

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Практика №4
Вычислительная математика
группа в35309904/90021

Воскобойников С.П.
Доцент ВШ ПИ ИКНТ, к.ф.-м.н.
voskob_sp@mail.ru
10.11.2021

Содержание

- Вычисление норм векторов и матриц
- Оценка собственного числа
- Теорема Гершгорина
- Вычисление невязки и числа обусловленности

Вычисление норм векторов и матриц

Нормы векторов и матриц

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$
$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^N |a_{ij}| \quad \|A\|_2 = \mu_{\max} \quad \mu_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}|$$

Вычислите $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ и $\|x\|_\infty$ вектора

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Вычислите $\|A\|_1$ и $\|A\|_\infty$ матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Оценка собственного числа

2. Оценка $|\lambda|_{\max}$

$$|\lambda|_{\max} \leq \|A\|$$

Используя $\|A\|_1$ и $\|A\|_\infty$, оцените $|\lambda|_{\max}$ для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Какая норма даёт лучшую оценку?

Теорема Гершгорина

3. Верно ли утверждение, что матрица имеющая нулевое собственное значение вырождена, а значит её определитель равен нулю?

4. Теорема Гершгорина утверждает, что все собственные числа матрицы лежат на комплексной плоскости в объединении кругов радиуса $R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|$ с центром в точке $(a_{ii}, 0)$

Применяя теорему Гершгорина для транспонированной матрицы, получим что все собственные числа матрицы лежат на комплексной плоскости в объединении кругов радиуса $R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ji}|$ с центром в точке $(a_{ii}, 0)$

Какие из трёх матриц заведомо невырождены?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Вычисление невязки и числа обусловленности

5. Для системы уравнений $Ax = b$ вычислите невязку $r = b - A\tilde{x}$ и число обусловленности $\nu(A) = \text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, используя $\|A\|_1$ и $\|A\|_\infty$, если

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$