

**ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ**

**Лекция**

**по учебной дисциплине «Цифровая схемотехника и  
обработка сигналов»**

**(Д-0205-1)**

**Тема № 9: «Описание ЛДС в частотной области»  
Занятие № 32: «Расчёт частотных и импульсных  
характеристик БИХ-цепей 2-го порядка»**

Руководитель занятия – доцент кафедры, к.т.н., доцент,  
полковник Филимонов Василий Александрович

г. Санкт-Петербург  
2018





# Учебные цели:

1. Сформировать у курсантов навыки самостоятельного расчёта и анализа передаточных функций, частотных и импульсных характеристик БИХ- цепей.
2. Подготовить курсантов к лабораторной работе



# Учебные вопросы:

1. Расчёт ИХ БИХ-цепей 2-го порядка.
2. Расчёт частотных характеристик БИХ-цепей 2-го порядка.



# Литература:

1. Цифровая обработка сигналов. Краткий курс / Д.А. Улахович. – СПб.: ВАС, 2017 – 408 с. (стр. 44 – 49, 74 – 76, 88 – 105).
2. Цифровая обработка сигналов./ Авторы: Д. А. Улахович, А. А. Давыдов, О. И. Кривошей/ Электронное учеб. пособие /– СПб.: ВАС, 2015.
3. Лабораторный практикум по курсу «Цифровая обработка сигналов»/ Авторы: Д. А. Улахович, В. А. Филимонов/ – СПб, ВАС, 2015 (стр. 13-20).



# Первый учебный вопрос

5

## Расчёт ИХ БИХ-цепей 2-го порядка



# Первый учебный вопрос

**Задача 1.** Вычислить 10 отчетов импульсной характеристики по заданному разностному уравнению:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n - 1) + b_2x(n - 2) - a_1y(n - 1) - a_2y(n - 2),$$

которому соответствует передаточная функция:



$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

Результаты занести в таблицу:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h(n)$										
$y(n)$										

Построить график импульсной характеристики.



# Второй учебный вопрос

7

## Расчёт частотных характеристик БИХ-цепей 2-го порядка

# Второй учебный вопрос

**Задача 2.** Получить выражения для расчета нулей и полюсов ПФ, АЧХ, ФЧХ и формулы экспресс-анализа для вычисления АЧХ БИХ-цепи по заданному разностному уравнению:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2).$$

*Решение.*

Передаточная функция:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}};$$

Нули  $\beta_{1,2}$  и полюсы  $\alpha_{1,2}$  ПФ определяются из решения уравнений:

$$b_0z^2 + b_1z + b_2 = 0 \quad \text{и} \quad z^2 + a_1z + a_2 = 0,$$

получаемых приравниванием к нулю числителя и знаменателя передаточной функции после их умножения на  $z^2$ . Результатом решения уравнений являются:

а) нули:

$$\beta_{1,2} = z_{01,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_0} = -\frac{b_1}{2b_0} \pm \frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_0}.$$



# Второй учебный вопрос

Если дискриминант неотрицательный, то ПФ содержит только вещественные нули; в противном случае ПФ обладает двумя комплексно-сопряжёнными нулями:

$$\beta_1 = z_{01} = r_0 e^{j\omega_0} \text{ и } \beta_2 = z_{02} = r_0 e^{-j\omega_0}; \beta_2 = \beta_1^*,$$

где  $r_0$  – радиус нуля;  $\omega_0$  – частота (угол).

Тогда

$$\beta_{1,2} = z_{01,2} = -\frac{b_1}{2b_0} \pm \frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_0} = \xi_0 \pm j\eta_0 = r_0 e^{\pm j\omega_0}$$

;

$$r_0 = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}; \hat{\omega}_0 = \arctg \frac{\pm \eta_0}{\xi_0} = \pm \arctg \frac{\sqrt{4b_0b_2 - b_1^2}}{b_1}$$

[рад];



# Второй учебный вопрос

б) полюсы:

$$\alpha_{12} = z_{*12} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

Если дискриминант неотрицательный, то имеем вещественные полюсы; в противном случае ПФ обладает двумя комплексно-сопряжёнными полюсами:

$$\alpha_1 = z_{*1} = r_* e^{j\hat{\omega}_*} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = z_{*2} = r_* e^{-j\hat{\omega}_*},$$

где  $r_*$  – радиус полюса;  $\hat{\omega}_*$  – частота полюса.

Отсюда получаем:

$$r_* = \sqrt{a_2}; \quad \hat{\omega}_* = \arccos\left(\frac{-a_1}{2r_*}\right).$$

Эти соотношения позволяют записать формулы для коэффициентов знаменателя ПФ:

$$a_2 = r_*^2; \quad a_1 = -2r_* \cos(\hat{\omega}_*),$$

откуда следует, что при комплексных полюсах коэффициент  $a_2 > 0$ .



# Второй учебный вопрос

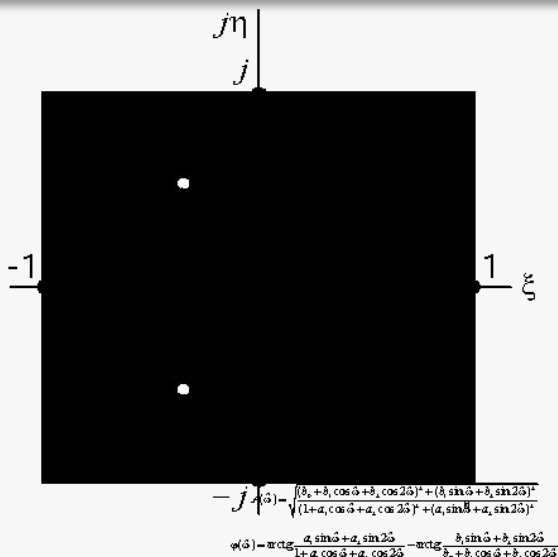


Рисунок. 1. Пример расположения комплексно-сопряжённых полюсов и нулей

Из передаточной функции при  
для АЧХ и ФЧХ:

нетрудно получить выражения

;



# Второй учебный вопрос

Из этих формул легко получаются удобные выражения (формулы экспресс-анализа) для вычисления АЧХ и ФЧХ на трёх частотах:

1.  $\hat{\omega} = 0, z = 1,$

$$A(0) = |H(1)| = \left| \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \right|; \quad \varphi(0) = 0.$$

2.  $\hat{\omega} = \pi/2, z = j,$

$$A(\pi/2) = |H(j)| = \sqrt{\frac{(b_0 - b_2)^2 + b_1^2}{(1 - a_2)^2 + a_1^2}};$$

$$\varphi(\pi/2) = \operatorname{arctg} \frac{a_1}{1 - a_1} - \operatorname{arctg} \frac{b_1}{b_0 - b_2}.$$

3.  $\hat{\omega} = \pi, z = -1,$

$$A(\pi) = |H(-1)| = \left| \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \right|; \quad \varphi(\pi) = 0.$$

# Второй учебный вопрос

**Важно:** для оценки вида АЧХ цепи 2-го порядка необходимо произвести также вычисления  $A(\hat{\omega})$  на частотах нуля  $\hat{\omega} = \hat{\omega}_0$  и полюса  $\hat{\omega} = \hat{\omega}_*$  передаточной функции:

4.  $\hat{\omega} = \hat{\omega}_*$ ,

$$A(\hat{\omega}_*) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos \hat{\omega}_* + b_2 \cos 2\hat{\omega}_*)^2 + (b_1 \sin \hat{\omega}_* + b_2 \sin 2\hat{\omega}_*)^2}{(1 + a_1 \cos \hat{\omega}_* + a_2 \cos 2\hat{\omega}_*)^2 + (a_1 \sin \hat{\omega}_* + a_2 \sin 2\hat{\omega}_*)^2}}.$$

5.  $\hat{\omega} = \hat{\omega}_0$ ,

$$A(\hat{\omega}_0) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos \hat{\omega}_0 + b_2 \cos 2\hat{\omega}_0)^2 + (b_1 \sin \hat{\omega}_0 + b_2 \sin 2\hat{\omega}_0)^2}{(1 + a_1 \cos \hat{\omega}_0 + a_2 \cos 2\hat{\omega}_0)^2 + (a_1 \sin \hat{\omega}_0 + a_2 \sin 2\hat{\omega}_0)^2}}.$$

# Второй учебный вопрос

**Задача 3.** Рассчитать и построить графики АЧХ по семи точкам, используя формулы экспресс-анализа, ФЧХ и карты нулей и полюсов по следующим исходным данным: частота дискретизации  $f_d = N_0$  бр. [кГц];  $b_2 = 0$ .

*Таблица исходных данных*

№ бр.	коэффициенты ПФ			
	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$
1	1,2	0,81	0	1
2	-1,2	0,81	0	1
3	1	0,64	1	0
4	-0,7	0,49	0	1
5	1	0,81	1	0
6	-1	0,81	1	0
7	0,48	0,36	1	0
8	1,2	0,81	1	0
9	-1,2	0,81	1	0
10	1	0,64	0	0,5
11	-0,7	0,49	1	0
12	0,48	0,36	0	0,5
13	-1	0,81	1	1
14	1	0,81	1	-1



# Второй учебный вопрос

## Анализ полученных решений:

частотные характеристики являются периодическими функциями частоты;

нули и полюсы цепей второго порядка могут быть как вещественными так и комплексно-сопряженными;

изменение знака коэффициента  $a_1$  приводит к АЧХ симметричной относительно  $\hat{\omega} = \pi$ ;

коэффициент  $a_1$  отвечает за центральную частоту полосы пропускания;

увеличение коэффициента  $a_2$  по модулю приводит к более высокой избирательности АЧХ;

АЧХ цифровой цепи может превышать 1, т. е. цифровые цепи обладают свойством усиления;