Матрицы и

определители

План лекции

- Определение матрицы. Виды матриц.
- Линейные операции над матрицами.
- Умножение матриц.
- Определители второго и третьего порядков. Их свойства.
- Обратная матрица.
- Ранг матрицы.

Список литературы

- Виленкин, И.В. Высшая математика для студентов экономических, естественно-научных специальностей вузов: учеб. пособие / И.В. Виленкин, В.М. Гробер. – Ростов н/Д: Феникс, 2002.
- Виленкин, И.В. Задачник по математике. Часть 1 / И.В. Виленкин, О.Е. Кудрявцев, М.М. Цвиль, С.И. Шабаршина. – Ростов н/Д: Российская таможенная академия, Ростовский филиал, 2007.
- Ермаков, В.И. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / Под общ. ред. В.И. Ермакова – М.: ИНФРА – М,2008.
- Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник / Н. Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Фридман. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2002.

Определение матрицы. Виды матриц.

- **Матрицей размера m×n** называется прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк и *n* столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент матрицы имеет два индекса: *m* – номер строки и *n* – номер столбца. Например, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 1 \\ -3 & -4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

размера 3×4, $a_{11} = 5$, $a_{23} = 8$, $a_{34} = 6$.

Часто используется краткая запись матрицы:

$$A = (a_{ik})_{m,n}$$

Матрица называется **квадратной** n-го порядка, если она состоит из n строк и n столбцов.

Матрица размера $1 \times n$ называется **матрицей-строкой**, а матрица размера $m \times 1$ **матрицей-столбцом.**

Нулевой матрицей 0 заданного размера называется матрица, все элементы которой равны 0.

Единичной называется квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны 1, а все остальные элементы равны 0:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонированной для матрицы A называется матрица A^T, строки которой являются столбцами матрицы , а столбцы – строками . Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ то } \quad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -9 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называются **равными**, если $a_{ik} = b_{ik}$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$.

Линейные операции над матрицами.

Суммой матриц $A=(a_{ik})_{m,n}$ и $B=(b_{ik})_{m,n}$ называется матрица $A+B=(a_{ik}+b_{ik})_{m,n}$.

Складываются матрицы только одинакового размера.

~~*Например*~~**.**

Найти сумму и разность матриц А и В:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы A **на число** λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ik})_{m,n}$.

Другими словами, для умножения матрицы на число надо каждый элемент матрицы умножить на это число. Любую матрицу можно умножить на любое число.

~~Например:~~

Умножая матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

на число 2, получим:

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 3\cdot 2 & 0\cdot 2 \\ 1\cdot 2 & 0\cdot 2 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Для любых матриц одинакового размера и любых чисел и выполняются свойства:

1 $A + B = B + A$

2 $A + 0 = A$

3 $A + (B + C) = (A + B) + C$

4 $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

5 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

6 $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

Умножение матриц

Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{m,p}$ **на матрицу** $B = (b_{ik})_{p,n}$ называется матрица C размера $m \times n$ с элементами $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \cdot b_{jk}$,

$i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Другими словами, для получения элемента, стоящего в i-той строке матрицы-произведения на k-том месте, следует вычислить сумму произведений элементов i-той строки матрицы A на k-тый столбец матрицы B.

В самом определении произведения матриц заложено, что число столбцов первой матрицы должно совпадать с числом строк второй.

Это условие согласования матриц при умножении.

Если оно нарушено, то матрицы перемножить нельзя.

Заметим, что вполне возможна ситуация, когда $A \cdot B$ существует, а $B \cdot A$ нет.

Приведем еще ряд свойств операции умножения матриц. Если A, B и C - квадратные матрицы одного порядка, то справедливы равенства:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. $A \cdot E = E \cdot A = A$

Например.

Найти произведение матриц:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно их произведение существует:

$$\underset{2\times 3}{A}\cdot\underset{3\times 2}{B}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+3\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 4+0\cdot 2\\ 1\cdot 1+0\cdot 1+4\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 4+4\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 1 & 8\end{pmatrix}$$

Определители второго и третьего порядков. Их свойства

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц. Рассмотрим квадратную матрицу $2^{\underline{го}}$ порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Определителем $2^{\underline{го}}$ порядка матрицы называется число:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица 3<u>го</u> порядка.

Минором элемента a_{ik} называется определитель M_{ik}, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания из матрицы i -той строки и k-того столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} называется число

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \quad .$$

Определителем 3-го порядка (матрицы) называется сумма произведений элементов первой строки матрицы на их алгебраические дополнения.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

Например:

1) Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда $|A| = 4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 20 + 6 = 26.$

2) Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 47 + 4 \cdot 26 = 285.$$

Свойства определителей:

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен 0.
3. Если две строки (два столбца) поменять местами, то определитель меняет знак.
4. Если элементы какой-либо строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.
5. Если в определителе две строки (два столбца) одинаковы или пропорциональны, то определитель равен 0.

6. Справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

7. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
8. Сумма произведений элементов **любой** строки (столбца) на свои алгебраические дополнения равна самому определителю.
9. Сумма произведений элементов **любой** строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна 0.

Числовая иллюстрация свойств:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 104 + 5 \cdot 18 - 8 \cdot (-29) = 634;$$

$$\left|A^T\right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 9 & 7 \\ -8 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 104 - 1 \cdot 6 + 4 \cdot 82 = 634.$$

Числовая иллюстрация свойств:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -\left(0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \right) = 0.$$

Числовая иллюстрация свойств:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 23 + 5\cdot 11 - 8\cdot(-5) = 164.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 4\cdot(-34) - 7\cdot(-2) + 3\cdot(-14) = -164.$$

Числовая иллюстрация свойств:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-14) - 2\cdot 17 - 3\cdot(-16) = 0.$$

Числовая иллюстрация свойств:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 21 & -42 & 63 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 21\cdot 1 & 21\cdot\left(-2\right) & 21\cdot 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 21\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 21\cdot\left(2\cdot(-8) + 1\cdot(-11) + 1\cdot 10\right) = -357.$$

Числовая иллюстрация свойств:

$$\begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7+5 & 3-2 & 5-3 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Числовая иллюстрация свойств:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -4\\ 8 & 11 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -4\\ 2\cdot 1+3\cdot 2 & 2\cdot(-2)+3\cdot 5 & 2\cdot 3+3\cdot(-4)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -4\\ 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 3\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -4\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-4)\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -4\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -4\\ 2 & 5 & -4\end{vmatrix}=2\cdot 0+3\cdot 0=0.$$

Обратная матрица.

Матрица A^{-1} **называется обратной** к квадратной матрице A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица называется вырожденной, если $\Delta(A) = 0$; в противном случае A – **невырожденная матрица.**

Теорема. Для того, чтобы матрица имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $\Delta(A) \neq 0$

Например:

Найти обратную матрицу для $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}.$

Имеем:

$$a_{11}^{*}=(-1)^{2}|A_{11}|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=3; \quad a_{12}^{*}=(-1)^{3}|A_{12}|=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4; \quad a_{13}^{*}=(-1)^{4}|A_{13}|=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & -3\end{vmatrix}=6;$$

$$a_{21}^{*}=(-1)^{3}|A_{21}|=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-11; \quad a_{22}^{*}=(-1)^{4}|A_{22}|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5; \quad a_{23}^{*}=(-1)^{5}|A_{23}|=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=7;$$

$$a_{31}^{*}=(-1)^{4}|A_{31}|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2; \quad a_{32}^{*}=(-1)^{5}|A_{32}|=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-7; \quad a_{33}^{*}=(-1)^{6}|A_{33}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=4.$$

Таким образом:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 6\\ -11 & -5 & 7\\ 2 & -7 & 4\end{pmatrix}.$$

Тогда $\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 2 \\ 4 & -5 & -7 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$

Вычисляя определитель матрицы *A*, получаем $|A|=29$.

Теперь по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{29}\cdot\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{29} & -\frac{11}{29} & \frac{2}{29} \\ \frac{4}{29} & -\frac{5}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{6}{29} & \frac{7}{29} & \frac{4}{29} \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Если A и B невырожденные квадратные матрицы одинакового порядка, то*

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Ранг матрицы.

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Выберем в матрице A произвольно k строк и k столбцов

$(k \le \min(m,n))$. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, составляют матрицу порядка k . Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка.

Если все миноры k-го порядка равны нулю, то равны нулю и все миноры более высокого порядка.

Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы называется рангом этой матрицы (*rangA* или *r(A)*).

Метод вычисления ранга матрицы

1. При вычислении ранга матрицы нужно переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков;
2. Если уже найден минор k-го порядка d отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры $k+1$-го порядка, окаймляющие минор d. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Свойства ранга матрицы

1) Если матрица A имеет размеры $m \times n$, то

$$rangA \le \min(m,n);$$

2) $rangA = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны нулю;

3) если матрица A - квадратная матрица порядка n, то $rangA=n$ тогда и только тогда, когда определитель матрицы $\Delta(A) \neq 0$.

Обозначим строки (столбцы) матрицы A через

C_i , $i = 1,2,...m.$

Строки (столбцы) матрицы $C_1, C_2, ..., C_m$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m,$ не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк (столбцов) матрицы равна нулевой строке:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + ... + \lambda_m C_m = \theta,$$

где $\theta = (0,0,...,0).$

В противном случае строки матрицы называются линейно независимыми.

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов) (*rangA* или *r(A)*).

Элементарные преобразования матрицы

1. Отбрасывание нулевой строки(столбца) матрицы.
2. Умножение всех элементов строки(столбца) матрицы на число , неравное нулю.
3. Изменение порядка строк(столбцов)матрицы.
4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
5. Транспонирование матрицы.

Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\dots,r; \quad r \leq k.$

Ранг ступенчатой матрицы равен r.

Спасибо за внимание!