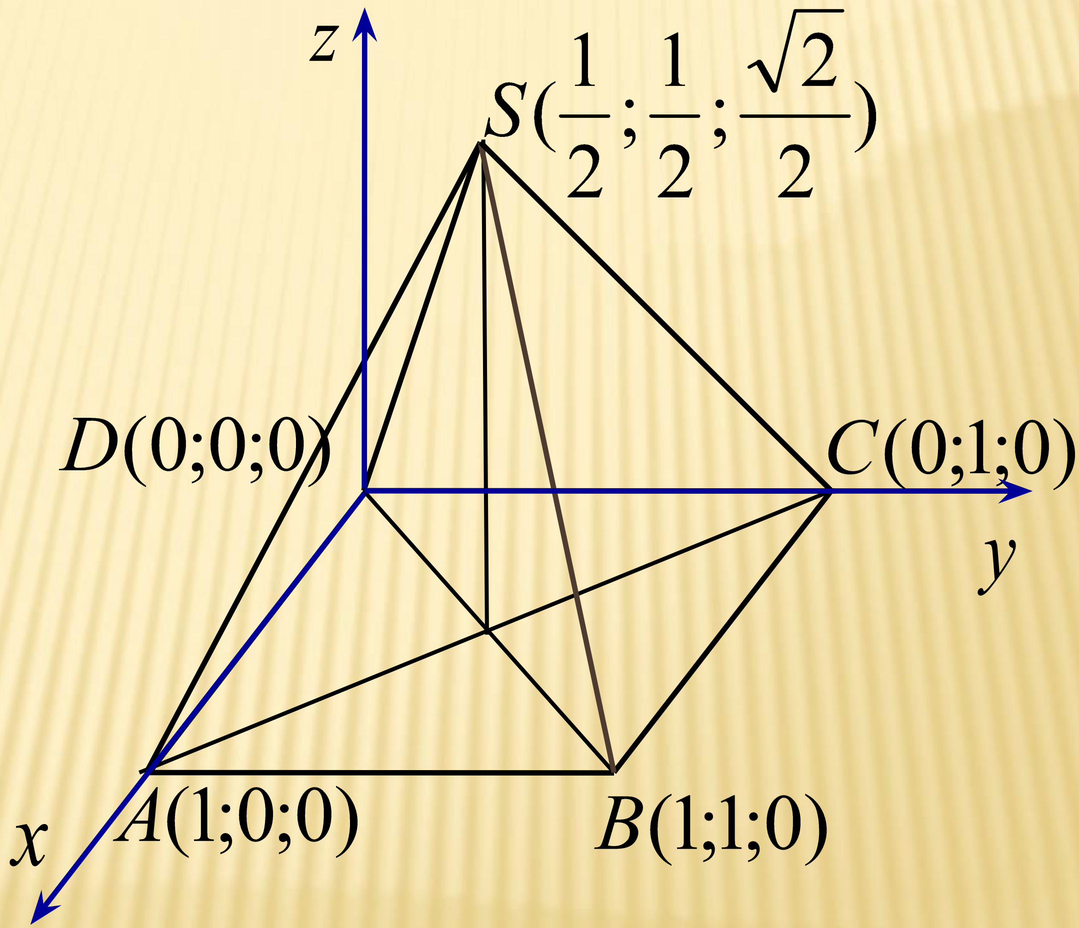
Решение.

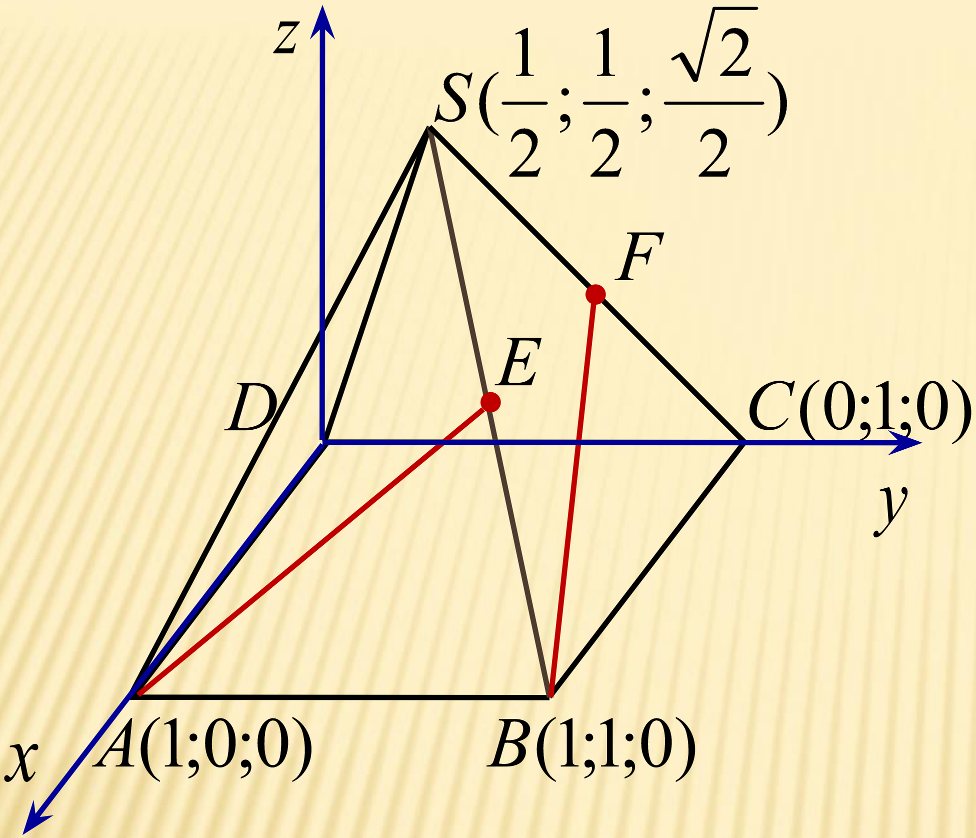
$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$SO = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Координаты правильной четырехугольной пирамиды





Решение.

E- середина SB

$$E(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$$

F- середина SC

$$F(\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$$

$$\overrightarrow{AE}\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{BF}\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

$$\overrightarrow{AE}\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{BF}\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

$$\cos\varphi=\frac{\left|-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{6} \qquad \varphi=\arccos\frac{1}{6}$$