Производная

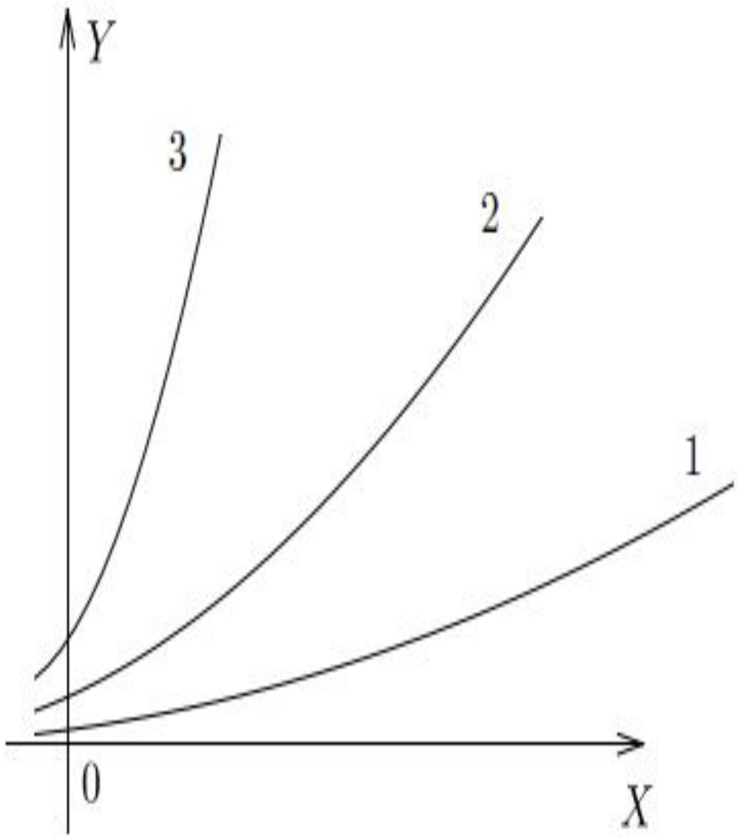
Преподаватель:
Сандакова О.В.

Производная функции. Геометрический смысл производной

Запомним определение:

Производная – это скорость изменения функции.

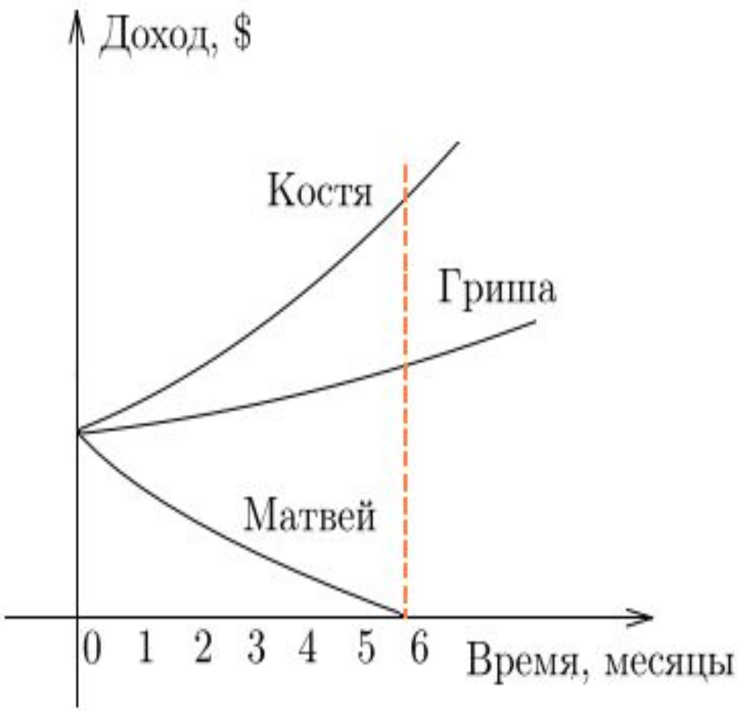
На рисунке – графики трех функций. Как вы думаете, какая из них быстрее растет?



Ответ очевиден – третья. У нее самая большая скорость изменения, то есть самая большая производная.

Вот другой пример.

Костя, Гриша и Матвей одновременно устроились на работу. Посмотрим, как менялся их доход в течение года:



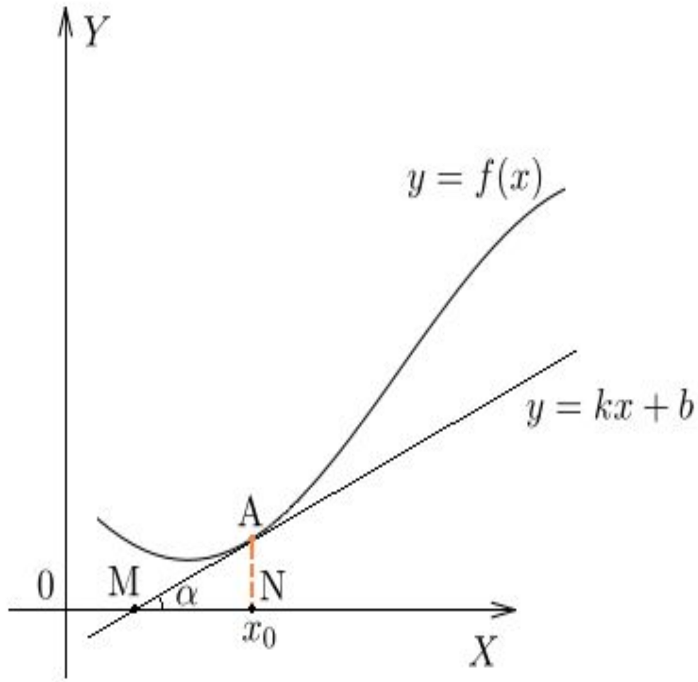
На графике сразу все видно, не правда ли? Доход Кости за полгода вырос больше чем в два раза. И у Гриши доход тоже вырос, но совсем чуть-чуть. А доход Матвея уменьшился до нуля. Стартовые условия одинаковые, а скорость изменения функции, то есть *производная*, — разная. Что касается Матвея — у его дохода производная вообще отрицательна.

Интуитивно мы без труда оцениваем скорость изменения функции. Но как же это делаем?

На самом деле мы смотрим, насколько круто идет вверх (или вниз) график функции. Другими словами – насколько быстро меняется y с изменением x. Очевидно, что одна и та же функция в разных точках может иметь разное значение производной – то есть может меняться быстрее или медленнее.

Производная функции обозначается $f'(x)$.

Покажем, как найти $f'(x)$ с помощью графика.



Нарисован график некоторой функции $y = f(x)$. Возьмем на нем точку A с абсциссой x_0. Проведём в этой точке касательную к графику функции. Мы хотим оценить, насколько круто вверх идет график функции. Удобная величина для этого — *тангенс угла наклона касательной.*

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке.

$f'(x_0) = tg\,\alpha$

Обратите внимание – в качестве угла наклона касательной мы берем угол между касательной и положительным направлением оси OX.

Иногда учащиеся спрашивают, что такое касательная к графику функции. Это прямая, имеющая на данном участке единственную общую точку с графиком, причем так, как показано на нашем рисунке. Похоже на касательную к окружности.

Найдем $k = tg\,\alpha$. Мы помним, что тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Из треугольника AMN:

$$f'(x_0) = tg\,\alpha = \frac{AN}{MN}$$

Есть и другое важное соотношение. Вспомним, что прямая задается уравнением

$$y = kx + b.$$

Величина k в этом уравнении называется *угловым коэффициентом прямой.* Она равна тангенсу угла наклона прямой к оси X.

$$k = tg\,\alpha.$$

Мы получаем, что

$$f'(x_0) = tg\,\alpha = k$$

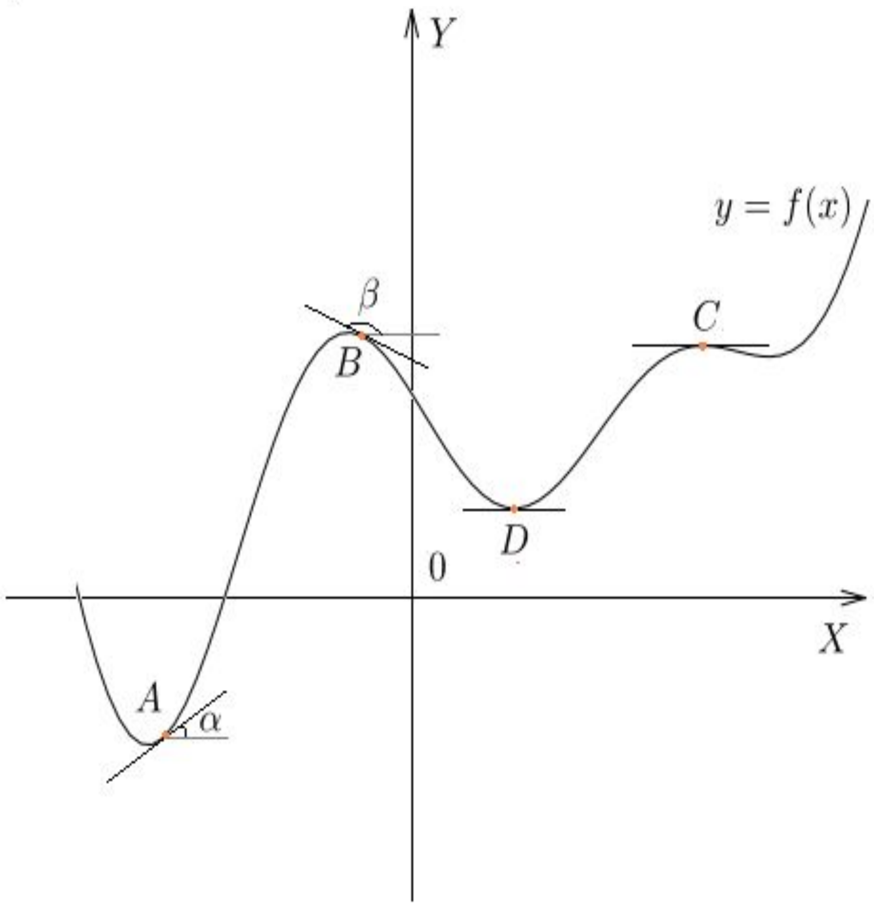
Запомним эту формулу. Она выражает геометрический смысл производной.

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Другими словами, производная равна тангенсу угла наклона касательной.

Мы уже сказали, что у одной и той же функции в разных точках может быть разная производная. Посмотрим, как же связана производная с поведением функции.

Нарисуем график некоторой функции $y = f(x_0)$. Пусть на одних участках эта функция возрастает, на других – убывает, причем с разной скоростью. И пусть у этой функции будут точки максимума и минимума.



В точке A функция $f(x_0)$ возрастает. Касательная к графику, проведенная в точке A, образует острый угол α с положительным направлением оси X. Значит, в точке A производная положительна.

В точке B наша функция убывает. Касательная в этой точке образует тупой угол β с положительным направлением оси X. Поскольку тангенс тупого угла отрицателен, в точке B производная отрицательна.

Вот что получается:

Если функция $y = f\left(x\right)$ *возрастает, ее производная положительна.*

Если $f\left(x\right)$ *убывает, ее производная отрицательна.*

А что же будет в точках максимума и минимума? Мы видим, что в точках C (точка максимума) и D (точка минимума) касательная горизонтальна. Следовательно, тангенс угла наклона касательной в этих точках равен нулю, и производная тоже равна нулю.

Точка C – точка максимума. В этой точке возрастание функции сменяется убыванием. Следовательно, знак производной меняется в точке C с «плюса» на «минус».

В точке D – точке минимума – производная тоже равна нулю, но ее знак меняется с «минуса» на «плюс».

Вывод: с помощью производной можно узнать о поведении функции всё, что нас интересует.

Если производная $f'\left(x\right)$ *положительна, то функция* $f\left(x\right)$ *возрастает.*

Если производная отрицательная, то функция убывает.

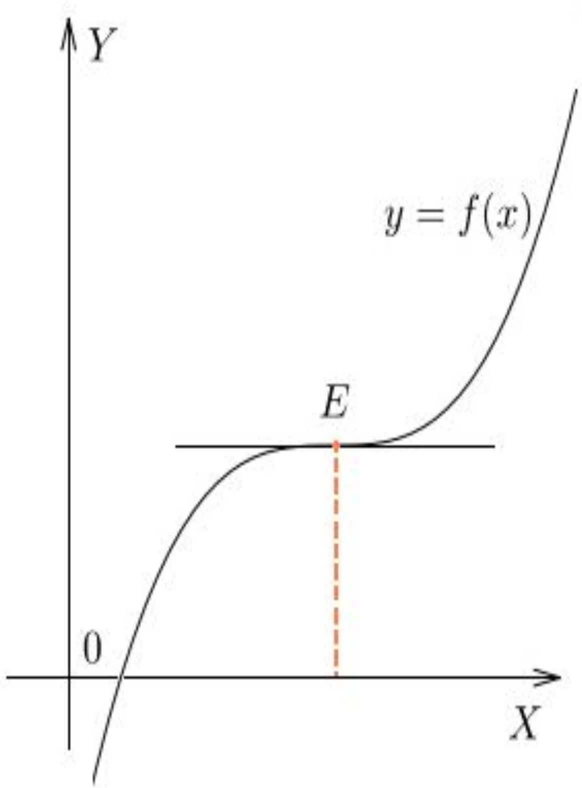
В точке максимума производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус».

В точке минимума производная тоже равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс».

Запишем эти выводы в виде таблицы:

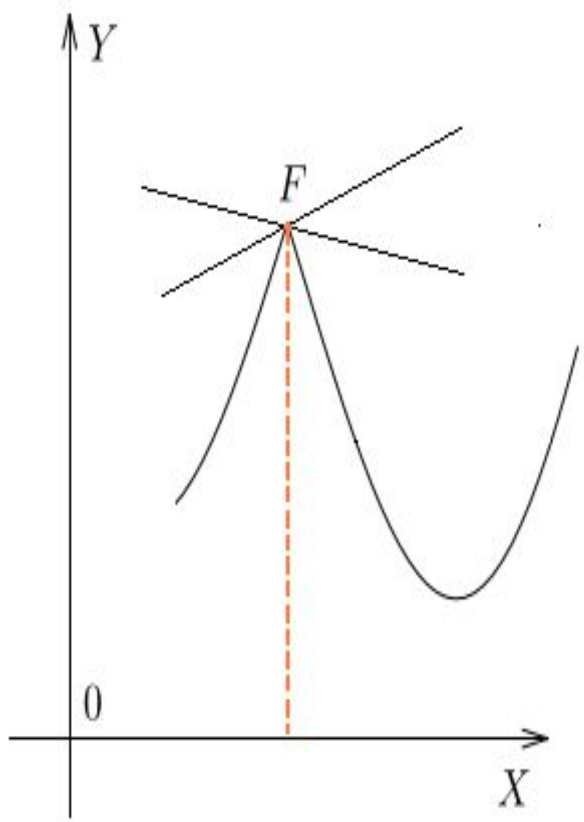
$f(x)$	возрастает	точка максимума	убывает	точка минимума	возрастает
$f'(x)$	+	0	-	0	+

1. Возможен случай, когда производная функции в какой-либо точке равна нулю, но ни максимума, ни минимума у функции в этой точке нет. Это так называемая *точка перегиба*:



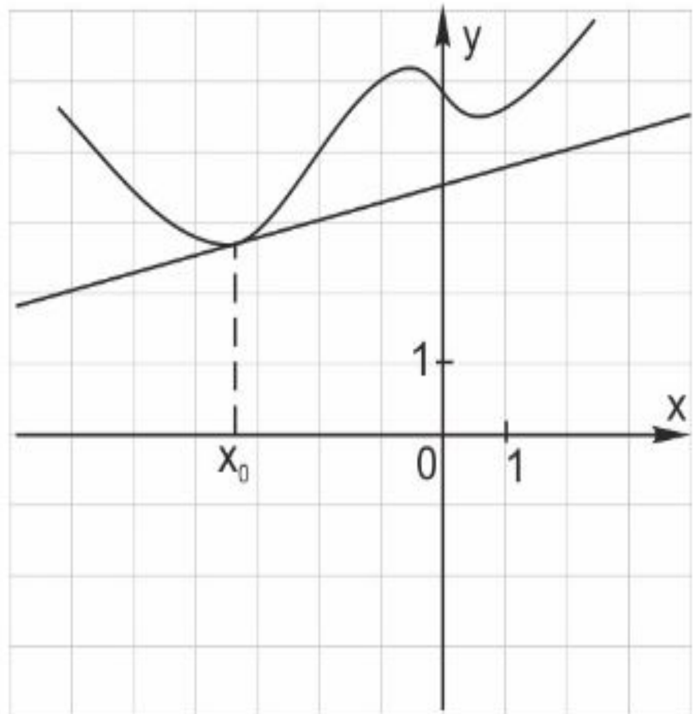
В точке E касательная к графику горизонтальна, и производная равна нулю. Однако до точки E функция возрастала – и после точки E продолжает возрастать. Знак производной не меняется – она как была положительной, так и осталась.

2. Бывает и так, что в точке максимума или минимума производная не существует. На графике это соответствует резкому излому, когда касательную в данной точке провести невозможно.



Задачи на производные

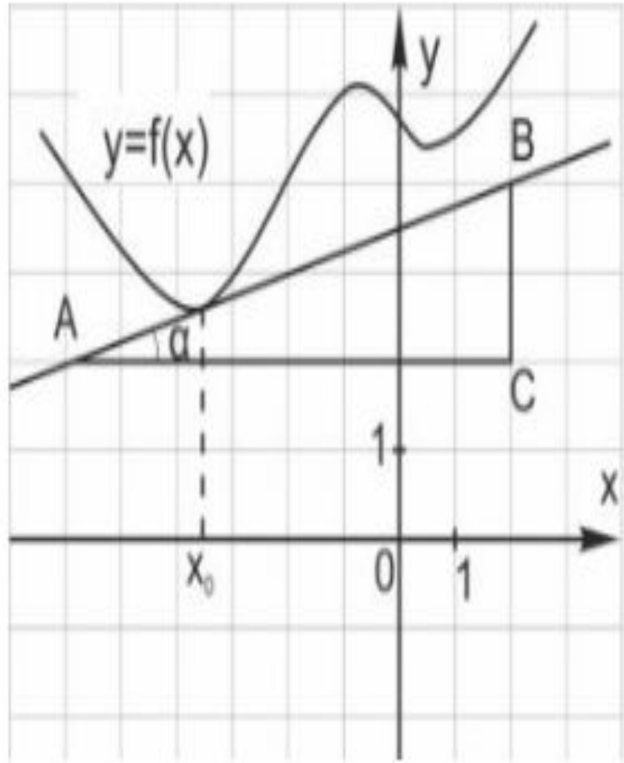
1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной в точке x_0.

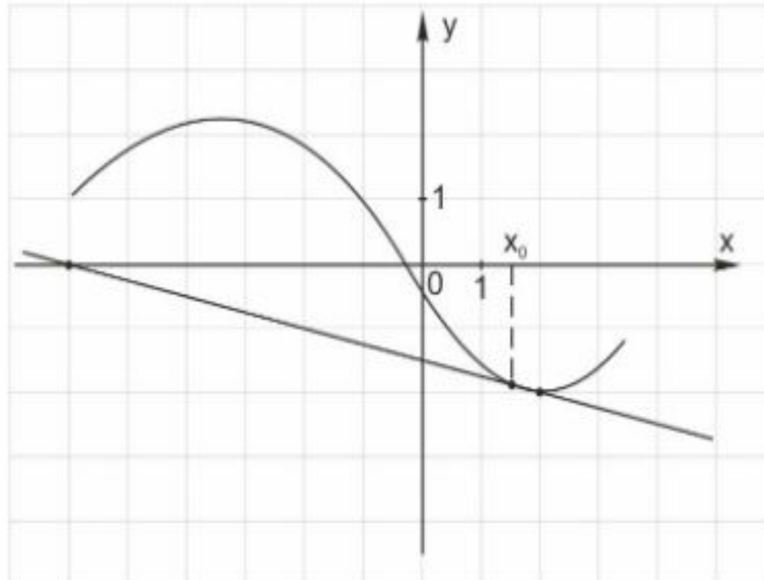
Достроив до прямоугольного треугольника ABC, получим:

$f'(x_0) = tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{8} = 0,25$



Ответ: 0,25.

2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.



Начнём с определения знака производной. Мы видим, что в точке x_0 функция убывает, следовательно, её производная отрицательна. Касательная в точке x_0 образует тупой угол α с положительным направлением оси X. Поэтому из прямоугольного треугольника мы найдём тангенс угла φ, смежного с углом α.

Мы помним, что тангенс угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего катета к прилежащему: $tg\varphi = 0,25.$ Поскольку $\alpha + \varphi = 180°$, имеем:

$$tg\alpha = tg(180° - \varphi) = -tg\varphi = -0,25.$$

Ответ: -0, 25.

Касательная к графику функции

3. Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$.

Найдите абсциссу точки касания.

Запишем условие касания функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ в точке x_0.

При $x = x_0$ значения выражений $f(x)$ и $kx + b$ равны.

При этом производная функции $f(x)$ равна угловому коэффициенту касательной, то есть k.

$$\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \\ 3x^2 + 14x + 7 = -4 \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x = -1$ или $x = -\frac{11}{3}$. Первому уравнению удовлетворяет только $x = -1$.

Физический смысл производной

Мы помним, что производная — это скорость изменения функции.

Мгновенная скорость — это производная от координаты по времени. Но это не единственное применение производной в физике. Например, сила тока — это производная заряда по времени, то есть скорость изменения заряда. Угловая скорость — производная от угла поворота по времени.

Множество процессов в природе, экономике и технике описывается дифференциальными уравнениями — то есть уравнениями, содержащими не только сами функции, но и их производные.

4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 3t - 29$*, где* x *– расстояние от точки отсчета в метрах,* t *– время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени* $t = 3$ *с.*

Мгновенная скорость движущегося тела является производной от его координаты по времени. Это физический смысл производной. В условии дан закон изменения координаты материальной точки, то есть расстояния от точки отсчета: $x\left(t\right) = t^2 - 3t - 29.$

Найдем скорость материальной точки как производную от координаты по времени:

$v\left(t\right) = x'\left(t\right) = 2t - 3.$ В момент времени $t = 3$ получим:

$v\left(3\right) = 2 \cdot 3 - 3 = 3.$

Ответ: 3

Применение производной к исследованию функций

Каждый год в вариантах ЕГЭ встречаются задачи, в которых старшеклассники делают одни и те же ошибки.

Например, на рисунке изображен график функции – а спрашивают о производной. Кто их перепутал, тот задачу не решил.

Или наоборот. Нарисован график производной – а спрашивают о поведении функции.

И значит, надо просто внимательно читать условие. И знать, как же связана производная с поведением функции.

Если $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ возрастает.

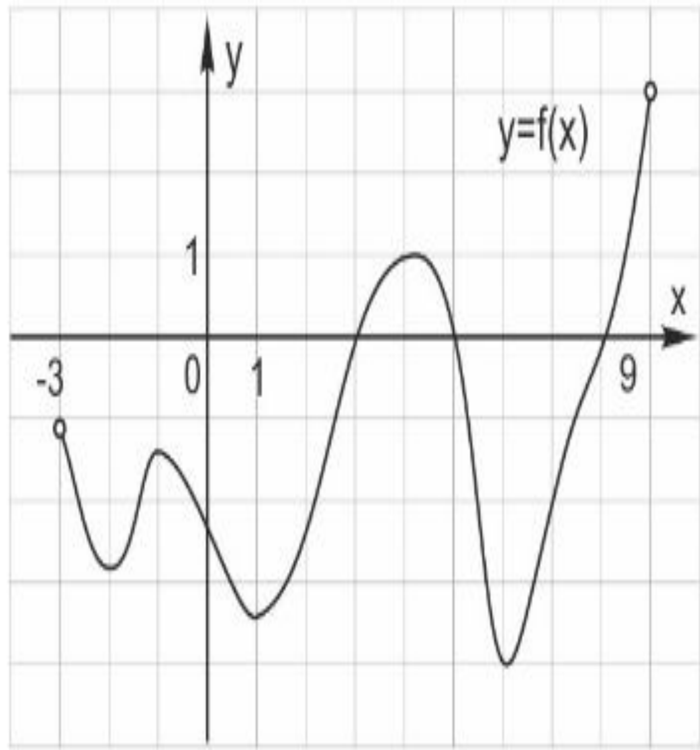
Если $f'(x)<0$, то функция $f(x)$ убывает.

В точке максимума производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус».

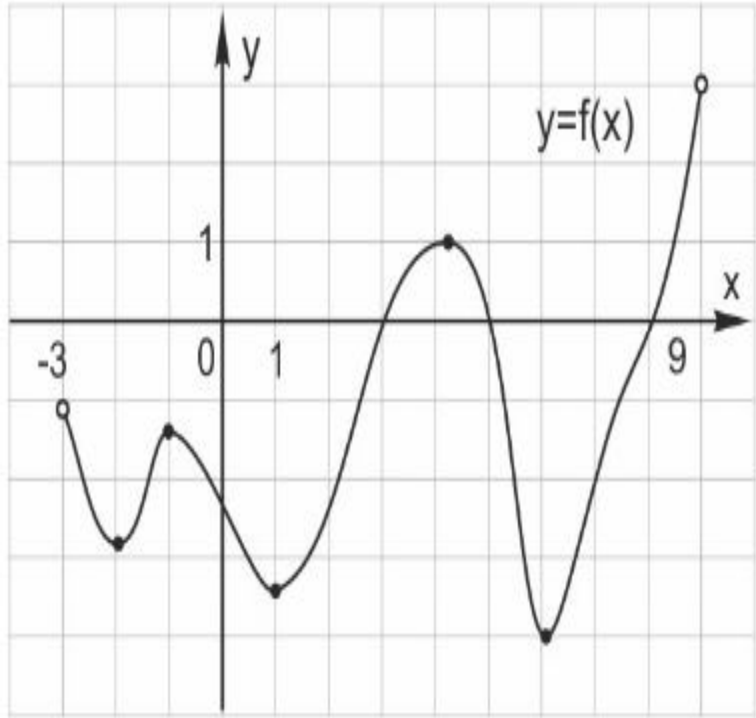
В точке минимума производная тоже равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс».

$f(x)$	возрастает	точка максимума	убывает	точка минимума	возрастает
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$*, определенной на интервале* $(-3; 9)$*. Найдите количество точек, в которых производная функции* $f(x)$ *равна 0.*

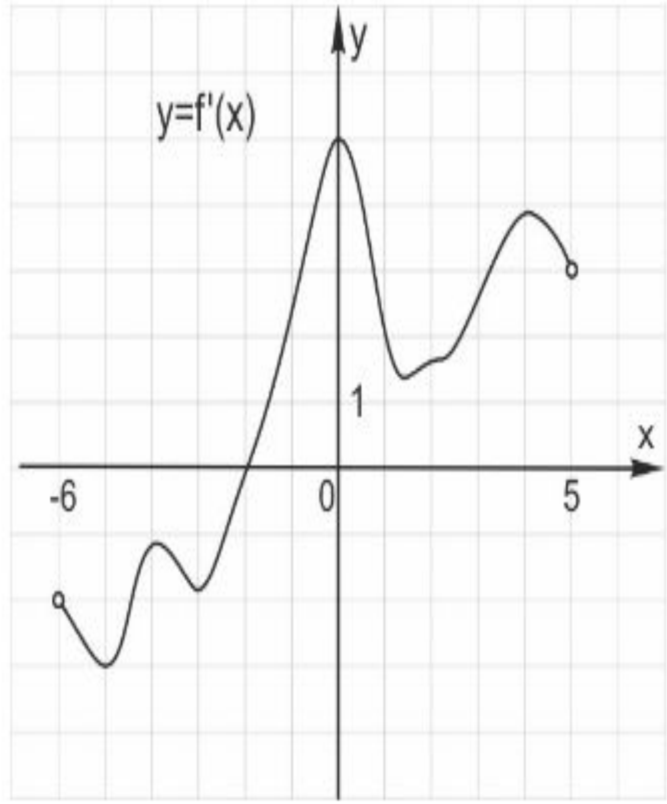


Производная функции $f'(x)=0$ в точках максимума и минимума функции $f(x)$. Таких точек на графике 5.



Ответ: 5.

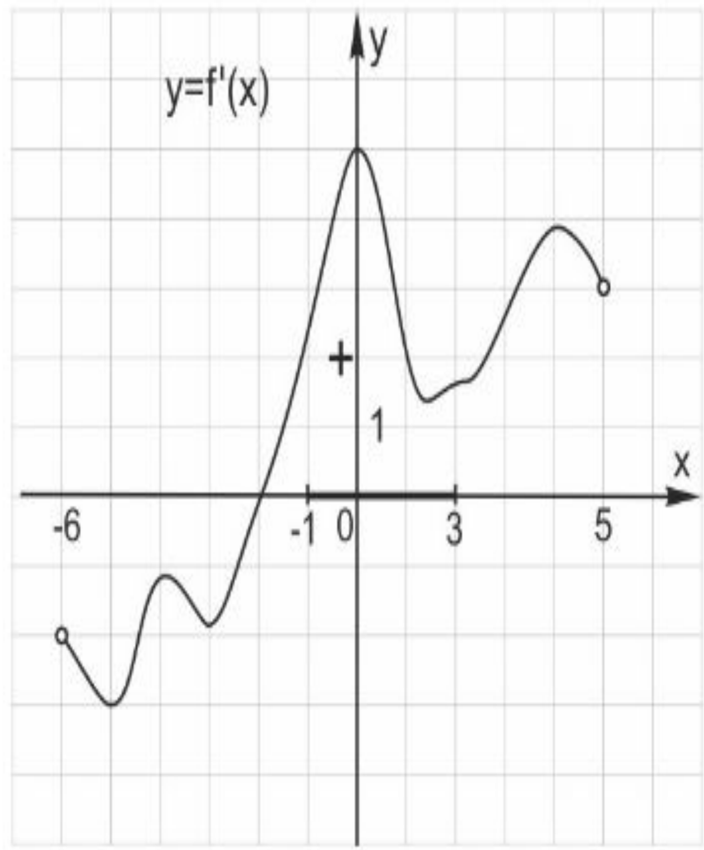
6. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Не спешим. Зададим себе два вопроса: что изображено на рисунке и о чем спрашивается в этой задаче?

Изображен график производной, а спрашивают о поведении функции. График функции не нарисован. Но мы знаем, как производная связана с поведением функции.

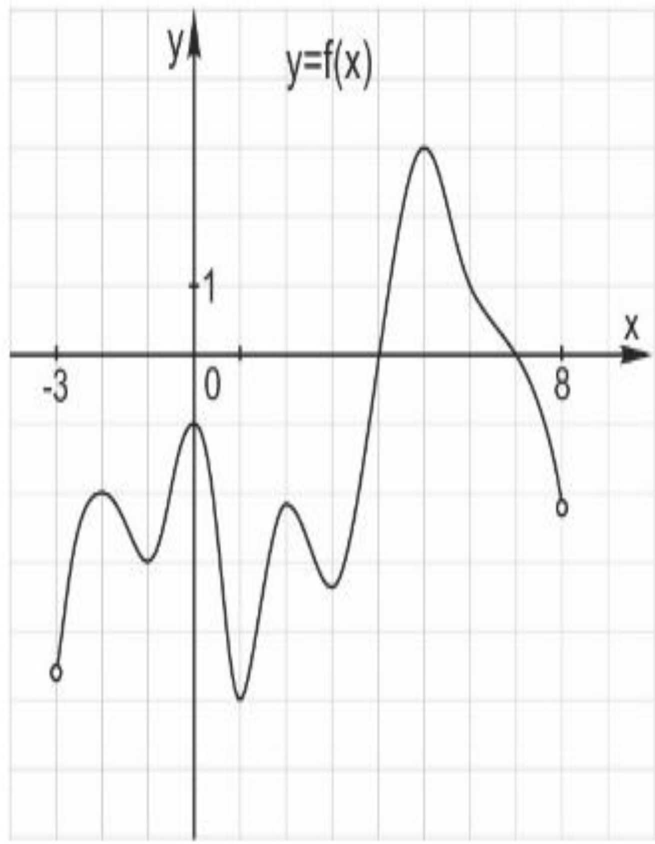
На отрезке $[-1;3]$ производная функции $f(x)$ положительна.



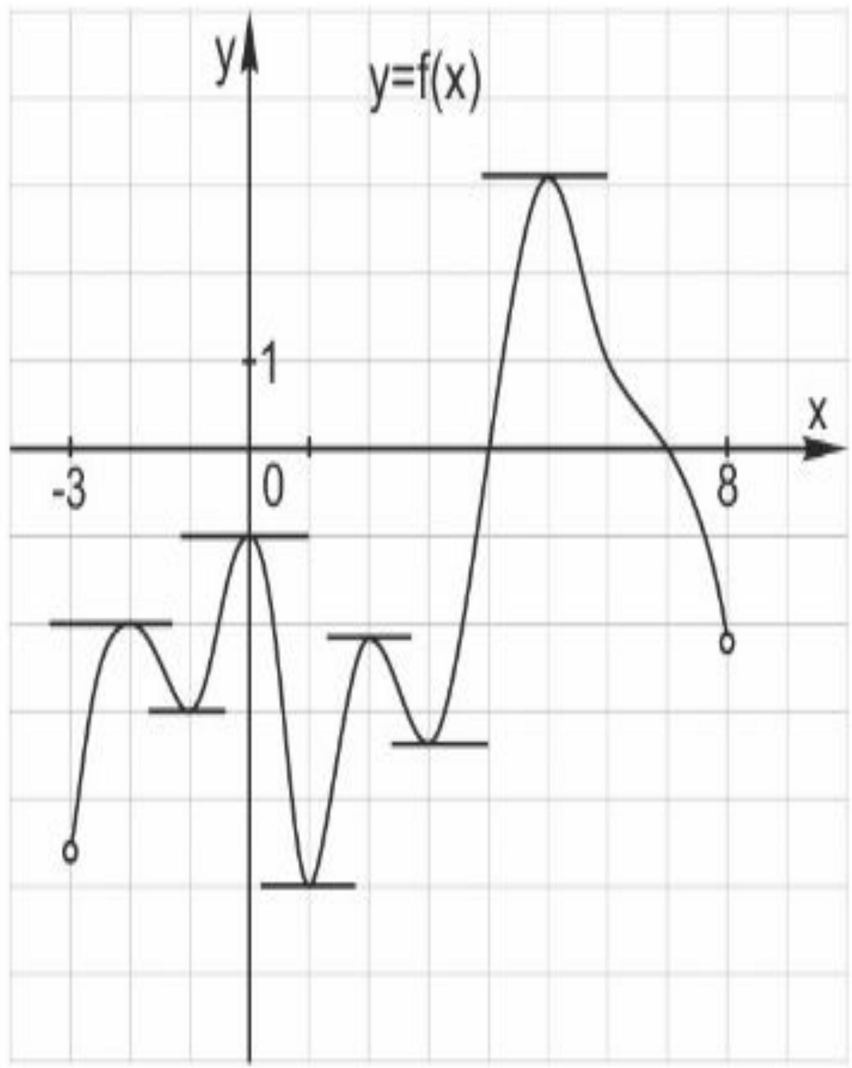
Значит, функция $f(x)$ возрастает на этом отрезке. Большим значениям x соответствует большее значение $f(x)$. Наибольшее значение функции достигается в правом конце отрезка, то есть в точке 3.

Ответ: 3.

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 1$.

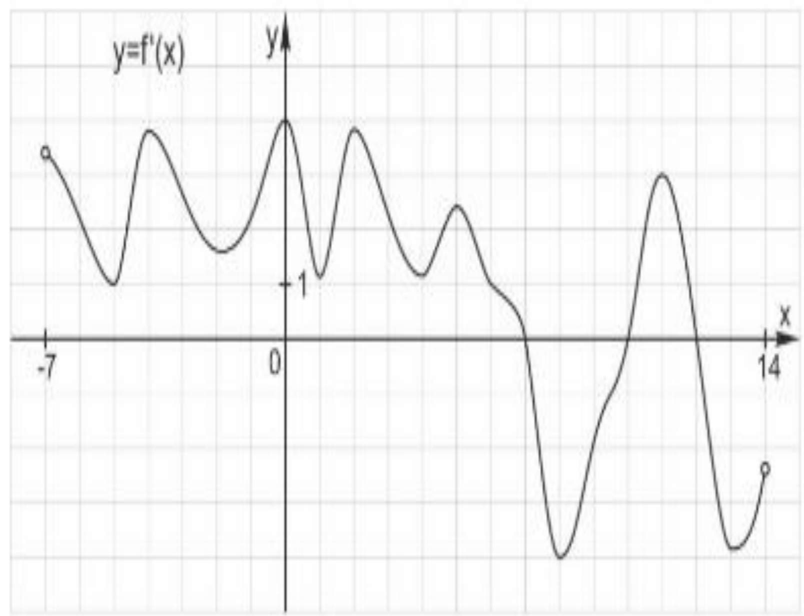


Прямая $y = 1$ параллельна оси абсцисс. Найдем на графике функции $y = f(x)$ точки, в которых касательная параллельна оси абсцисс, то есть горизонтальна. Таких точек на графике 7. Это точки максимума и минимума.



Ответ: 7.

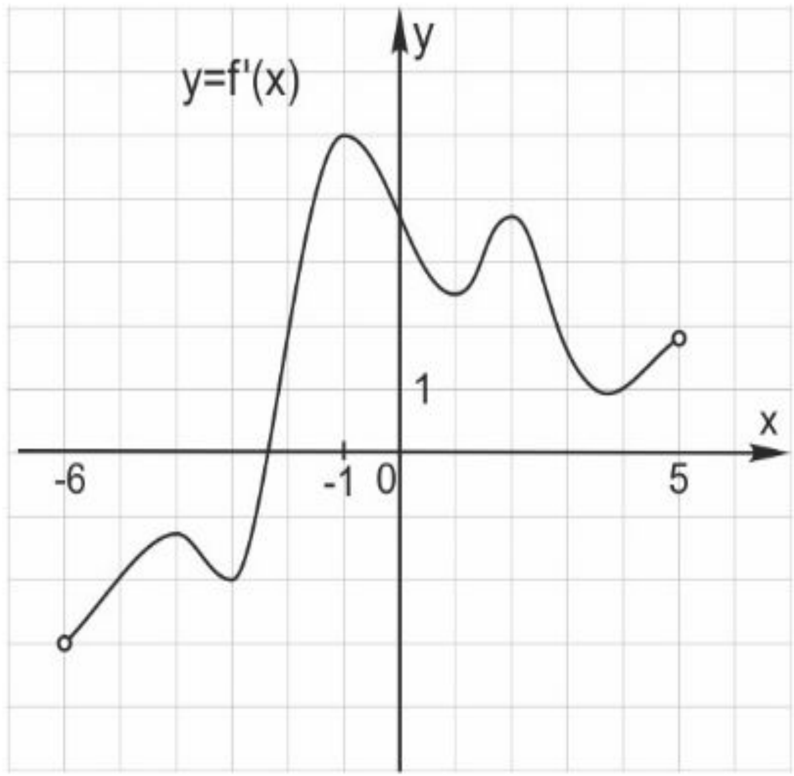
8. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$*, определенной на интервале* $(-7; 14)$*. Найдите количество точек максимума функции* $f(x)$ *на отрезке* $[-6; 9]$*.*



Очень внимательно читаем условие задачи. Изображен график производной, а спрашивают о точках максимума функции. В точке максимума производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус». На отрезке $[-6; 9]$ такая точка всего одна! Это $x = 7$.

Ответ: 1.

9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 4]$.



Точками экстремума называют точки максимума и минимума функции. Если производная функции в некоторой точке равна нулю и при переходе через эту точку меняет знак, то это точка экстремума. На отрезке $[-5; 4]$ график производной (а именно он изображен на рисунке) пересекает ось абсцисс в точке $x = -2$. В этой точке производная меняет знак с минуса на плюс.

Значит, $x = -2$ является точкой экстремума.

f (x) (функция)	f'(x) (производная)
C (константа)	0
x	1
x^2	2x
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
sin x	cos x
cos x	- sin x
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
ln x	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Правила дифференцирования

$$(u + V)' = u' + V'$$

$$(u - V)' = u' - V'$$

$$(u \cdot V)' = u'V + V'u$$

$$\left(\frac{u}{V}\right)' = \frac{u'V - V'u}{V^2}$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

u, V, f - функции
c - константа

Основные виды задач на производные

Нахождение точек максимума и минимума функций

Исследование сложных функций

Нахождение наибольших и наименьших значений функций на отрезке

Нахождение точек максимума и минимума функций

1. Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x^2+289}{x}$.

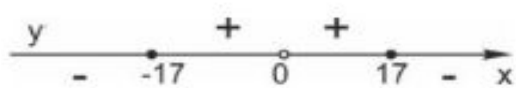
Найдем производную функции.

$$y'=-\left(\frac{x^2+289}{x}\right)'=-\left(x+\frac{289}{x^2}\right)'=-\left(1-\frac{289}{x^2}\right)=\frac{289-x^2}{x^2}.$$

Приравняем производную к нулю. Получим:

$$x^2=289\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=17, \\ x=-17. \end{array}\right.$$

Исследуем знаки производной.



В точке $x=17$ производная $y'(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус». Значит, $x=17$ — точка максимума функции $y(x)$.

Ответ: 17.

2. Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + ln x - 3.$

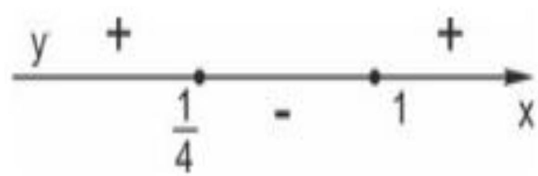
Найдем производную функции.

$y' = 4x - 5 + \frac{1}{x}.$

Приравняем производную к нулю.

$$4x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \frac{1}{4}. \end{array} \right.$$

Определим знаки производной.



В точке $x = 1$ производная $y'(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс». Значит, $x = 1$ – точка минимума функции $y(x)$.

Ответ: 1.

Исследование сложных функций

3. Найдите точку максимума функции $y = 2^{5-8x-x^2}$.

Перед нами сложная функция $y = 2^{5-8x-x^2}$. Возможно, вы знаете формулы производной сложной функции. Но вообще-то их изучают на первом курсе вуза, поэтому мы решим задачу более простым способом.

Так как функция $y = 2^t$ монотонно возрастает, точка максимума функции $y = 2^{5-8x-x^2}$ будет при том же x_0, что и точка максимума функции $t(x) = 5 - 8x - x^2$. А ее найти легко.

$$t'(x) = -8 - 2x;$$

$t'(x) = 0$ при $x = -4$. В точке $x = -4$ производная $t'(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус». Значит, $x = -4$ – точка максимума функции $t(x)$.

Заметим, что точку максимума функции $t(x) = 5 - 8x - x^2$ можно найти и без производной.

Графиком функции $t(x)$ является парабола ветвями вниз, и наибольшее значение $t(x)$ достигается в вершине параболы, то есть при $x = -\frac{8}{2} = -4$.

Ответ: - 4.

4. Найдите абсциссу точки максимума функции $y = \sqrt{4 - 4x - x^2}$.

Напомним, что абсцисса – это координата по X.

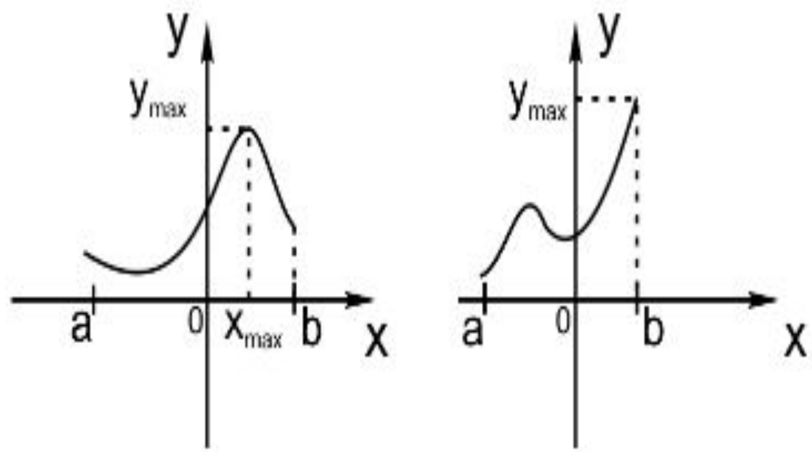
Снова сложная функция. Применяем тот же прием, что и в предыдущей задаче.

Так как функция $y = \sqrt{z}$ монотонно возрастает, точка максимума функции $y = \sqrt{4 - 4x - x^2}$ является и точкой максимума функции $t(x) = 4 - 4x - x^2$.

Это вершина квадратичной параболы $t(x) = 4 - 4x - x^2; x_0 = \frac{-4}{2} = -2$.

5. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ *на отрезке* $[-2; 0]$.

Мы помним, что наибольшее значение функции на отрезке может достигаться либо в точке максимума, либо на конце отрезка. Эти случаи показаны на рисунке.



Будем искать точку максимума функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 4$ с помощью производной. Найдем производную и приравняем ее к нулю.

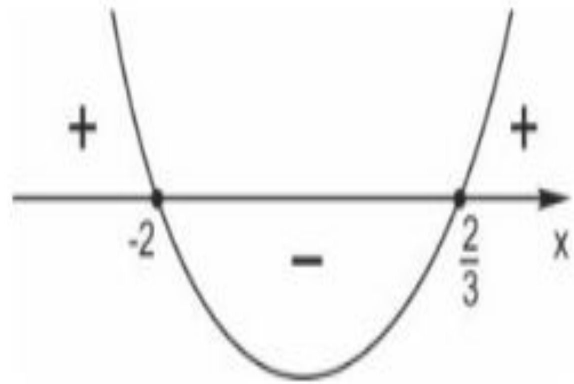
$$y' = 3x^2 + 4x - 2$$

$$y' = 0;$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0;$$

$$D = 64; x = \frac{-4 \pm 8}{6}; x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2.$$

Найдем знаки производной.



В точке $x = -2$ производная равна нулю и меняет знак с "+" на "-". Значит, x = - 2 – точка максимума функции $y(x)$. Поскольку при $x \in [-2; 0]$ функция $y(x)$ убывает, $y_{max}(x) = y(-2) = 12$. В этой задаче значение функции на концах отрезка искать не нужно.

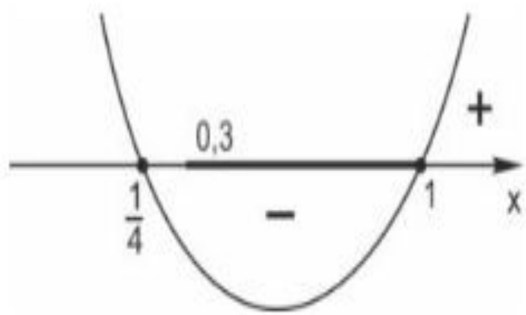
Ответ: 12

6. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 10x + 2lnx - 5$ *на отрезке* $[0,3;3]$.

Найдем производную функции $y = 4x^2 - 10x + 2lnx - 5$ и приравняем ее к нулю.

$y'(x) = 8x - 10 + \frac{2}{x}; y'(x) = 0$ при $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}$.

Найдем знаки производной.



Точка $x_1 = 1$ – точка минимума функции $y(x)$. Точка $x_2 = \frac{1}{4}$ не лежит на отрезке $[0,3;1]$. Поэтому

$y(0,3) > y(1)$ и $y(3) > y(1)$. Значит, наименьшее значение функции на отрезке $[0,3;1]$ достигается при $x = 1$. Найдем это значение.

$y_{min}(x) = y(1) = 4 - 10 - 5 = -11$

Ответ: -11.

7. Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - \ln(9x) + 3$ *на отрезке* $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

Иногда перед тем, как взять производную, формулу функции полезно упростить.

$y = 9x - \ln(9x) + 3 = 9x - \ln 9 - \ln x + 3.$

Мы применили формулу для логарифма произведения. $y'(x) = 9 - \frac{1}{x} = \frac{9x-1}{x}$; $y' = 0$ при $x = \frac{1}{9}$.

Если $0 < x < \dfrac{1}{9}$, то $y'(x) < 0$. Если $x > \dfrac{1}{9}$, то $y'(x) > 0$.

Значит, $x = \frac{1}{9}$ – точка минимума функции $y(x)$. В этой точке и достигается наименьшее значение функции на отрезке $\left[\frac{1}{18}; \frac{5}{18}\right]$.

$y_{min}(x) = y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 3 = 4$

Ответ: 4

8. Найдите наибольшее значение функции $y(x) = 14x - 7tgx - 3,5\pi + 11$ *на отрезке* $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

Найдем производную функции $y(x) = 14x - 7tgx - 3,5\pi + 11$. $y'(x) = 14 - \frac{7}{cos^2x}$.

Приравняем производную к нулю: $14 - \frac{7}{cos^2x} = 0$

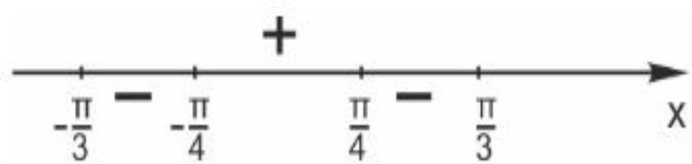
$cos^2x = \frac{1}{2}$

$cos^2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, $y'(x) = 0$, если $x = \pm\frac{\pi}{4}$.

Найдем знаки производной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

$y'(0) = 14 - 7 > 0$,

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = y'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 14 - 28 < 0$.



При $x = \frac{\pi}{4}$ знак производной меняется с «плюса» на «минус». Значит, $x = \frac{\pi}{4}$ – точка максимума функции $y(x)$.

Мы нашли точку максимума, но это еще не все. Сравним значения функции в точке максимума и на конце отрезка, то есть при $x = -\frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{4}$.

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -7 + 11 = 4$

$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{14\pi}{3} + 7tg\frac{\pi}{3} - 3,5\pi + 11 < 4.$

Мы нашли, что $y_{max}(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -7 + 11 = 4.$

Заметим, что если вам попадется такая задача в первой части ЕГЭ по математике, то находить значение функции при $-\frac{\pi}{3}$ не обязательно. Как мы видим, это значение – число иррациональное. А в первой части ЕГЭ по математике ответом может быть только целое число или конечная десятичная дробь.

Ответ: 4

9. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 8e^{x} + 9$ на отрезке [0;2].

Снова сложная функция. Запишем полезные формулы:

$$\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$$

$$\left(e^{cx}\right)' = e^{cx} \cdot c$$

$$(e^{x+a})' = e^{x+a}$$

Найдем производную функции $y = e^{2x} - 8e^{x} + 9.$

$$y' = 2e^{2x} - 8e^{x} = 2e^{x}(e^{x} - 4)$$

$y' = 0,$ если $e^{x} = 4.$ Тогда $x = ln4.$

$0 < ln4 < 2.$ При $x = ln4$ знак производной меняется с «минуса» на «плюс». Значит, $x = ln4$ – точка минимума функции $y(x).$ $y\left(ln4\right) = 4^{2} - 8 \cdot 4 + 9 = 16 - 32 + 9 = -7.$

10. Найдите наибольшее значение функции $y = 12cosx + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ *на отрезке* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Как всегда, возьмем производную функции и приравняем ее к нулю.

$$y'(x) = -12sinx + 6\sqrt{3};$$

$$y' = 0; 12sinx = 6\sqrt{3}$$

$$sinx = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

По условию, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке условие $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ выполняется только для $x = \frac{\pi}{3}$. Найдем знаки производной слева и справа от точки $x = \frac{\pi}{3}$.

$$y'(0) = 6\sqrt{3} > 0;$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 + 6\sqrt{3} < 0.$$

В точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$ производная функции меняет знак с «плюса» на «минус». Значит, точка $x_0 = \frac{\pi}{3}$ – точка максимума функции $y(x)$. Других точек экстремума на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция не имеет, и наибольшее значение функции $y = 12cosx + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ достигается при $x = \frac{\pi}{3}$.

$y_{max}(x) = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12$. Ответ: 12.

11.Найдите наименьшее значение функции $y = 16x - 6sinx + 6$ *на отрезке* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем производную функции и приравняем ее к нулю. $y'(x) = 16 - 6cosx;\ 16 - 6cosx = 0;\ cosx = \frac{8}{3} > 1$ – нет решений.

Что это значит? Производная функции $y = 16x - 6sinx + 6$ не равна нулю ни в какой точке. Это значит, что знак производной в любой точке одинаков, а функция не имеет экстремумов и является монотонной.

Поскольку $cosx \leq 1$, получим, что $16 - 6cosx > 0$ для всех x, и функция $y(x) = 16x - 6sinx + 6$ монотонно возрастает при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Значит, наименьшее свое значение функция принимает в левом конце отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то есть при $x = 0$.

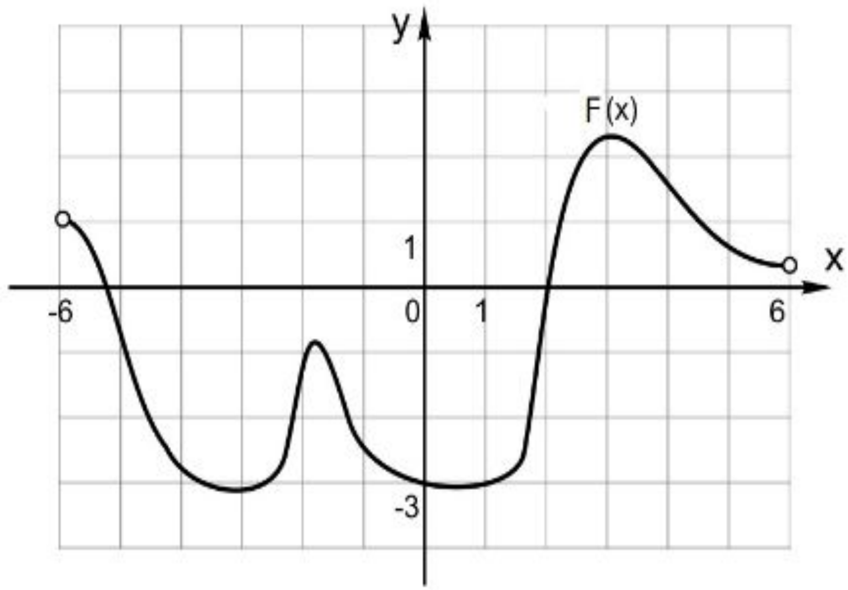
$y_{min}(x) = y(0) = 6.$

Ответ: 6

Первообразная и формула Ньютона-Лейбница

Функция $F(x)$, для которой $f(x)$ является производной, называется **первообразной** функции $y = f(x)$. Функции вида $y = F(x) + C$ образуют множество первообразных функции $y = f(x)$.

10. На рисунке изображён график $y = F(x)$ – одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-4; 4]$.



Функция $F(x)$, для которой $f(x)$ является производной, называется **первообразной** функции $y = f(x)$.

Это значит, что на графике нужно найти такие точки, принадлежащие отрезку $[-4; 4]$, в которых производная функции $F(x)$ равна нулю. Это точки максимума и минимума функции $F(x)$. На отрезке $[-4; 4]$ таких точек 4.

Таблица первообразных

f (x) (функция)	F (x) (первообразная)
0	C (константа)
1	$x + C$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$

Первообразная суммы функций равна сумме их первообразных.

Первообразная разности функций – разности первообразных.

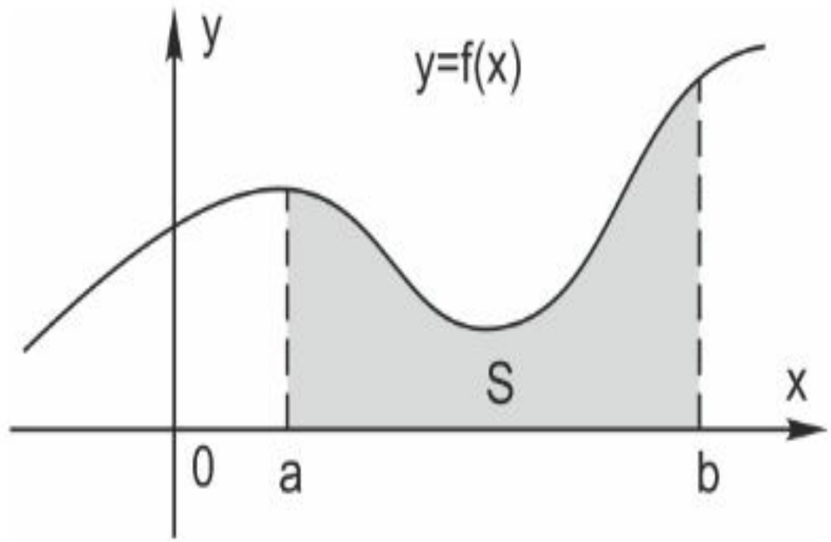
Первообразная от функции $y = kf(x)$, где k – постоянный множитель, равна произведению k на первообразную функции $f(x)$, то есть $kF(x)$.

Множество всех первообразных функции называется **неопределенным интегралом** данной функции. Записывается это так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Формула для вычисления площади под графиком функции (Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть в прямоугольной системе координат задана фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $y = f(x)$, осью X и прямыми $x = a$ и $x = b$. Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна на отрезке [a; b].



Тогда площадь этой фигуры вычисляется по формуле:

$$S = F(b) - F(a).$$

Такую фигуру называют еще **криволинейной трапецией**. А сама формула $S = F(b) - F(a)$ носит название «**Формула Ньютона-Лейбница**».

1. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 11x + 5$ в точке 0 равно 6. Найдите $F(-3)$.

Найдем первообразную функции $f(x) = 11x + 5$ с помощью таблицы первообразных. Получим:

$F(x) = 11\frac{x^2}{2} + 5x + C$

При $x = 0$ получим: $F(x) = C = 6.$

Значит, $C = 6$ и $F(-3) = 11 \cdot \frac{-3^2}{2} + 5 \cdot (-3) + 6 = 40,5$

Ответ: 40,5

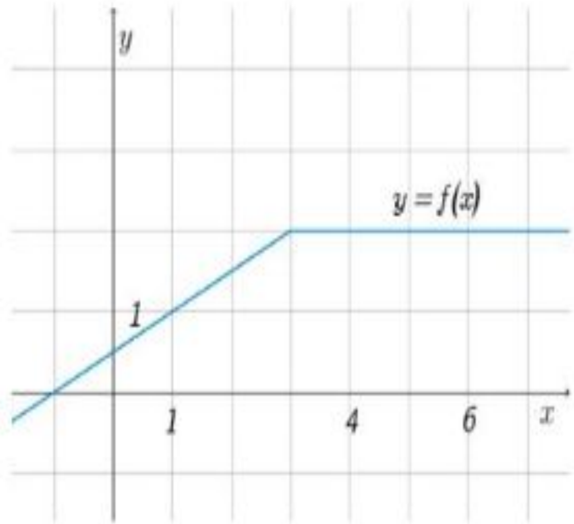
2. Значение первообразной $F(x)$ функции $f(x) = 9\mathrm{x}^8$ в точке 0 равно -13. Найдите $F(-1)$.

Найдем первообразную функции $f(x) = 9\mathrm{x}^8$ с помощью таблицы первообразных. Получим: $F(x) = \mathrm{x}^9 + C$

При x = 0 получим: $F(x) = C = -13.$ Значит, $C = -13$ и $F(-1) = (-1)^9 + -13 = -14.$

Ответ: -14

3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите значение выражения $F(6) - F(4)$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $f(x)$.

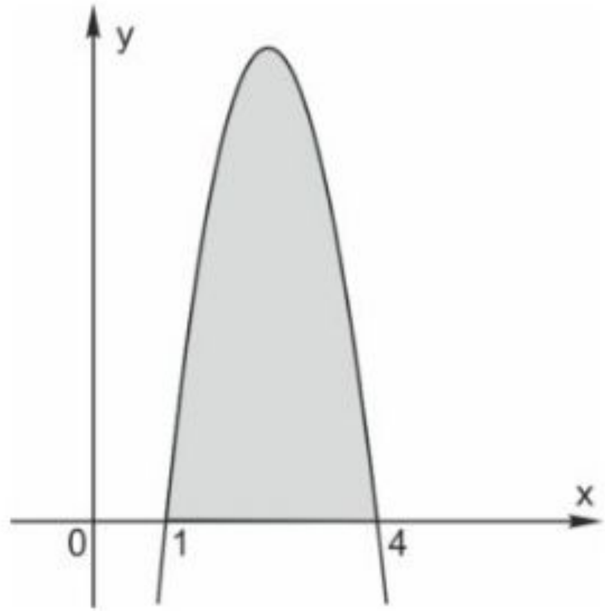


По формуле Ньютона-Лейбница, разность первообразных $F(b) - F(a)$ – это площадь, ограниченная графиком функции, осью X и прямыми y=a и y=b.

В этой задаче нужная фигура ограничена графиком функции, осью X и прямыми $y = 4$ и $y = 6$. Это квадратик, и площадь его равна 4.

Ответ: 4.

4. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 + 7,5x^2 - 12x + 8,5$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение. По формуле Ньютона-Лейбница, площадь под графиком функции $y = f(x)$ на отрезке [a,b] равна разности значений первообразной в концах отрезка, то есть $S = F(b) - F(a)$.

В нашей задаче имеем:

$$S = (-4^3 + 7,5 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 8,5) - (-1^3 + 7,5 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 8,5).$$

Дальше – просто арифметика.

$$S = 1^3 - 4^3 + 7,5 \cdot (4^2 - 1) + 12 \cdot (1 - 4) = 1 - 64 + 7,5 \cdot 15 - 12 \cdot 3 =$$
$$= -63 - 36 + 7,5 \cdot 15 = 13,5.$$

Ответ: 13,5.