

МЕТОД КООРДИНАТ В ЗАДАЧАХ С2

Нахождение углов.

В задаче С2 рассматриваются многогранники, на основе которых, как правило, нужно найти одну из следующих величин:

- *Угол между скрещивающимися прямыми* —
 - это угол между двумя прямыми, которые
- пересекаются в одной точке и параллельны данным прямым.
 - *Угол между прямой и плоскостью* —
 - это угол между самой прямой и
 - ее проекцией на данную плоскость.
 - *Угол между двумя плоскостями* —
- это угол между прямыми, которые лежат в данных плоскостях и перпендикулярны линии пересечения этих плоскостей.

Прямые всегда задаются двумя точками на поверхности или внутри многогранника, а плоскости — тремя. Сами многогранники всегда задаются длинами своих граней.

Для того, чтобы использовать метод координат, надо хорошо знать формулы. Их три:

- Главная формула — косинус угла φ между
- векторами $a = (x_1; y_1; z_1)$ и $b = (x_2; y_2; z_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

- Уравнение плоскости в трехмерном пространстве: $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C и D — действительные числа, причем, если плоскость проходит через начало координат, $D = 0$. A если не проходит, то $D = 1$.
- Вектор, перпендикулярный к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, имеет координаты: $n = (A; B; C)$ и называется вектором нормали к плоскости.

Задача. Найти косинус угла между векторами $a = (4; 3; 0)$ и $b = (0; 12; 5)$.

Решение.

Поскольку координаты векторов нам даны, подставляем их в первую формулу:

$$\cos \varphi = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 12 + 0 \cdot 5}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 12^2 + 5^2}} = \frac{36}{5 \cdot 13} = \frac{36}{65}$$

Ответ: $\frac{36}{65}$

5

Задача.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M = (2; 0; 1)$, $N = (0; 1; 1)$ и $K = (2; 1; 0)$, если известно, что она не проходит через начало координат.

Решение.

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, но, поскольку искомая плоскость не проходит через начало координат — точку $(0; 0; 0)$ то положим $D = 1$.

Поскольку эта плоскость проходит через точки M , N и K , то координаты этих точек

должны обращать уравнение в верное числовое равенство.

Подставим вместо x , y и z координаты точки $M = (2; 0; 1)$. Имеем:

$$A \cdot 2 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow 2A + C + 1 = 0;$$

Аналогично, для точек $N = (0; 1; 1)$ и $K = (2; 1; 0)$ получим уравнения:

$$A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow B + C + 1 = 0;$$

$$A \cdot 2 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow 2A + B + 1 = 0;$$

Итак, у нас есть три уравнения и три неизвестных.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A + C + 1 = 0 \\ B + C + 1 = 0 \\ 2A + B + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} A = -0,25 \\ B = -0,5 \\ C = -0,5 \end{cases}$$

Получили, что уравнение плоскости имеет вид:

$$-0,25x - 0,5y - 0,5z + 1 = 0.$$

Ответ: $-0,25x - 0,5y - 0,5z + 1 = 0$

Задача.

Плоскость задана уравнением $7x - 2y + 4z + 1 = 0$. Найти координаты вектора, перпендикулярного данной плоскости.

Решение. Используя третью формулу, получаем
 $n = (7; -2; 4)$

Ответ: $n = (7; -2; 4)$

Вычисление координат векторов

Теорема. Чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты начала.

Задача. В пространстве расположены три точки, заданные своими координатами: $A = (1; 6; 3)$, $B = (3; -1; 7)$ и $C = (-4; 3; -2)$.
Найти координаты векторов AB , AC и BC .

Решение. Рассмотрим вектор AB : его начало находится в точке A , а конец — в точке B . Следовательно, чтобы найти его координаты, надо из координат точки B вычесть координаты точки A :

$$AB = (3 - 1; -1 - 6; 7 - 3) = (2; -7; 4).$$

Аналогично, начало вектора AC — все та же точка A , зато конец — точка C . Поэтому имеем:

$$AC = (-4 - 1; 3 - 6; -2 - 3) = (-5; -3; -5).$$

Наконец, чтобы найти координаты вектора BC , надо из координат точки C вычесть координаты точки B :

$$BC = (-4 - 3; 3 - (-1); -2 - 7) = (-7; 4; -9).$$

Ответ: $AB = (2; -7; 4)$; $AC = (-5; -3; -5)$; $BC = (-7; 4; -9)$

Введение системы координат

Самое замечательное свойство этого метода заключается в том, что не имеет никакого значения, как именно вводить систему координат. Если все вычисления будут правильными, то и ответ будет правильным.

Некоторые рекомендации, как лучше ввести систему координат для самых часто встречающихся в задаче C2 многогранников:

1. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Пусть начало координат находится в точке A , направление координатных осей показано на рис. 125. Тогда вершины куба имеют координаты:

$$\begin{aligned} &A(0; 0; 0), B(0; a; 0), C(a; a; 0), \\ &D(a; 0; 0), A_1(0; 0; a), B_1(0; a; a), \\ &C_1(a; a; a), D_1(a; 0; a). \end{aligned}$$

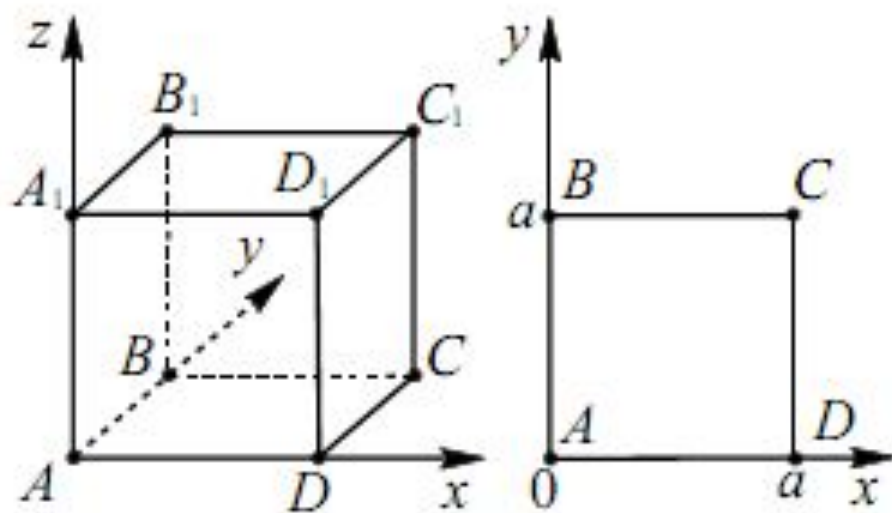


Рис. 125

2. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания которой равна a , а боковое ребро b . Пусть начало координат находится в точке A , ось x направлена вдоль ребра AC , ось y проходит через точку A перпендикулярно AC , ось z направлена вдоль бокового ребра AA_1 (см. рис. 126). Тогда вершины призмы имеют координаты:

$$A(0; 0; 0), B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), C(a; 0; 0),$$

$$A_1(0; 0; b), B_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; b\right), C_1(a; 0; b).$$

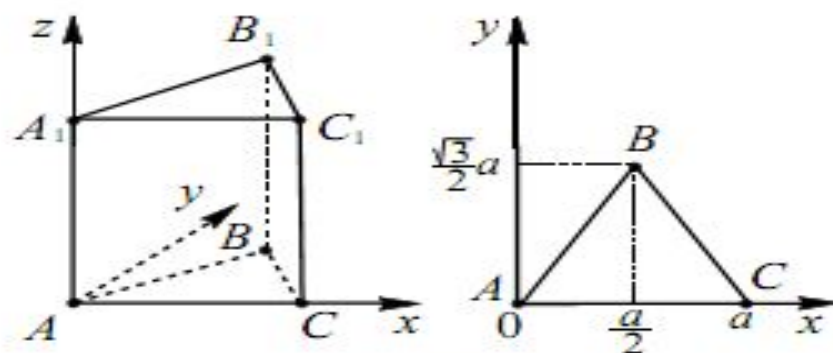


Рис. 126

3. Правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, сторона основания которой равна a , а боковое ребро b . Пусть начало координат находится в точке A , ось x направлена вдоль ребра AF , ось y проходит через точку A перпендикулярно AF , ось z направлена вдоль бокового ребра AA_1 (см. рис. 128). Тогда вершины призмы имеют координаты:

$$A(0; 0; 0), B\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), C(0; a\sqrt{3}; 0),$$

$$D(a; a\sqrt{3}; 0), E\left(\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), F(a; 0; 0),$$

$$A_1(0; 0; b), B_1\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; b\right), C_1(0; a\sqrt{3}; b),$$

$$D_1(a; a\sqrt{3}; b), E_1\left(\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; b\right), F_1(a; 0; b).$$

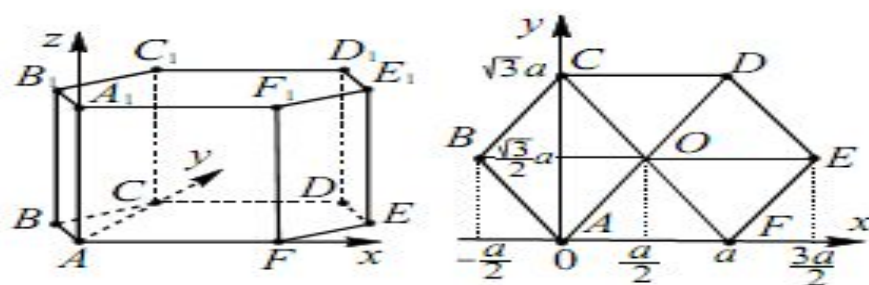


Рис. 128

4. Правильная треугольная пирамида $MABC$, сторона основания которой равна a , а высота h .

Обычно используют один из двух вариантов расположения системы координат.

4.1. Пусть начало координат находится в точке A , ось x направлена вдоль ребра AC , ось y проходит через точку A перпендикулярно AC , ось z проходит через точку A перпендикулярно плоскости ABC (см. рис. 130). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(0; 0; 0), B\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), C(a; 0; 0),$$

$$M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; h\right).$$

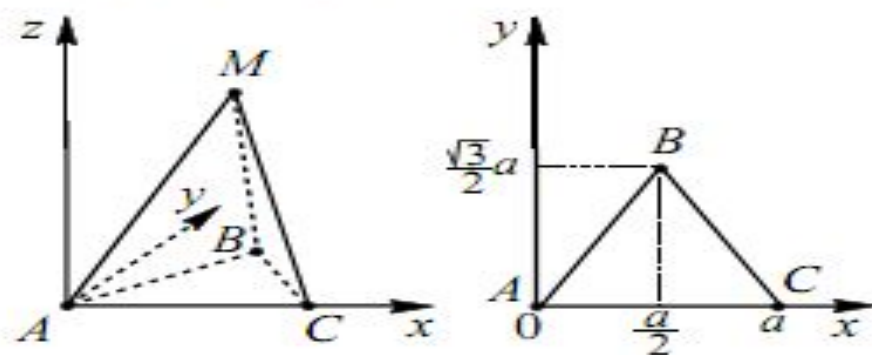


Рис. 130

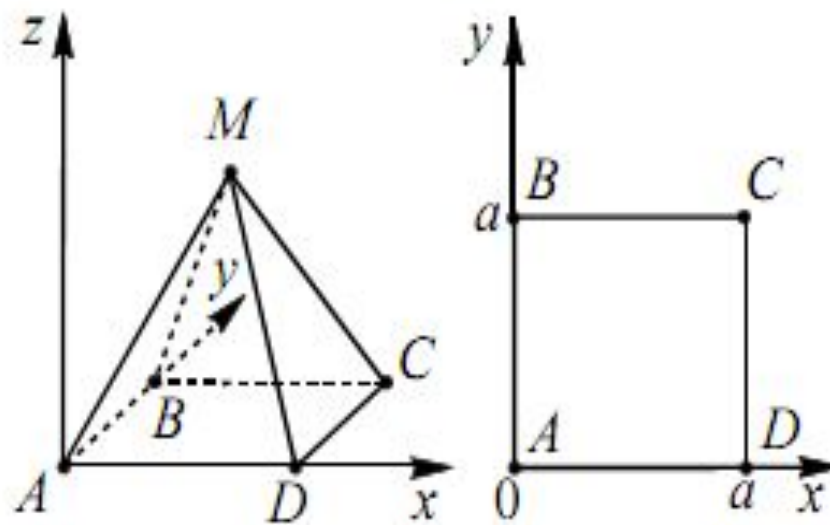
5. Правильная четырехугольная пирамида $MABC$, сторона основания которой равна a , а высота h .

Обычно используют один из двух вариантов расположения системы координат.

5.1. Пусть начало координат находится в точке A , ось x направлена вдоль ребра AD , ось y – вдоль ребра AB , ось z проходит через точку A перпендикулярно плоскости ABC (см. рис. 133). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(0; 0; 0), B(0; a; 0), C(a; a; 0),$$

$$D(a; 0; 0), M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; h\right).$$



6. Правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$, сторона основания которой равна a , а высота h . Пусть начало координат находится в точке A , ось x направлена вдоль ребра AC , ось y проходит через точку A перпендикулярно AC , ось z проходит через точку A перпендикулярно плоскости ABC (см. рис. 135). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(0; 0; 0), B\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right),$$

$$C(0; a\sqrt{3}; 0), D(a; a\sqrt{3}; 0),$$

$$E\left(\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right), F(a; 0; 0), M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; h\right).$$

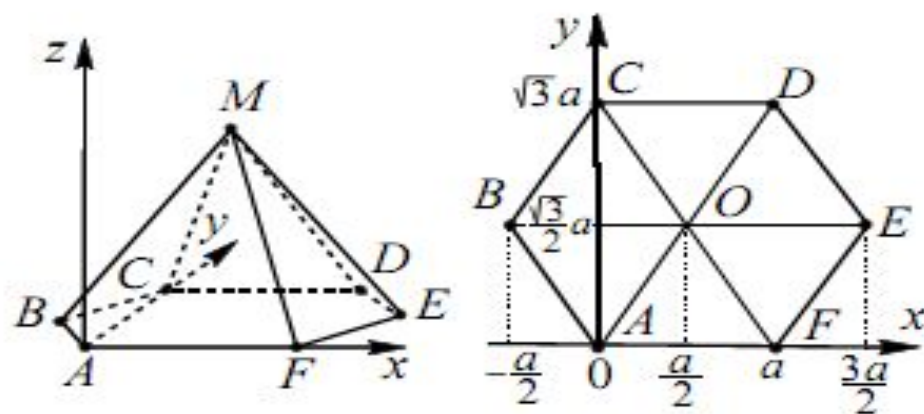


Рис. 135

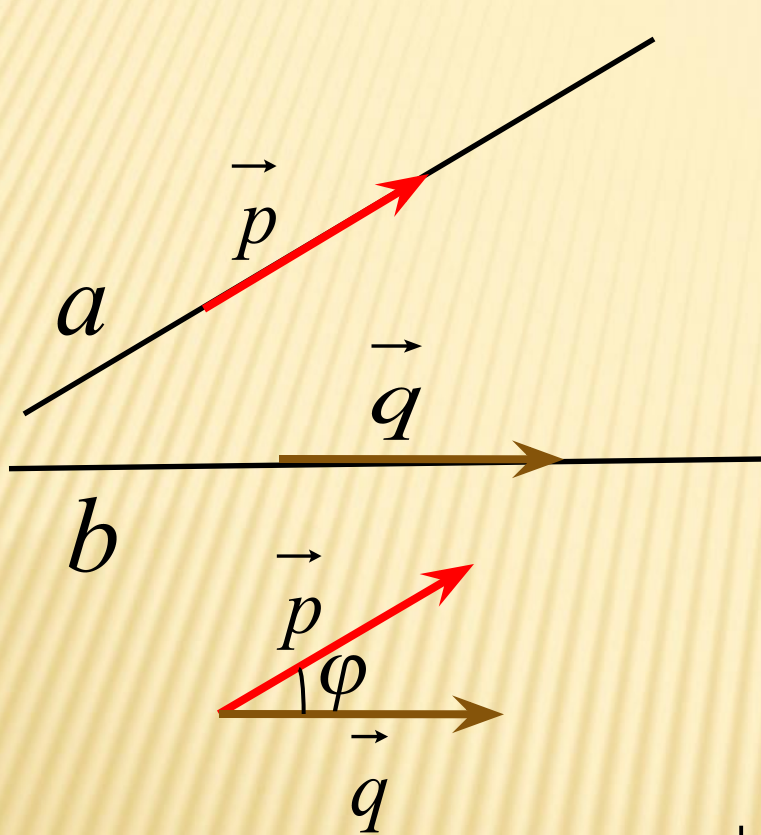
Решение задач методом координат упрощает знание опорной задачи:

4.4. Опорные задачи

1. Координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок M_1M_2 между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в отношении $M_1M : MM_2 = \lambda$, определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Угол между прямыми



\vec{p} - направляющий вектор прямой a

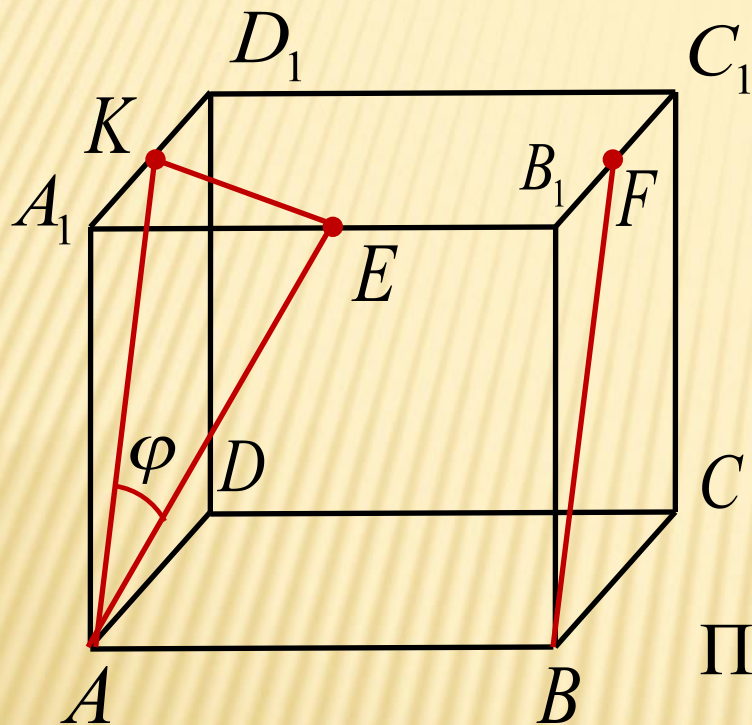
\vec{q} - направляющий вектор прямой b

φ - угол между прямыми

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AE и BF , где E – середина ребра A_1B_1 , а F – середина ребра B_1C_1



Решение (1 способ)

K - середина A_1D_1

$AK \parallel BF$ $\angle KAE = \varphi$

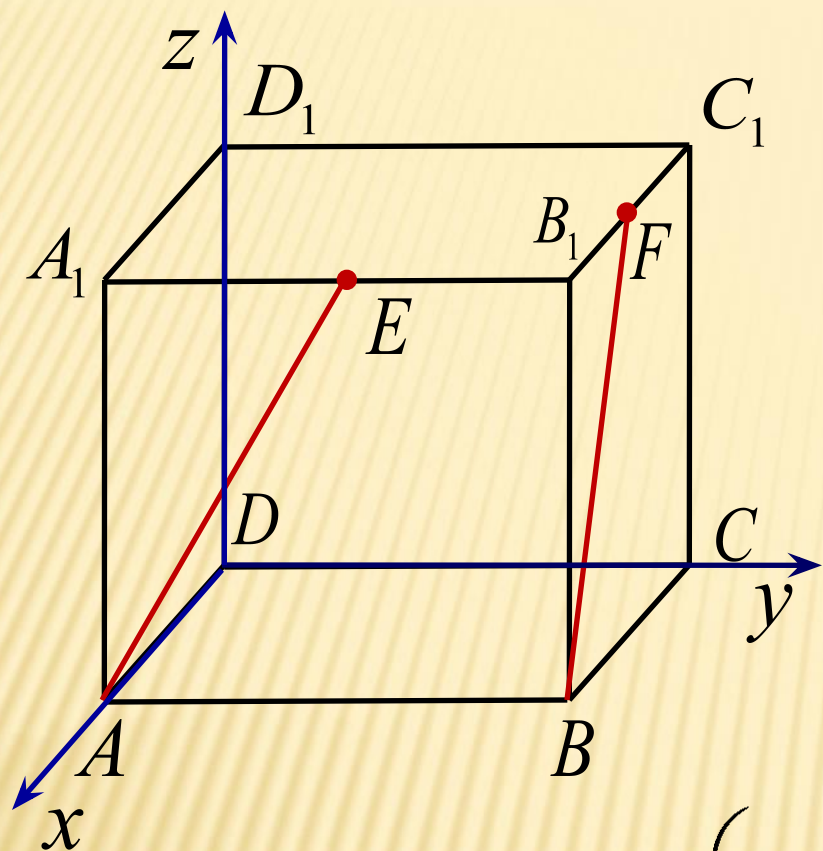
$$AE = AK = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad KE = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

По теореме косинусов для $\triangle AKE$

$$KE^2 = AE^2 + AK^2 - 2 \cdot AE \cdot AK \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = 0,8 \quad \varphi = \arccos 0,8$$

Решение (2 способ)



$$A(1;0;0) \quad E\left(1;\frac{1}{2};1\right)$$

$$B(1;1;0) \quad F\left(\frac{1}{2};1;1\right)$$

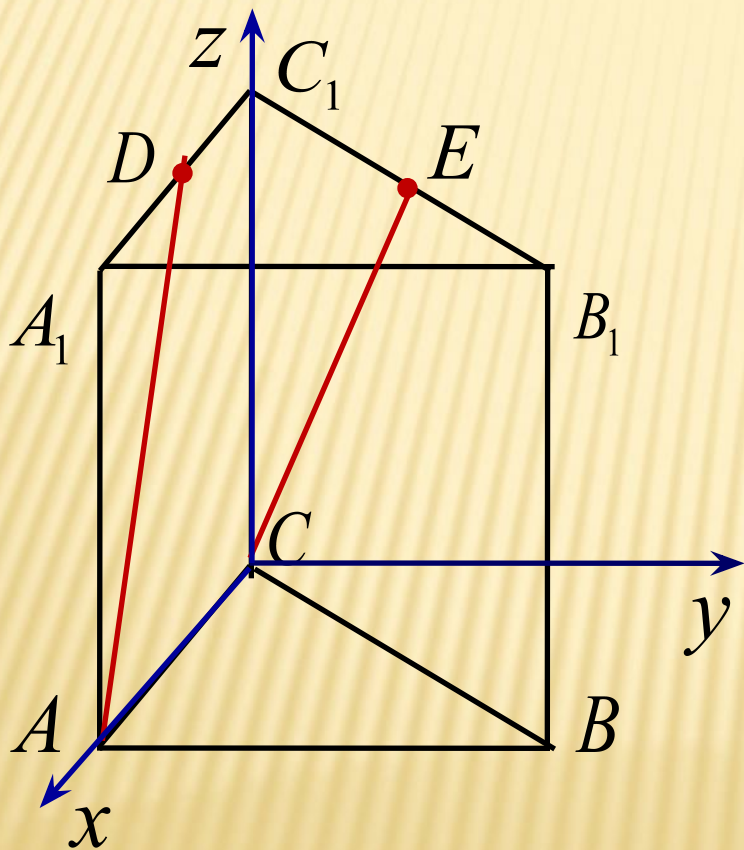
$$\overrightarrow{AE} \left\{ 0; \frac{1}{2}; 1 \right\}$$

$$\overrightarrow{BF} \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 1 \right\}$$

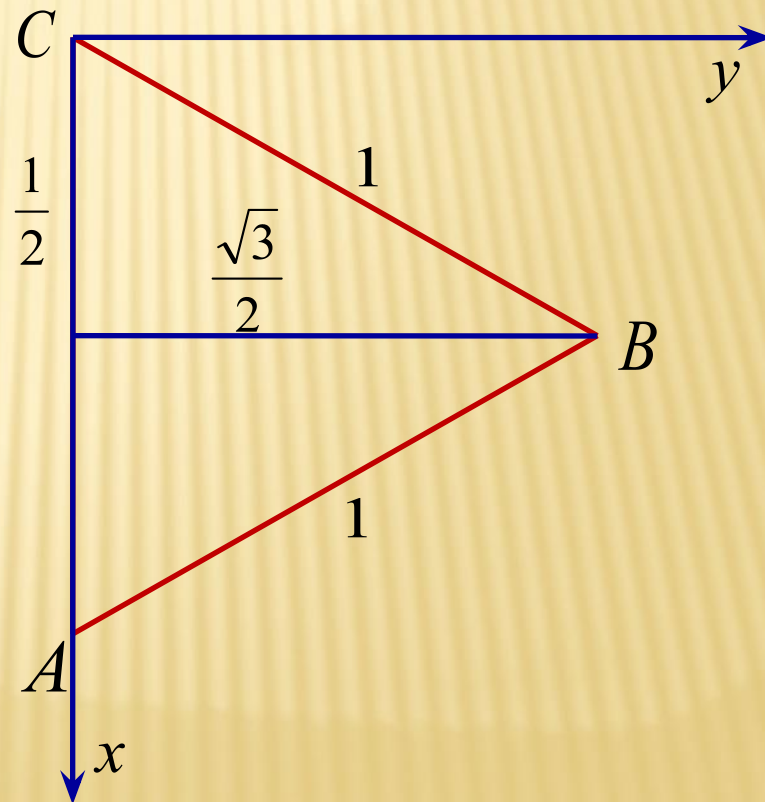
$$\left| 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 \right|$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2}} = 0,8$$

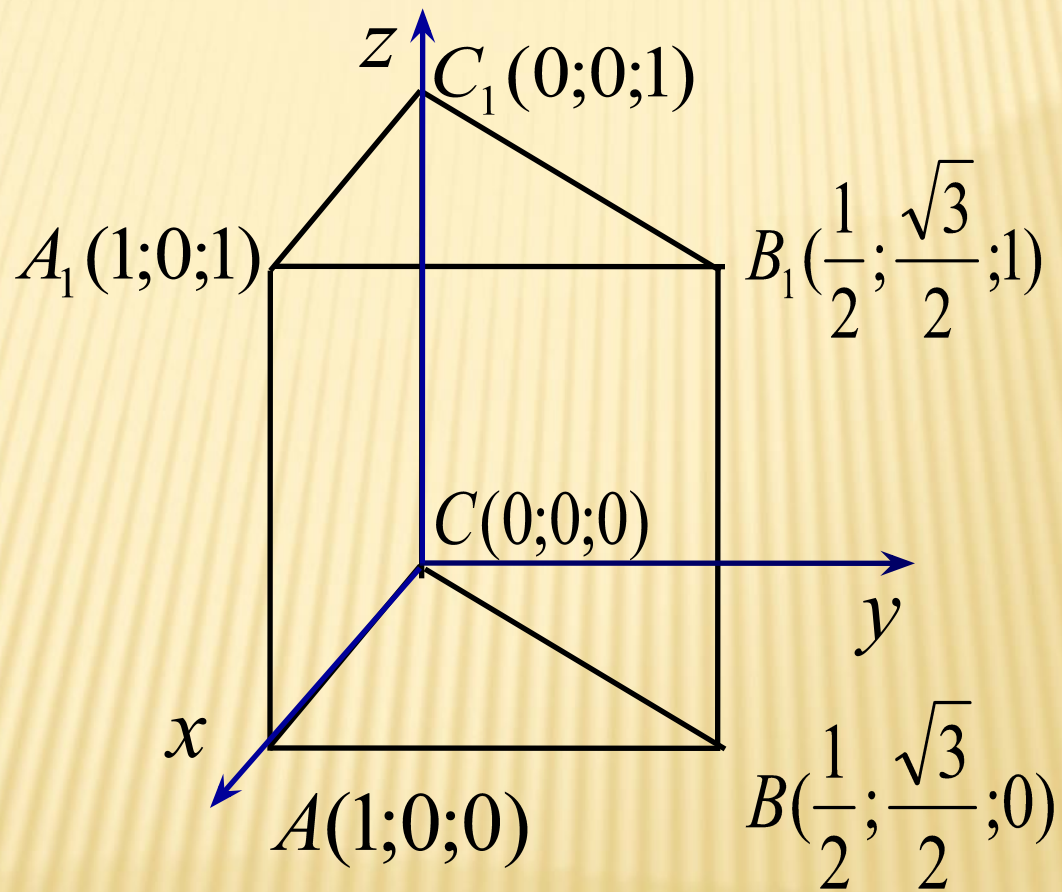
Задача 2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD и CE , где D и E - соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1



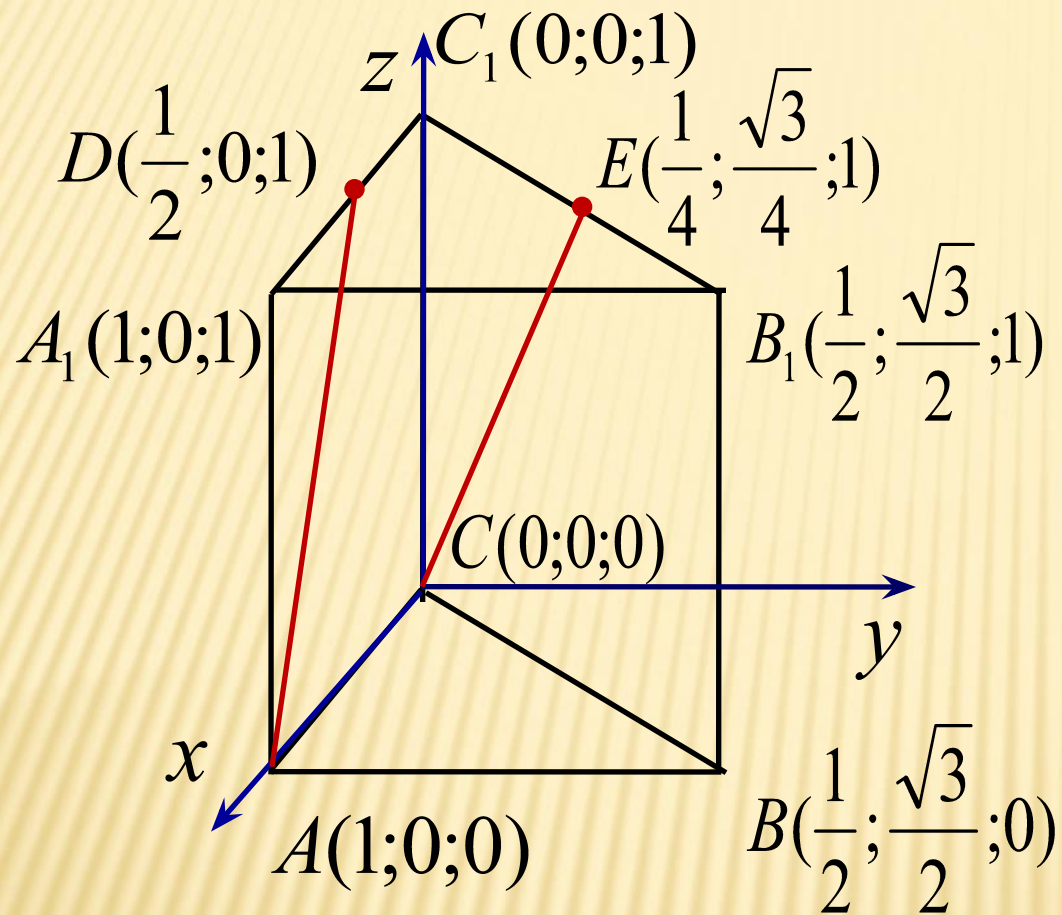
Решение.



Координаты правильной треугольной призмы



Решение.



$$\overrightarrow{AD} \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 1 \right\}$$

$$\overrightarrow{CE} \left\{ \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1 \right\}$$

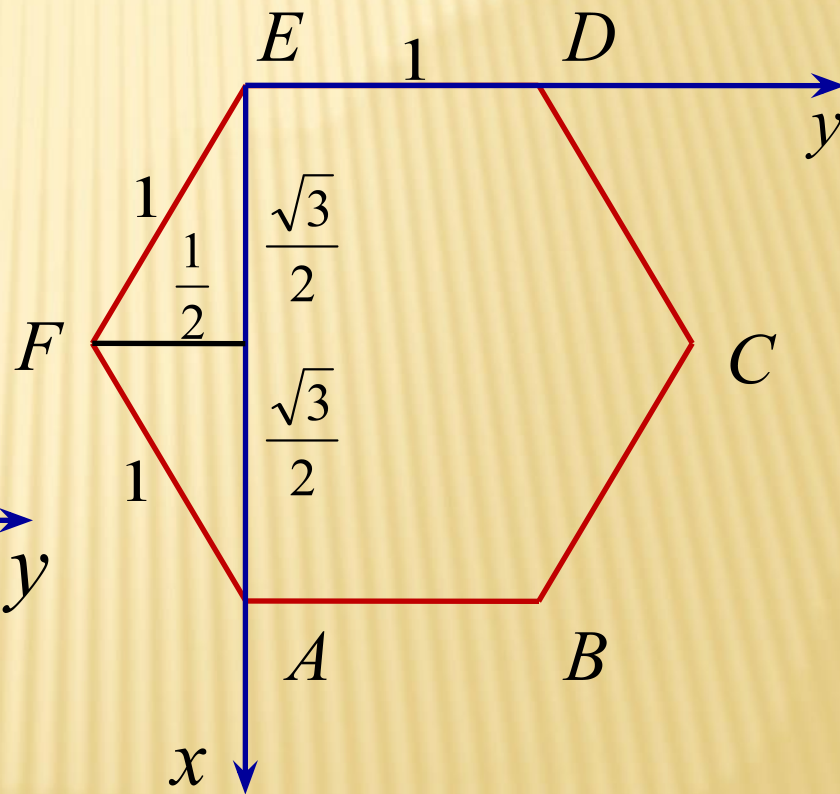
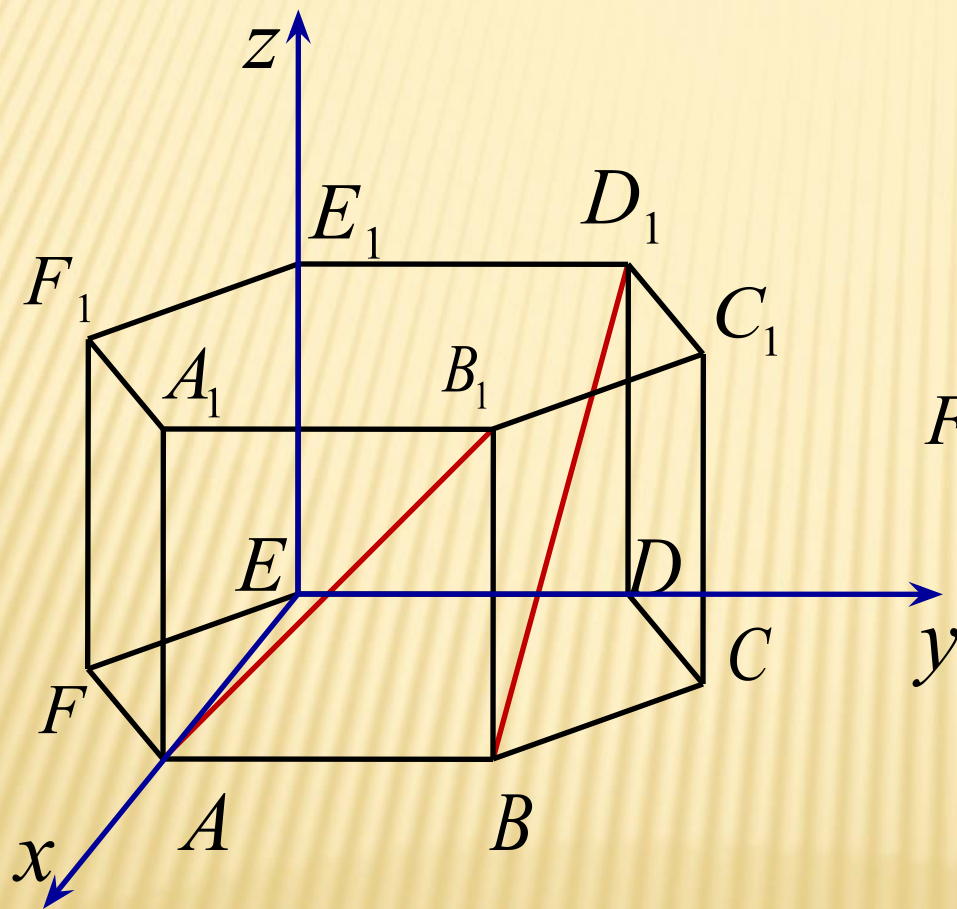
$$\overrightarrow{AD} \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 1 \right\} \quad \overrightarrow{CE} \left\{ \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1 \right\}$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 1^2}}$$

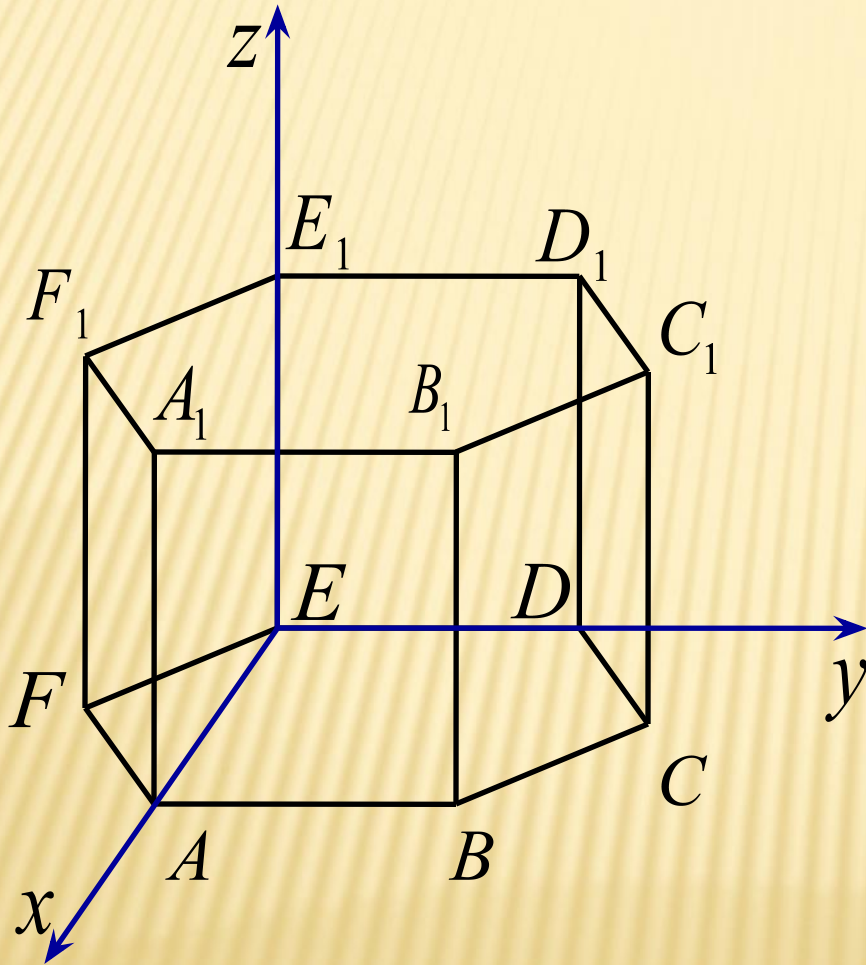
$$\cos \varphi = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = 0,7$$

Задача 3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1

Решение.

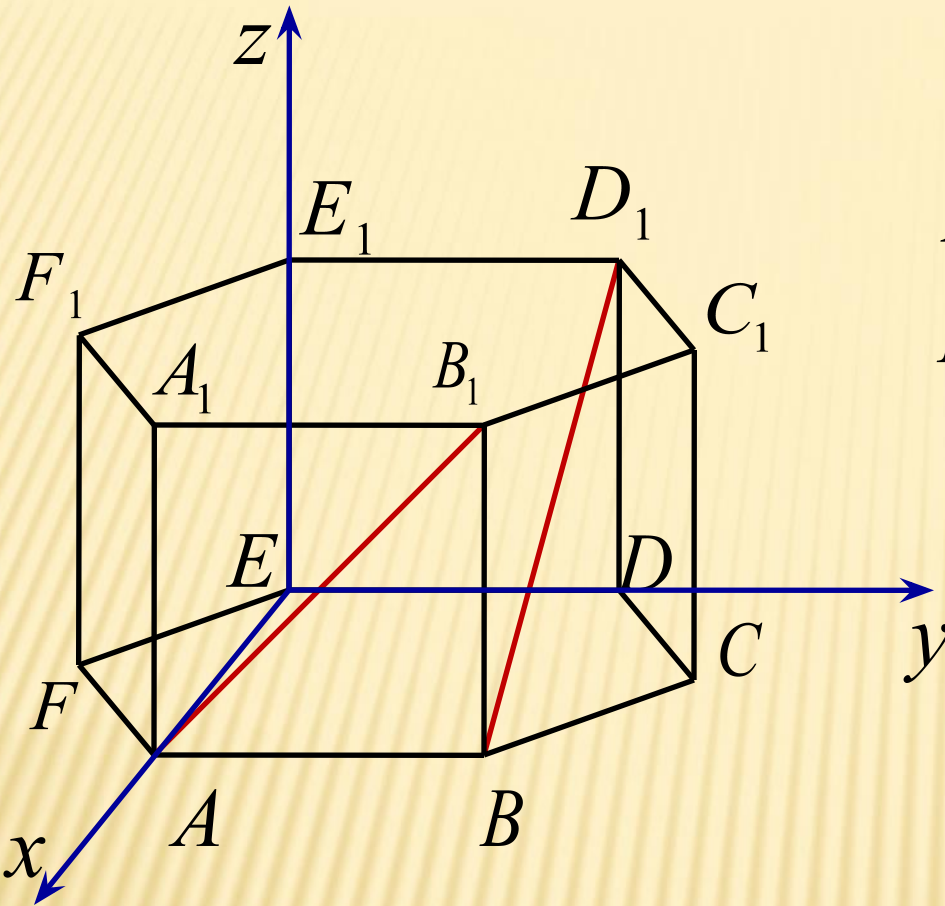


Координаты правильной шестиугольной призмы



| | |
|---|--|
| $E_1(0;0;1)$ | $D_1(0;1;1)$ |
| $F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\right)$ | $C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};1\right)$ |
| $A_1(\sqrt{3};0;1)$ | $B_1(\sqrt{3};1;1)$ |
| $E(0;0;0)$ | $D(0;1;0)$ |
| $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ | $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};0\right)$ |
| $A(\sqrt{3};0;0)$ | $B(\sqrt{3};1;0)$ |

Решение.



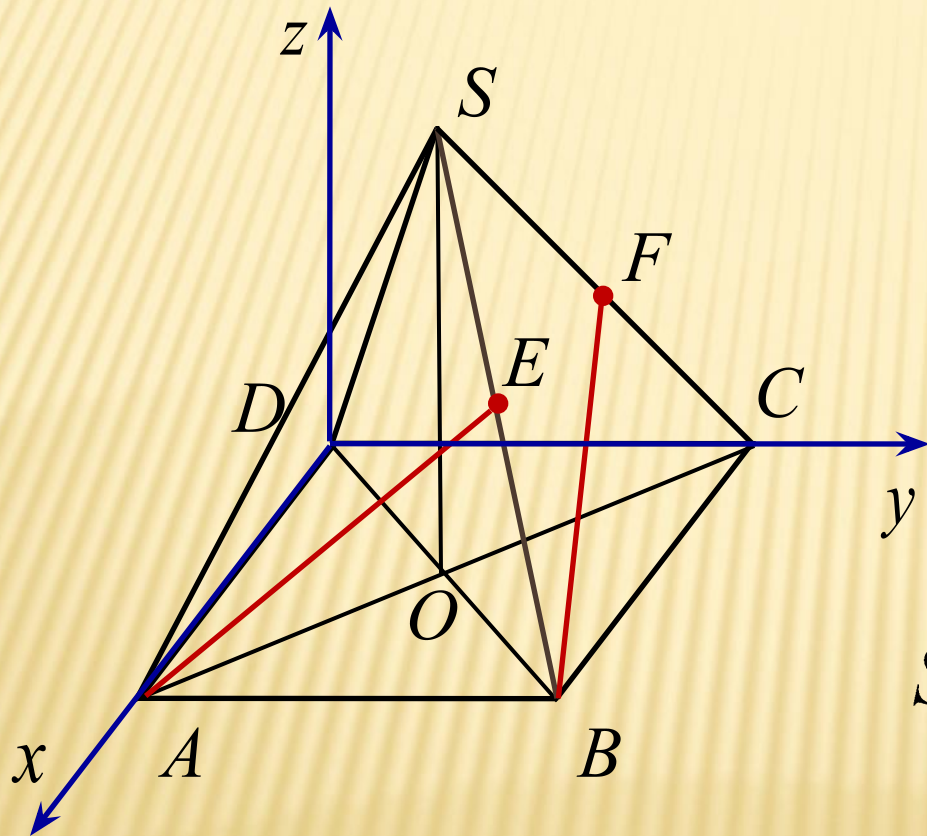
$$A(\sqrt{3};0;0) \quad B_1(\sqrt{3};1;1)$$
$$B(\sqrt{3};1;0) \quad D_1(0;1;1)$$

$$\overrightarrow{AB_1} \{0;1;1\}$$

$$\overrightarrow{BD_1} \{-\sqrt{3};0;1\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|0 \cdot (-\sqrt{3}) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Задача 4 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 , отмечены точки E и F – середины сторон SB и SC соответственно. Найдите угол между прямыми AE и BF .



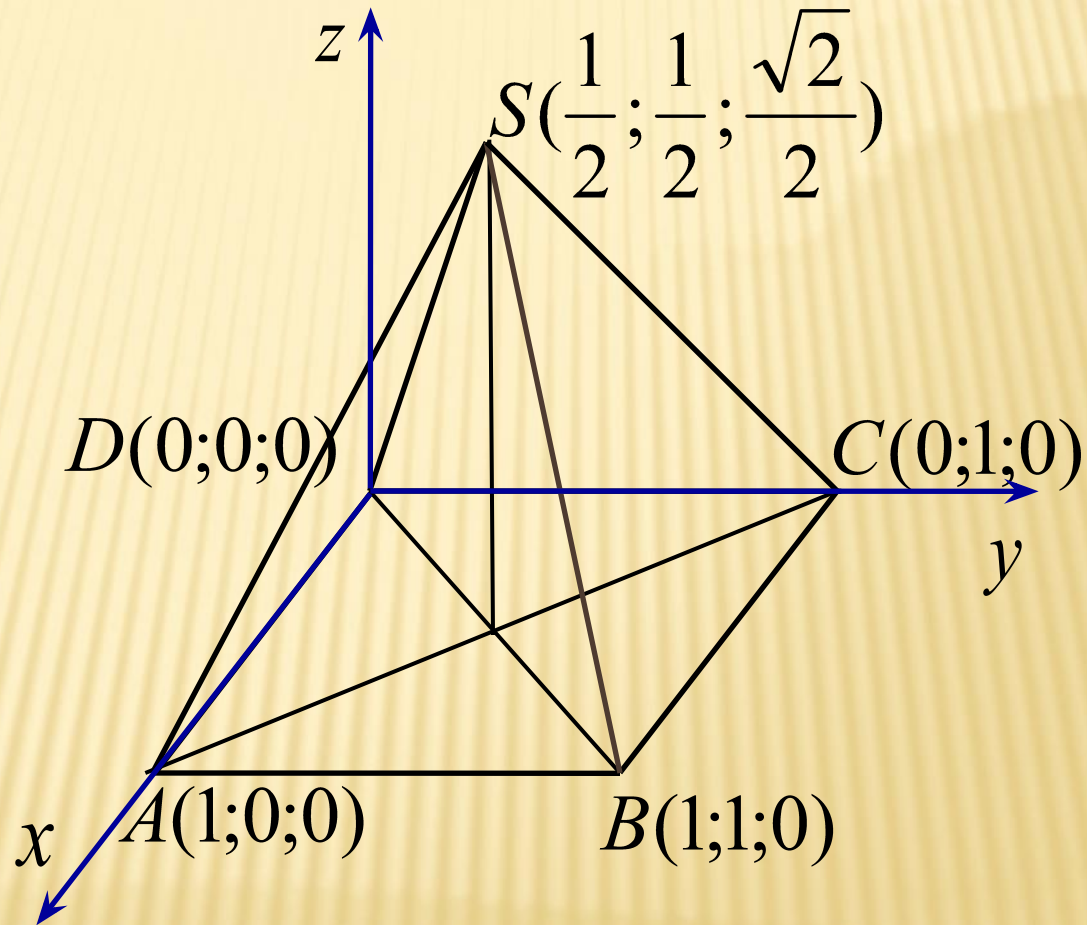
Решение.

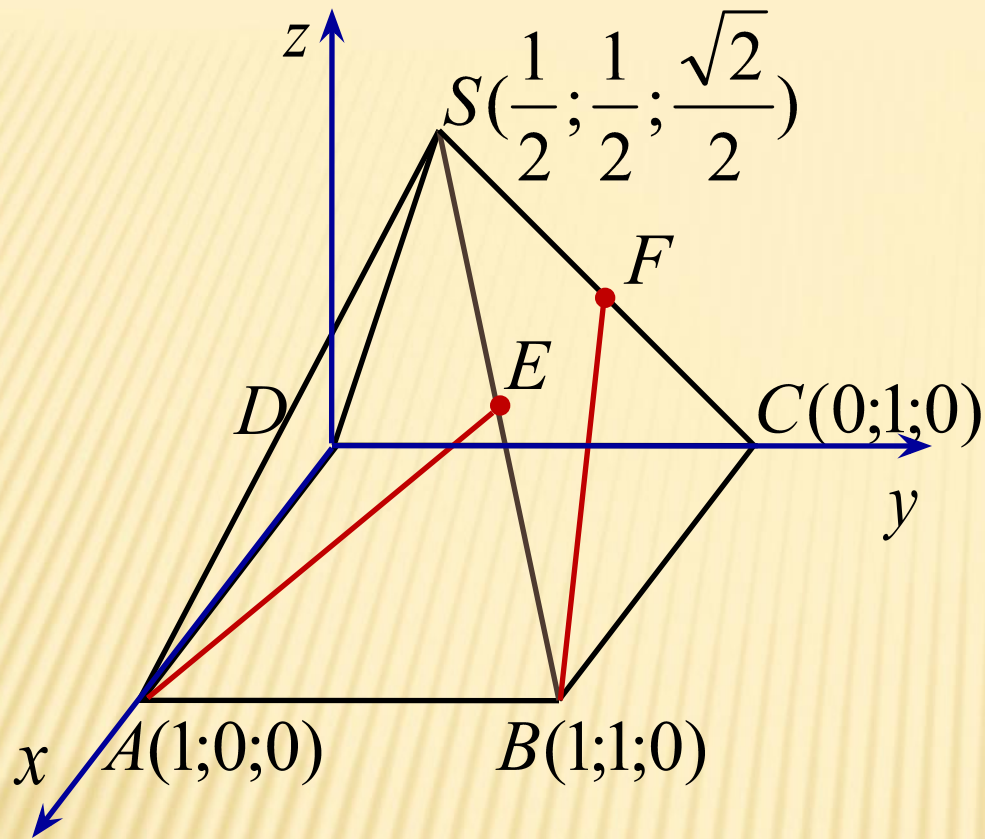
$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$SO = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Координаты правильной четырехугольной пирамиды





Решение.

E - середина SB

$$E(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$$

F - середина SC

$$F(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$$

$$\overrightarrow{AE} \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

$$\overrightarrow{BF} \left\{ -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

$$\overrightarrow{AE} \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} \quad \overrightarrow{BF} \left\{ -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{6}$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{6}$$