

# Решение 3D задач

## Задача о растекании ТОКОВ

# Раздел BOUNDARIES

BOUNDARIES

Region 1

START(-1,-1)

LINE TO(1,-1) TO (1,1) TO (-1,1)

TO CLOSE

Region 2

START(r,0)

ARC(CENTER=0,0) ANGLE=360

.....

# 2D задача

---

**TITLE** 'Heat flow around an Insulating blob'

**VARIABLES**

Phi { the temperature }

**DEFINITIONS**

K = 1 { default conductivity }

R = 0.5 { blob radius }

**BOUNDARIES**

**REGION 1** 'box'

**START** (-1,-1)

**LINE TO** (1,-1) **TO** (1,1)

**TO** (-1,1) **TO CLOSE**

**REGION 2** 'blob' { the embedded blob }

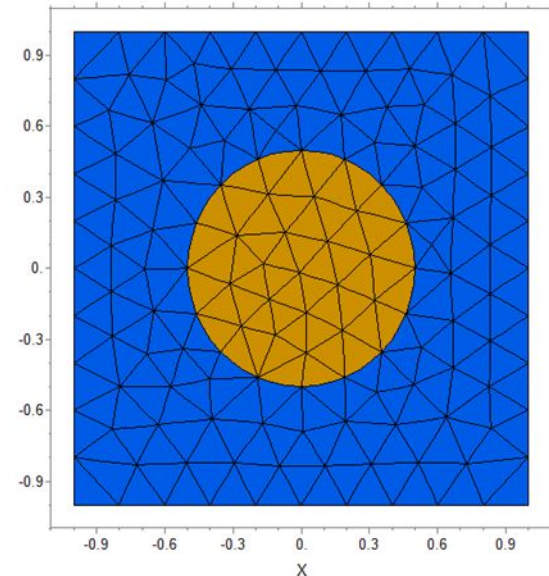
**START** 'ring' (R,0)

**ARC**(CENTER=0,0) **ANGLE**=360 **TO CLOSE**

**PLOTS**

**grid**( x,y) **paintregions** as 'final mesh'

**END**

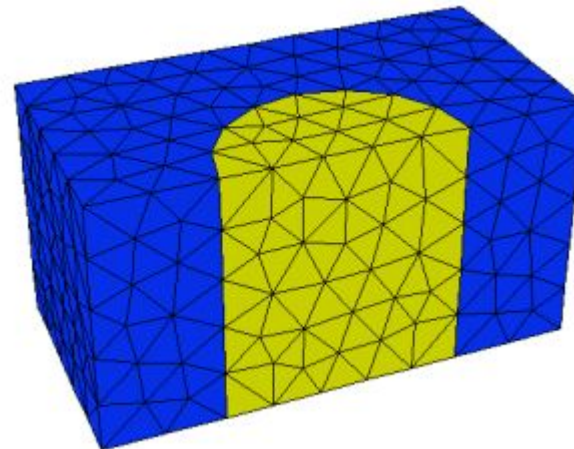
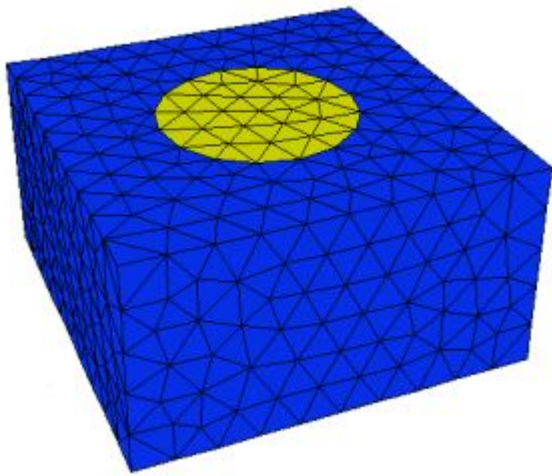


# Понятие экструзии

**Экструзия** (от англ. *extrusion* — выталкивание, выдавливание)

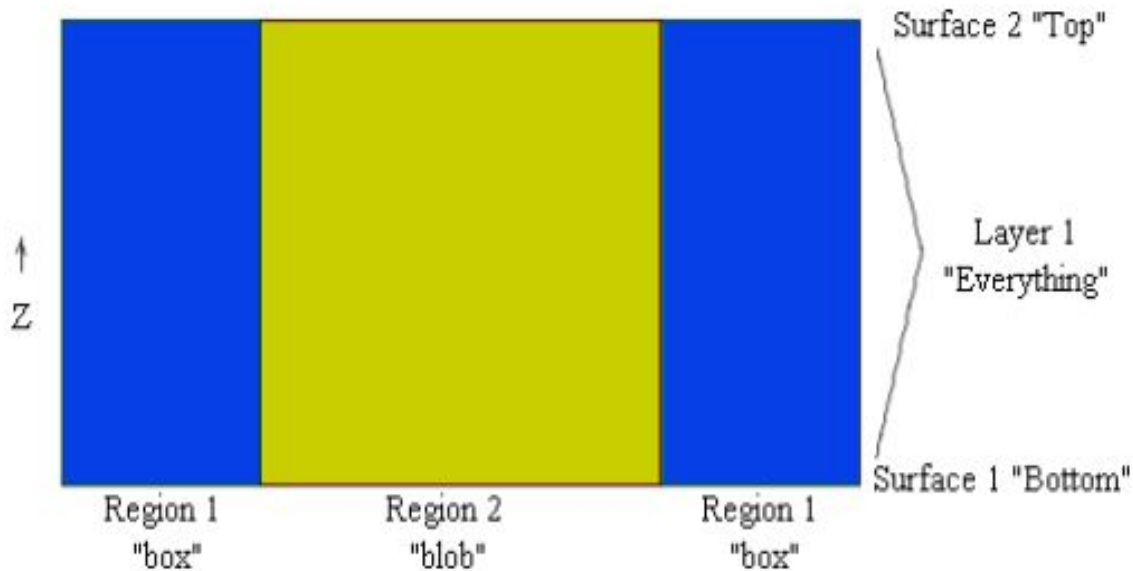
В программу (2D-скрипт) необходимо внести следующие изменения:

- В разделе координаты необходимо указать CARTESIAN3.
- Необходимо добавить новый раздел, чтобы задать расслоение экструзии - EXTRUSION.
- В разделе PLOTS графики и мониторы должны быть изменены, чтобы указать на каких поверхностях ведется изображение



# Формы записи экструзии

Сложная	Сокращенная
EXTRUSION SURFACE 'Bottom' z=0 LAYER 'Everything' SURFACE 'Top' z=1	EXTRUSION z = 0, 1



**TITLE** 'Heat flow around an Insulating blob'

**COORDINATES** cartesian3

**VARIABLES** Phi { the temperature }

**DEFINITIONS**

K = 1 { default conductivity }

R = 0.5 { blob radius }

**EXTRUSION**

SURFACE 'Bottom' z=0

LAYER 'Everything'

SURFACE 'Top' z=1

**BOUNDARIES**

REGION 1 'box'

START(-1,-1)

LINE TO (1,-1) TO (1,1)

TO (-1,1) TO CLOSE

REGION 2 'blob' { the embedded blob }

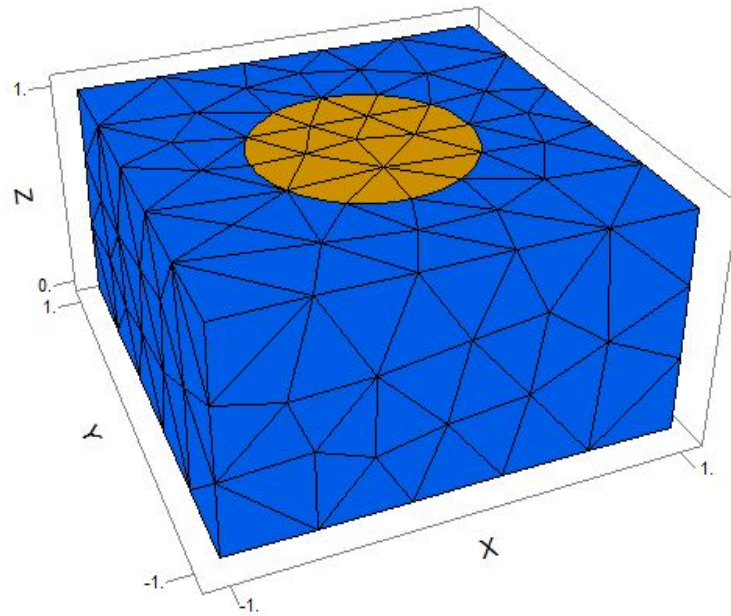
START 'ring' (R,0)

ARC(CENTER=0,0) ANGLE=360 TO CLOSE

**PLOTS**

grid( x,y,z) paintregions as "final mesh"

**END**



# СЛОИ

## EXTRUSION

SURFACE "Bottom"  $z=-1/2$

LAYER "Underneath"

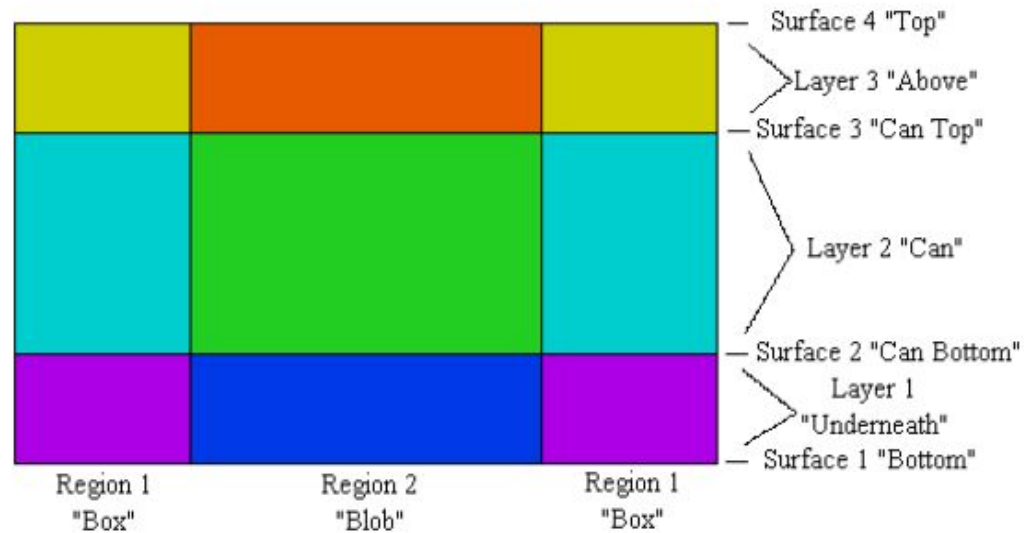
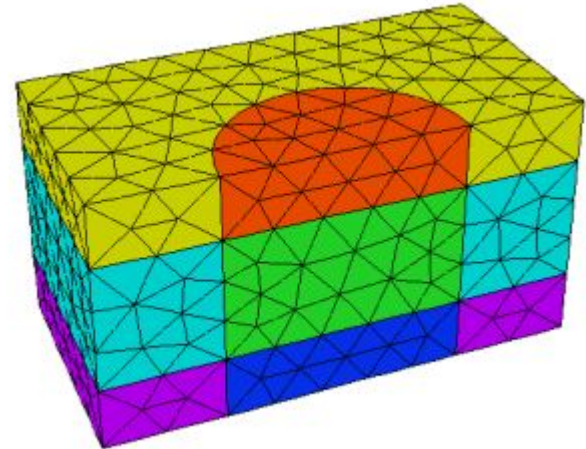
SURFACE "Can Bottom"  $z=-1/4$

LAYER "Can"

SURFACE "Can Top"  $z=1/4$

LAYER "Above"

SURFACE "Top"  $z=1/2$





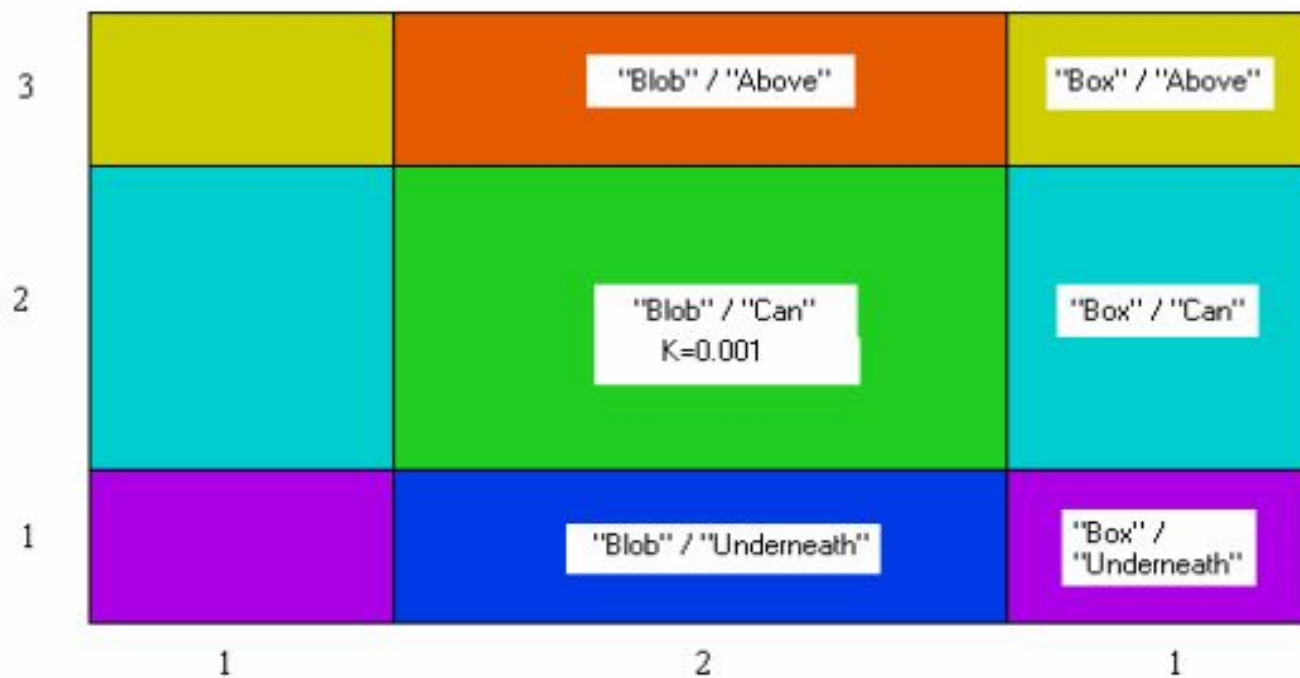
# Настройка свойств материала по регионам и слоям

```
BOUNDARIES
REGION 1
params(1,all) { parameter redefinitions for all layers of region 1 }
LAYER 1
params(1,1){ parameter redefinitions restricted to layer 1 of region 1 }
LAYER 2
params(1,2){ parameter redefinitions restricted to layer 2 of region 1 }
LAYER 3
params(1,3){ parameter redefinitions restricted to layer 3 of region 1 }
START(,) ....TO CLOSE { trace the perimeter }
REGION 2
params(2,all) { parameter redefinitions for all layers of region 2 }
LAYER 1
params(2,1) { parameter redefinitions restricted to layer 1 of region 2 }
LAYER 2
params(2,2) { parameter redefinitions restricted to layer 2 of region 2 }
LAYER 3
params(2,3) { parameter redefinitions restricted to layer 3 of region 2 }
START(,) ....TO CLOSE { trace the perimeter }
{ ... and so forth for all regions }
```



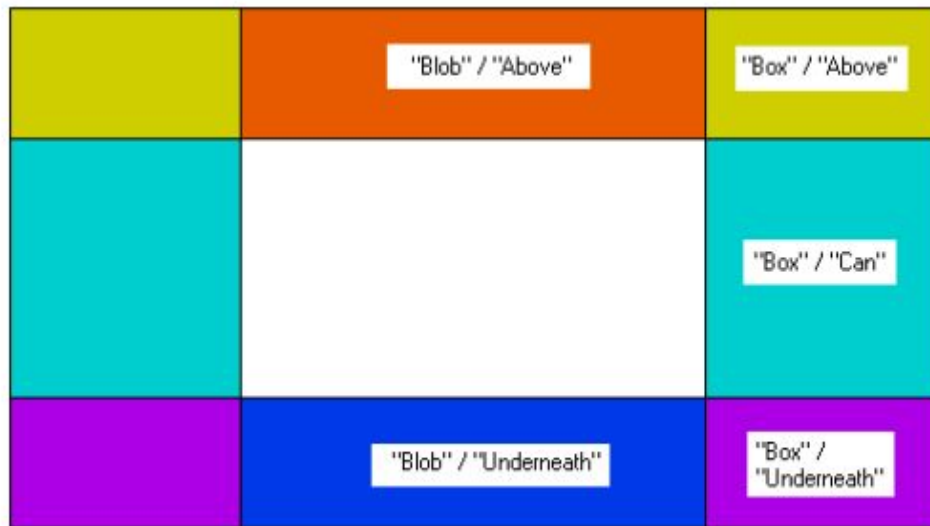
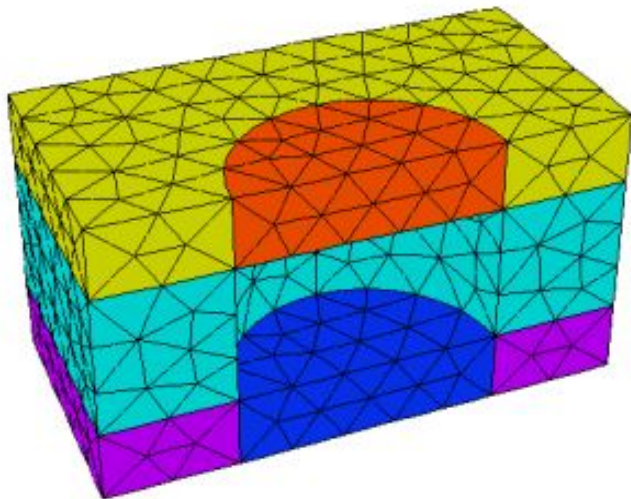
# Настройка свойств материала по регионам И СЛОЯМ

```
REGION 2 'blob' {the embedded blob }  
LAYER 'Can' K = 0.001  
START 'ring' (R,0)  
ARC(CENTER=0,0) ANGLE=360
```

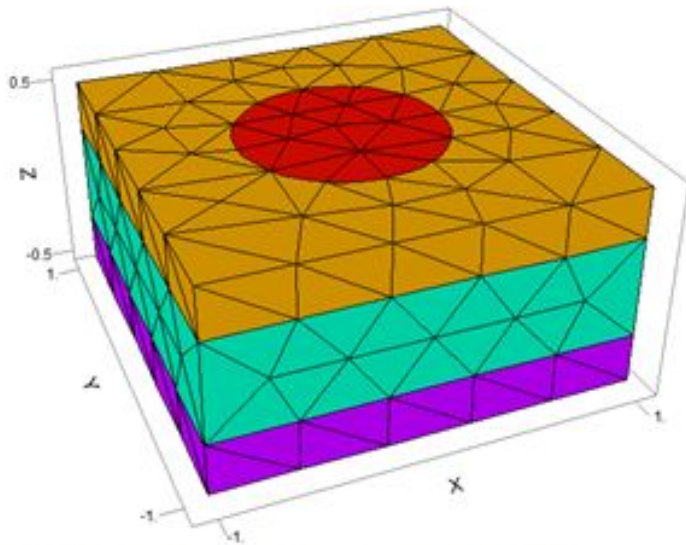


# Пустые области. Зарезервированное слово VOID

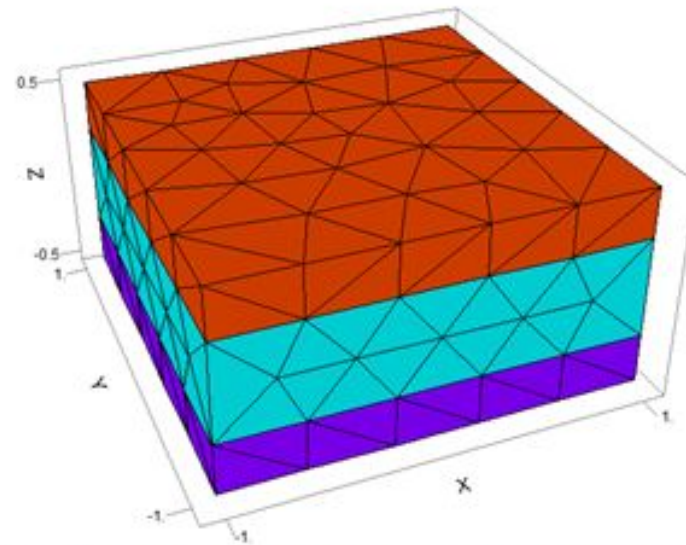
```
REGION 2 'blob' {the embedded blob }  
LAYER 'Can' VOID  
START 'ring' (R,0)  
ARC(CENTER=0,0) ANGLE=360
```



# Ограниченные регионы



Экструзия цилиндра на всю область



Цилиндрическая полость внутри среднего слоя

```
LIMITED REGION 2 'blob' {the embedded blob }  
LAYER 'Can' K = 0.001  
START 'ring' (R,0)  
ARC(CENTER=0,0) ANGLE=360 TO CLOSE
```

# Задание плоскости среза

Осуществляется добавлением спецификатора ON:

PLOTS

CONTOUR(Phi) ON  $x=0$

Можно также запросить графики вычислительной сетки (и, следовательно, структуры домена) командой:

GRID(x,z) ON  $y=0$

# Задание плоскости среза

TITLE 'Heat flow around an Insulating blob'

COORDINATES cartesian3

VARIABLES

Phi { the temperature }

DEFINITIONS

R = 0.5 { blob radius }

EXTRUSION

SURFACE 'Bottom' z=0

layer "niz"

surface "gran1" z=1/4

layer "seredina"

surface "gran2" z=1/2

layer "verh"

SURFACE 'Top' z=1

BOUNDARIES

REGION 1 'box'

START{-1,-1}

LINE TO (1,-1) TO (1,1)

TO {-1,1} TO CLOSE

limited REGION 2 'blob' { the embedded blob }

layer "verh" void

START 'ring' (R,0)

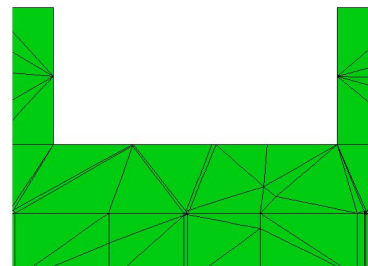
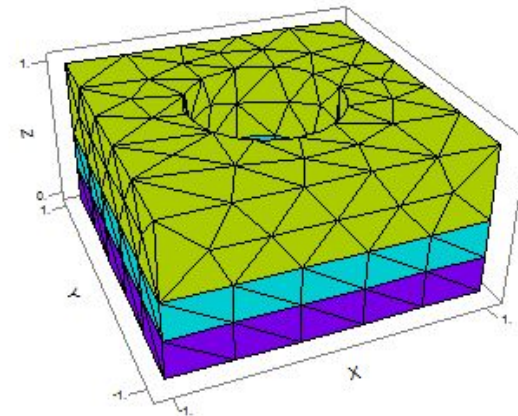
ARC(CENTER=0,0) ANGLE=360 TO CLOSE

PLOTS

grid [y,z] on x=0

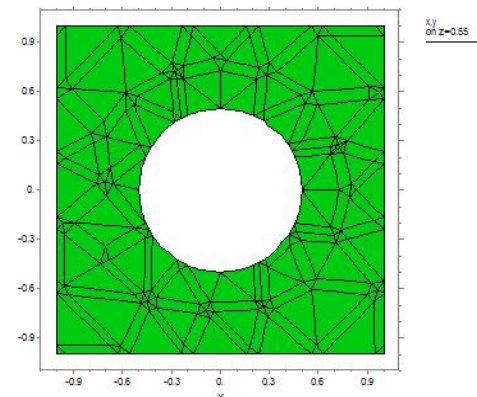
grid [x,y,z] paintregions as 'final mesh'

END



example1: Grid#1 P3 Nodes=251 Cells=877 RMS Err= 0.

grid (x,y) on z=0.55





# Граничные условия

BOUNDARIES

REGION 1 'box'

START(-1,-1)

VALUE(Phi)=0 LINE TO (1,-1)

NATURAL(Phi)=0 LINE TO (1,1)

VALUE(Phi)=1 LINE TO (-1,1)

NATURAL(Phi)=0 LINE TO CLOSE

REGION 2 'blob' { the embedded blob }

**SURFACE 'Can Bottom' VALUE(Phi)=Tcan**

**SURFACE 'Can Top' VALUE(Phi)=Tcan**

{ parameter redefinition in the 'Can' layer only: }

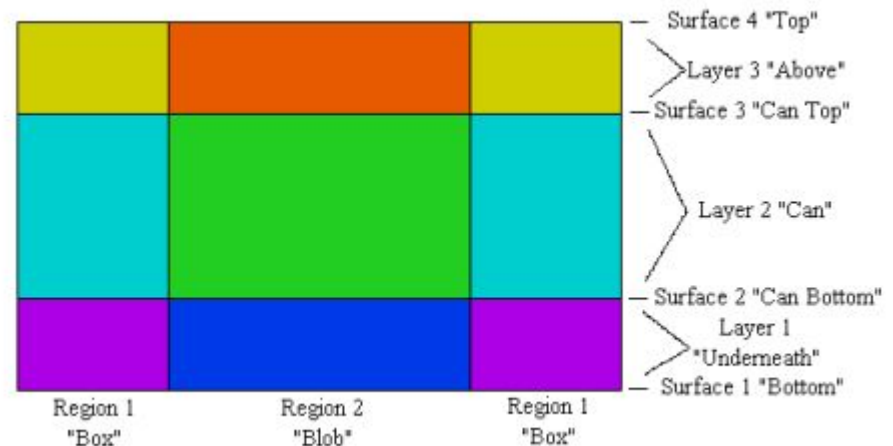
LAYER 2 k = 0.001

START 'ring' (R,0)

**{ boundary condition in the 'Can' layer only: }**

**LAYER 'Can' VALUE(Phi)=Tcan**

ARC(CENTER=0,0) ANGLE=360 TO CLOSE





# Объемные поверхности и слои

- Фигуры должны поддерживать вытянутую форму, с боковыми стенками и слоями (боковые стенки не могут расти или сжиматься)
- Поверхности слоев должны быть непрерывными по границам областей. Если поверхность имеет вертикальный скачок, она должна быть разделена на слои.
- Поверхности слоев могут сливаться, но не инвертироваться. Используйте функцию MAX или MIN в определении поверхности, чтобы заблокировать инверсию.

**TITLE** 'Heat flow around an Insulating Sphere'

**COORDINATES**

Cartesian3

**VARIABLES**

Phi { the temperature }

**DEFINITIONS**

K = 1 { default conductivity }

R = 0.5 { sphere radius }

{ shape of hemispherical cap: }

Zsphere = sqrt(max(R<sup>2</sup>-x<sup>2</sup>-y<sup>2</sup>,0))

**EQUATIONS**

Div{-k\*grad(phi)} = 0

**EXTRUSION**

**SURFACE** 'Bottom' z=-1

**LAYER** 'underneath'

**SURFACE** 'Sphere Bottom' z = -max(Zsphere,0)

**LAYER** 'Can'

**SURFACE** 'Sphere Top' z = max(Zsphere,0)

**LAYER** 'above'

**SURFACE** 'Top' z=1

**BOUNDARIES**

**REGION** 1 'box'

**START**{-1,-1}

**VALUE**(Phi)=0 **LINE TO** (1,-1)

**NATURAL**(Phi)=0 **LINE TO** (1,1)

**VALUE**(Phi)=1 **LINE TO** (-1,1)

**NATURAL**(Phi)=0 **LINE TO CLOSE**

**LIMITED REGION** 2 'blob' { the embedded blob }

**LAYER** 2 K = 0.001

**START** 'ring' (R,0)

**ARC**{**CENTER**=0,0} **ANGLE**=360

**TO CLOSE**

**PLOTS**

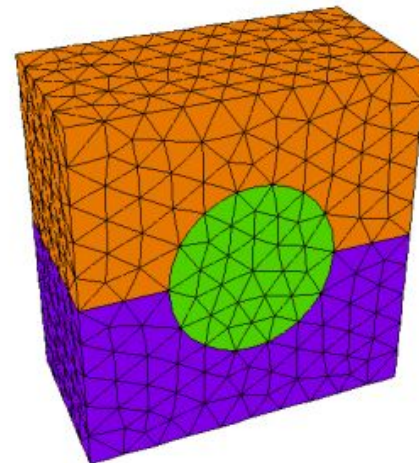
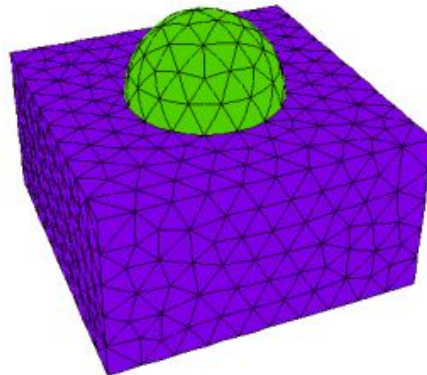
**GRID**{y,z} **on** x=0

**CONTOUR**(Phi) **on** x=0

**VECTOR**{-k\*grad(Phi)} **on** x=0

**ELEVATION**(Phi) **FROM** (0,-1,0) **to** (0,1,0)

**END**



# Функции поверхности

FlexPDE включает в себя три функции формирования поверхности (плоскость, цилиндр и сфера) для упрощения построения 3D-доменов:

**PLANE ( point1 , point2 , point3 )** - Определяет плоскую поверхность, содержащую три указанные точки.

**CYLINDER ( point1 , point2 , radius )** - Определяет верхнюю поверхность цилиндра с осью вдоль линии от точки 1 до точки 2 и с заданным радиусом

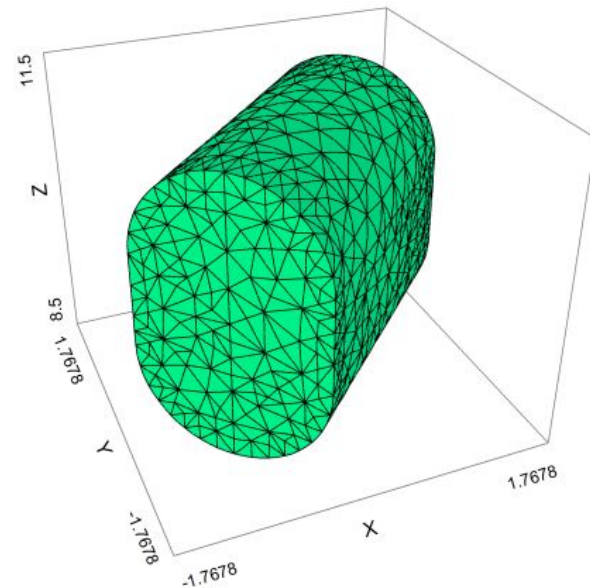
**SPHERE ( point , radius )** - Определяет верхнюю поверхность сферы заданного радиуса с центром в указанной центральной точке

## extrusion

**surface**  $z = -\text{SPHERE} ((0,0,0),R0)$       { the bottom hemisphere }  
**surface**  $z = \text{SPHERE} ((0,0,0),R0)$       { the top hemisphere }

# Функции поверхности: цилиндр

```
zs = CYLINDER((x0,y0,0.5), (x0+Len*c,y0+Len*s, 0.5), R0)
EXTRUSION
SURFACE z = zoff-zs { the bottom half-surface }
SURFACE z = zoff+zs { the top half-surface }
BOUNDARIES
REGION 1
START (x0,y0)
LINE TO (x0+R0*c,y0-R0*s)
TO (x0+Len*c+R0*c,y0+Len*s-R0*s)
TO (x0+Len*c-R0*c,y0+Len*s+R0*s)
TO (x0-R0*c,y0+R0*s)
TO CLOSE
```





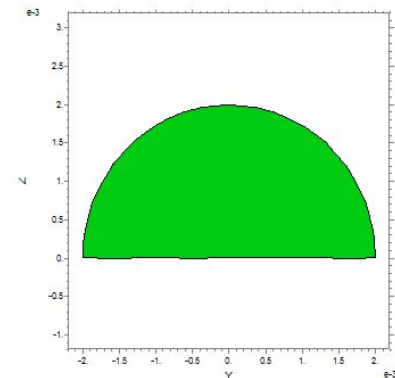
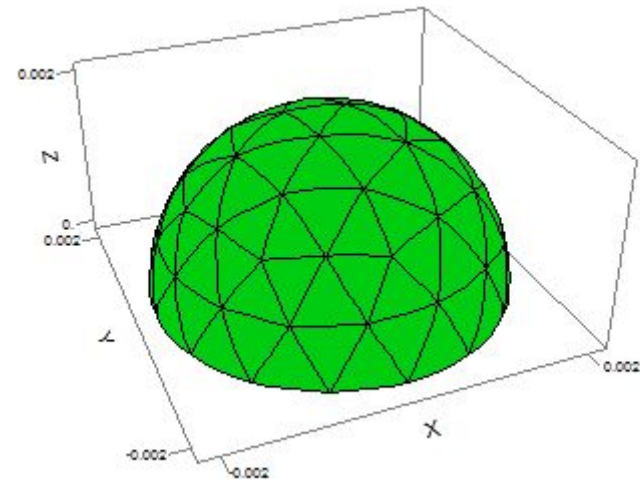
# Полусфера

```
TITLE 'hemisphere'  
SELECT errlim=1e-3  
COORDINATES cartesian3  
VARIABLES U  
DEFINITIONS  
r0=2e-3  
rad=max(0,sqrt(x^2+y^2))  
EXTRUSION  
surface z=0  
surface z=sphere((0,0,0),r0)
```

```
BOUNDARIES  
region 1  
surface 2  
start (r0, 0) arc( center=0,0) angle=360
```

```
PLOTS  
grid(x,y,z) paintregions as "final mesh"  
grid(y,z) on x=0 nolines paintregions as "Region Map"
```

```
END  
|
```



```
TITLE 'hemisphere'  
SELECT erlim=1e-3  
COORDINATES cartesian3  
VARIABLES U  
DEFINITIONS  
r0=2e-3  
rad=max(0,sqrt(x^2+y^2))  
EXTRUSION  
surface z=sphere((0,0,0),r0)  
surface z=h
```

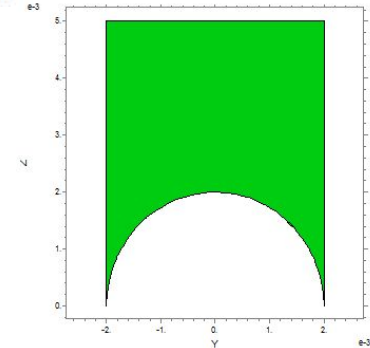
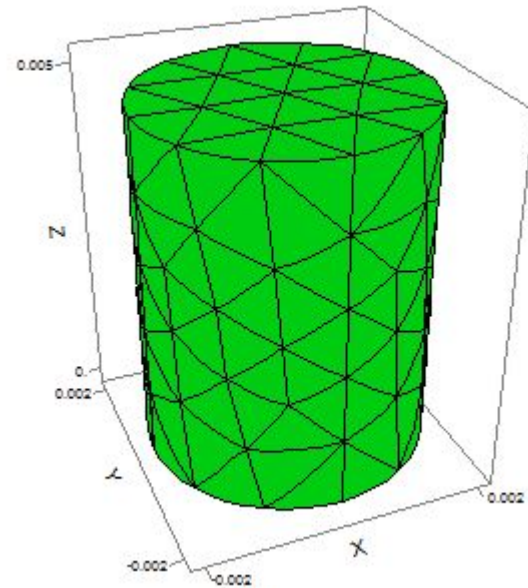
### BOUNDARIES

```
region 1  
surface 2  
start (r0, 0) arc[ center=0,0] angle=360
```

### PLOTS

```
grid(x,y,z) paintregions as 'final mesh'  
grid(y,z) on x=0 nolines paintregions as 'Region Map'
```

```
END
```



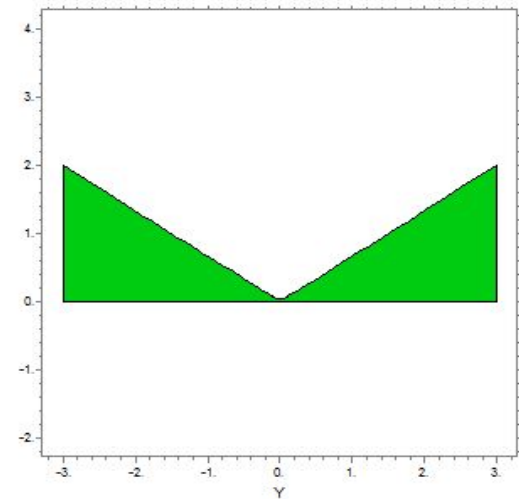
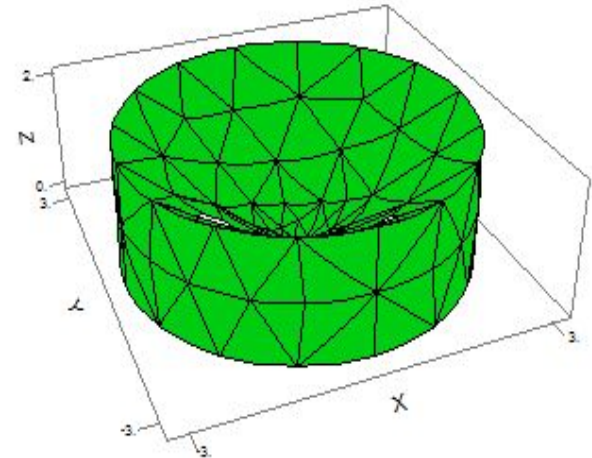


# Конус

```
TITLE 'Cone'  
COORDINATES cartesian3  
VARIABLES U  
DEFINITIONS  
r0=2 r=3 h=2  
rad=max(0,sqrt(x^2+y^2))  
EXTRUSION  
surface z=0  
surface z=h*(rad)/(r)
```

```
BOUNDARIES  
region 1  
start (r, 0) arc{ center=0,0) angle=360
```

```
PLOTS  
grid(x,y,z) paintregions as 'final mesh'  
grid(y,z) on x=0 nolines paintregions as 'Region Map'  
END
```

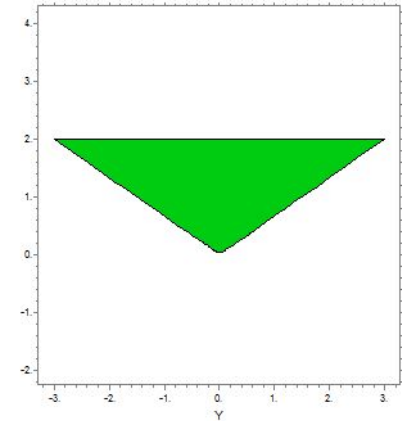
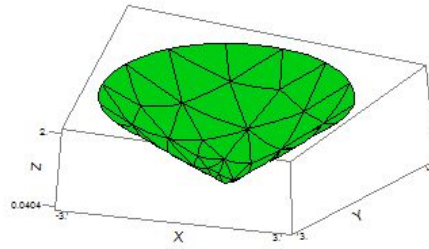


# Конус

## EXTRUSION

surface  $z=h*(rad)/(r)$

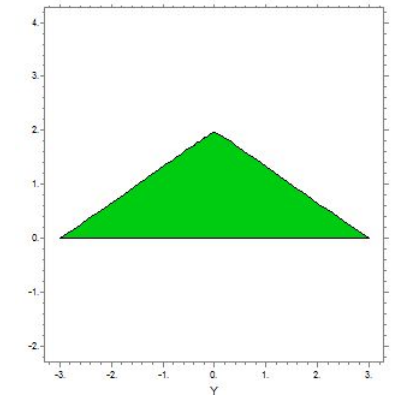
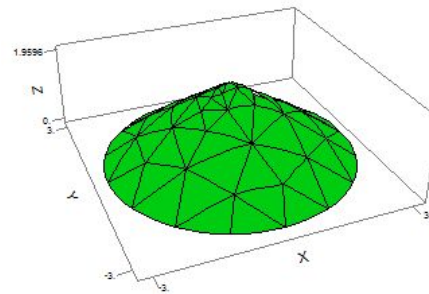
surface  $z=h$



## EXTRUSION

surface  $z=0$

surface  $z=h-h*(rad)/(r)$



## COORDINATES cartesian3

### DEFINITIONS

```
rad=sqrt(x^2+y^2)
router = 0.3    { outer radius of glass }
zglass = 0.5    { glass height }
rbase = 0.2    { radius of the base }
zbase = 0.02   { thickness of the base and cone }
rstem = 0.02  { radius of the stem }
zstem = 0.3    { height of the stem }
zslope = (zglass-zstem)/(router-rstem){ slope of conic surface }
glassangle = arctan(zslope)           { slope of conic surface }
zcone = max(0,(rad-rstem)*zslope)     { conic surface of the glass }
```

### EXTRUSION

```
surface 'bottom' z=0
layer 'base layer'
surface 'stem1' z=zbase
layer 'stem layer'
surface 'lower' z = zstem + zcone
layer 'cone layer'
surface 'upper' z = zbase*cos(glassangle) + min(zglass, zstem + zcone)
```

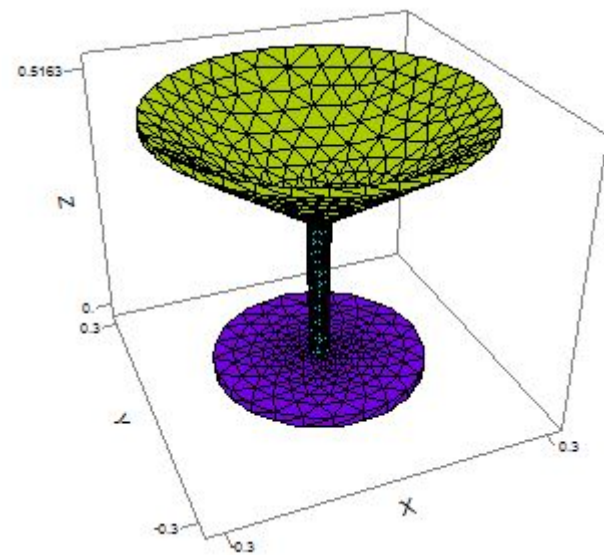
### BOUNDARIES

```
limited region 'outer'
layer 'cone layer' { outer region exists only in cone }
start (router,0) arc(center=0,0) angle=360
limited region 'base'
layer 'base layer' { base region exists only in base }
start(rbase,0) arc(center=0,0) angle=360
limited region 'stem'
layer 'stem layer' { stem region exists in the stem and the bottom of the cone }
layer 'cone layer'
start(rstem,0) arc(center=0,0) angle=360
```

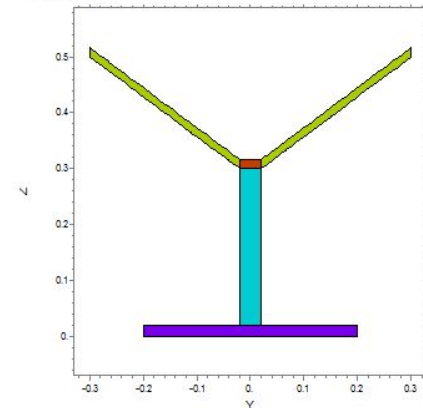
### PLOTS

```
grid(x,y,z) paintregions as "final mesh"
grid(y,z) on x=0 nolines paintregions as "Region Map"
```

END



Cocktail Glass



# Интегральные операторы

Операторы INTEGRAL и VOL\_INTEGRAL являются синонимами и производят интегрирование по **объему**.

Формат:

**INTEGRAL**(<подынтегральное выражение:», <имя\_области>)

или

**VOL\_INTEGRAL**(подынтегральное выражением  
<имя\_области>)

**Пример:** power=**vol\_integral**( Jm\*Em)

# Поверхностные интегралы

Операторы `SINTEGRAL` и `SURF_INTEGRAL` являются синонимами и выполняют интегрирование по поверхности. Формат:

**SINTEGRAL** (<integrand>, <named\_boundary>)

или

**SURF\_INTEGRAL**(<integrand>,<named\_boundary>)

## Пример

```
I1= abs(sintegral(normal(D), 'electrode1'))
```

# Линейные интегралы

Операторы `VINTEGRAL` и `LINE_INTEGRAL` являются синонимами и выполняют интегрирование по линии.

Форма записи:

**VINTEGRAL**(<integrand>, <named\_boundary>)

или

**LINE\_INTEGRAL**(<integrand>, <named\_boundary>)

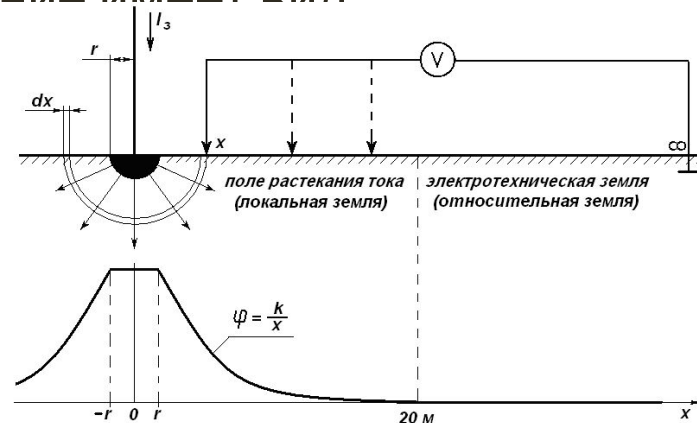


# Задача растекания токов

Постановка задачи растекания токов: Задача формулируется в виде уравнения Пуассона относительно скалярного электрического потенциала (предполагается, что вектор плотности тока лежит в плоскости модели). Для плоскопараллельных задач уравнение имеет вид

для осесимметричного случая:

Вектор плотности тока



# Вычисляемые физические величины в задачах растекания токов

*Локальные величины:*

· Скалярный электрический потенциал  $U$ ;

· Вектор напряженности электрического поля  $\vec{E} = -\text{grad}(U)$ , где

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

– в плоском случае,

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

– в осесимметричном случае;

· Вектор плотности тока:

$$j = \sigma E .$$

*Интегральные величины:*

· Электрический ток через заданную поверхность:

$$I = \oint_s (\vec{j} \cdot \vec{n}) ds$$

где  $n$  - единичный вектор нормали к поверхности. Поверхность  $s$  может быть замкнутой или разомкнутой;

· Мощность тепловыделения в заданном объеме:

$$W = \int (\vec{E} \cdot \vec{j}) dV$$

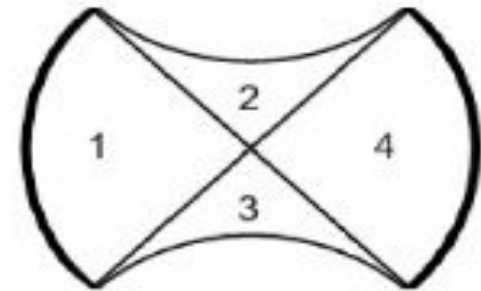
Величина	Формула	Запись в тексте программы
Системная переменная	$U$	<code>variables U</code>
Напряженность электрического поля $E$	$\vec{E} = -grad(U)$	<code>E = -grad(U)</code>
Плотность тока (изотропный материал)	$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$	<code>J = sigma*E</code>
Плотность тока (анизотропный материал)	$\vec{J} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} \cdot \vec{E}$	<code>Jx = dot(vector(sigma_xx, sigma_xy), E)</code> <code>Jy = dot(vector(sigma_yx, sigma_yy), E)</code> <code>J = vector(Jx, Jy)</code>
Поверхностная плотность тока на электроде	$j = \vec{J} \cdot \vec{n}$	<code>-normal(J)</code> (выражение используется только в контексте границы области)
Линейная плотность тока на электроде (плоская конструкция)	$j = h \cdot \vec{J} \cdot \vec{n}$	<code>-normal(J)*h</code> (выражение используется только в контексте границы области)
Ток электрода (контур описания области электрода имеет имя «electrode»)	$I = \int_S j dS = \int_S (\vec{J} \cdot \vec{n}) dS$	<code>I = sintegral(-normal(J), 'electrode')</code> <code>I = sintegral(-normal(J)*h, 'electrode')</code>

Величина	Формула	Запись в тексте программы
Мощность тепло-выделения	$Pe = \int_V (\vec{J} \cdot \vec{E}) dV$	<pre>Pe = integral(dot(J, E)), Pe = integral(h*dot(J, E))</pre>
Проводимость конструкции, выраженная через ток электрода при единичной разности потенциалов	$Y =  I  = \left  \int_S (\vec{J} \cdot \vec{n}) dS \right $	<pre>Y = abs(sintegral(normal(J), 'electrode')), Y = abs(sintegral( h*normal(J), 'electrode'))</pre>
Проводимость конструкции, выраженная через мощность тепловыделения при единичной разности потенциалов	$Y = Pe _{\Delta V=1}$	<pre>Y = integral(dot(J, E)), Y = integral(h*dot(J, E))</pre>
Максимальная величина напряженности электрического поля или плотности тока		<pre>globalmax(magnitude(E))  globalmax(magnitude(J))</pre>

# Граничные условия

<i>Тип границы</i>	<i>Выражение для граничного условия</i>
Проводник	$\text{value}(U) = \text{const}$
Плоскость симметрии	$\text{natural}(U) = 0$
Плоскость антисимметрии	$\text{value}(U) = 0$
Ось симметрии	$\text{natural}(U) = 0$
Точка, удаленная на большое расстояние от источников электрического поля	$\text{value}(U) = 0$
Граница резистивного материала	$\text{natural}(U) = 0$

# Пример расчета сопротивления пленочного резистора



**TITLE 'Resistor'**

**VARIABLES U**

**definitions**

$R = 5e-3$  ! радиус дуг

$\rho_1 = 200$   $\rho_2 = 800$  ! значения пленочных сопротивлений

$\rho_3 = 50$   $\rho_4 = 500$

$\rho$  ! параметр расчета, задаваемый в каждой расчетной области

$a = R/\sqrt{2}$   $b = R*(\sqrt{2}-1)$  ! координаты опорных точек

$E = -\text{grad}(U)$

$J = E/\rho$

$P = \text{integral}(\text{dot}(E, J))$  ! мощность тепловыделения

$I_1 = \text{abs}(\text{sintegral}(\text{normal}(J), \text{'electrode1'}))$  ! токи электродов

$I_2 = \text{abs}(\text{sintegral}(\text{normal}(J), \text{'electrode2'}))$

**EQUATIONS**

$\text{div}(J) = 0$



# Пример расчета сопротивления пленочного резистора

## EQUATIONS

$\text{div}(J) = 0$

## BOUNDARIES

REGION 1 rho = rho1

START(a, -a) value(U) = 1 arc to(R, 0) to(a, a)

natural(U) = 0 arc to(0, b) to(-a, a)

value(U) = 0 arc to(-R, 0) to(-a, -a)

natural(U) = 0 arc to(0, -b) to close

region 2 rho = rho2

start(0, 0) line to(a, a) arc to(0, b) to(-a, a)

line to close

region 3 rho = rho3

start(-a, -a) arc to(0, -b) to(a, -a)

line to(0, 0) to close

region 4 rho = rho4

start(0, 0) line to(a, -a) arc to(R, 0) to(a, a)

line to close

feature 5

start 'electrode1' (a, -a) arc to(R, 0) to(a, a)

feature 6

start 'electrode2' (-a, a) arc to(-R, 0) to (-a, -a)

## PLOTS

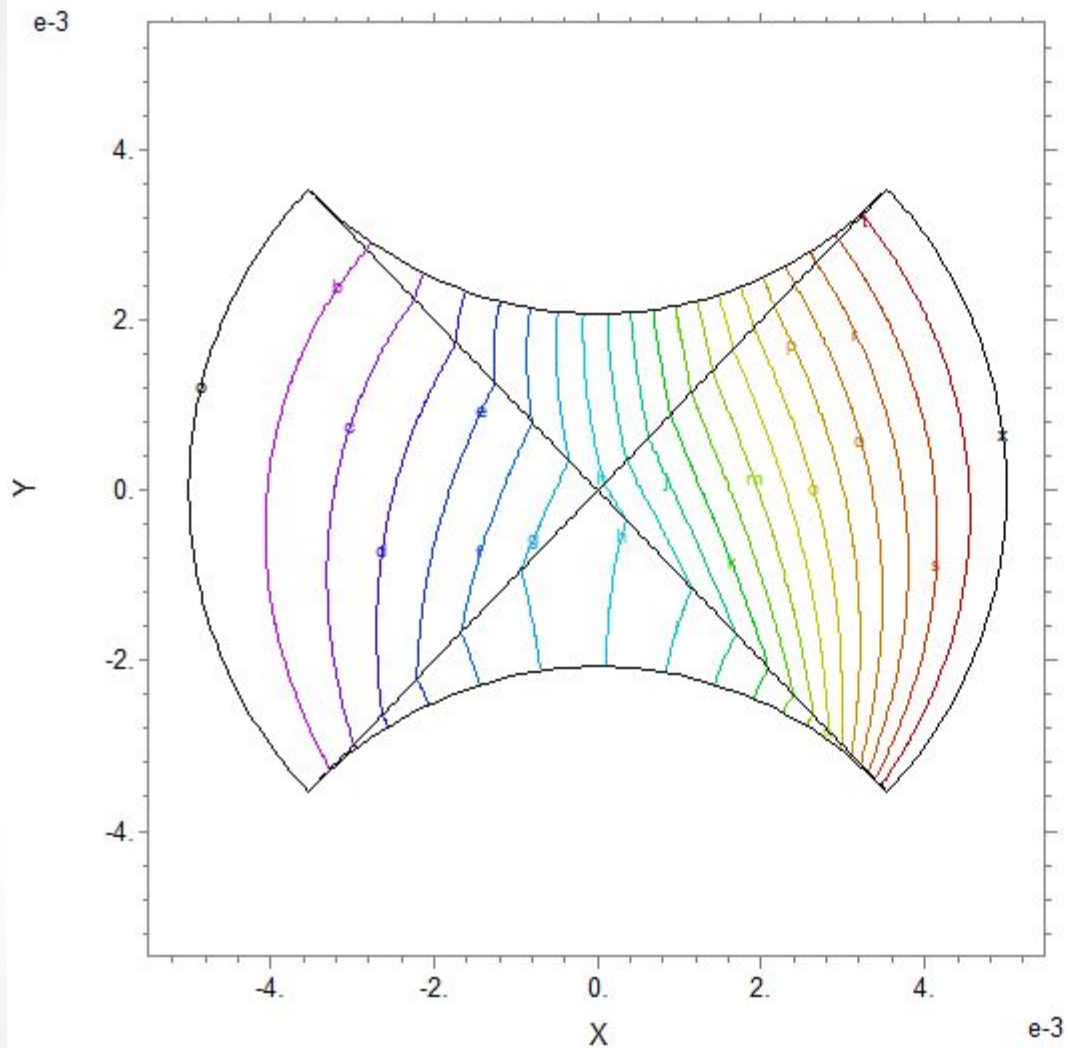
CONTOUR(u) report(1/P) report(1/I1) report(1/I2)

vector(J) norm

END

# Resistor

04:31:45 10/18/19  
FlexPDE Lite 7.15/W64



u	
max	1.00
u :	1.00
t :	0.95
s :	0.90
r :	0.85
q :	0.80
p :	0.75
o :	0.70
n :	0.65
m :	0.60
l :	0.55
k :	0.50
j :	0.45
i :	0.40
h :	0.35
g :	0.30
f :	0.25
e :	0.20
d :	0.15
c :	0.10
b :	0.05
a :	0.00
min	0.00

primer: Grid#1 P3 Nodes=86 Cells=138 RMS Err= 2.3e-4  
1/P= 443.8259 1/I1= 439.6402 1/I2= 443.7484 Integral= 2.103560e-5