Здравствуйте!

Лекция №6

Вычисление интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Подстановки Эйлера

Первая подстановка Эйлера

Эту подстановку можно применять, если выполнено условие $a>0$. Она имеет вид

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}x.$$

Проделаем все вычисления, взяв, для определенности, знак +. Тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}.$$

Возводим это выражение в квадрат

$$ax^2+bx+c=t^2-2tx\sqrt{a}+ax^2,$$

сокращаем ax^2 и выражаем в явном виде x через t:

$$x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}.$$

Теперь можно выразить через t и комбинацию $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Имеем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}=t-\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t},$$

и корень исчезает. Далее,

$$dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$$

и подстановка всего этого в исходный интеграл приводит его к виду

$$\int R\left(\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t},t-\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}\right)\cdot 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$$

и под знаком интеграла стоит дробно рациональная функция от переменной t.

Вторая подстановка Эйлера

Эту подстановку можно применять, если выполнено условие $c > 0$. Она имеет вид

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Возведем в квадрат и приравняем обе части равенства:

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c.$$

Вычеркнем с в правой и левой части равенства. Разделив затем обе части полученного равенства на x, получим:

$$ax+b = xt^2 + 2t\sqrt{c}.$$

Откуда выражаем x через t:

$$x = \frac{\pm 2\sqrt{c}t - b}{a - t^2} = R_1(t),\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} = R_2(t),$$

$$dx = \frac{\pm 2\sqrt{c}(a - t^2) + 2t(\pm 2\sqrt{c}t - b)}{(a - t^2)^2} dt = R_3(t)dt.$$

Окончательно получаем:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(R_1(t), R_2(t))R_3(t)dt,$$

где R_1, R_2, R_3 - рациональные функции. Таким образом, пришли к интегралу от рациональной функции. После вычисления этого интеграла нужно положить $t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{c}}{x}$.

Следует отметить, однако, что вторая подстановка Эйлера обычно приводит к громоздким вычислениям и поэтому ее применяют редко.

Третья подстановка Эйлера.

Условие применимости этой подстановки: полином ax^2+bx+c имеет **действительные корни** x_1 и x_2.

Сама третья подстановка Эйлера имеет вид

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}.$$

Покажем, что она сводит наш интеграл к интегралу от дробно рациональной функции. Так как $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то

$$t^2=\frac{ax^2+bx+c}{(x-x_1)^2}=\frac{a(x-x_1)(x-x_2)}{(x-x_1)^2}=a\frac{x-x_2}{x-x_1}.$$

Отсюда находится x через t:

$$x=\frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a}.$$

Для комбинации $\sqrt{ax^2+bx+c}$ получаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)=t\left(\frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a}-x_1\right)=a(x_1-x_2)\frac{t}{t^2-a},$$

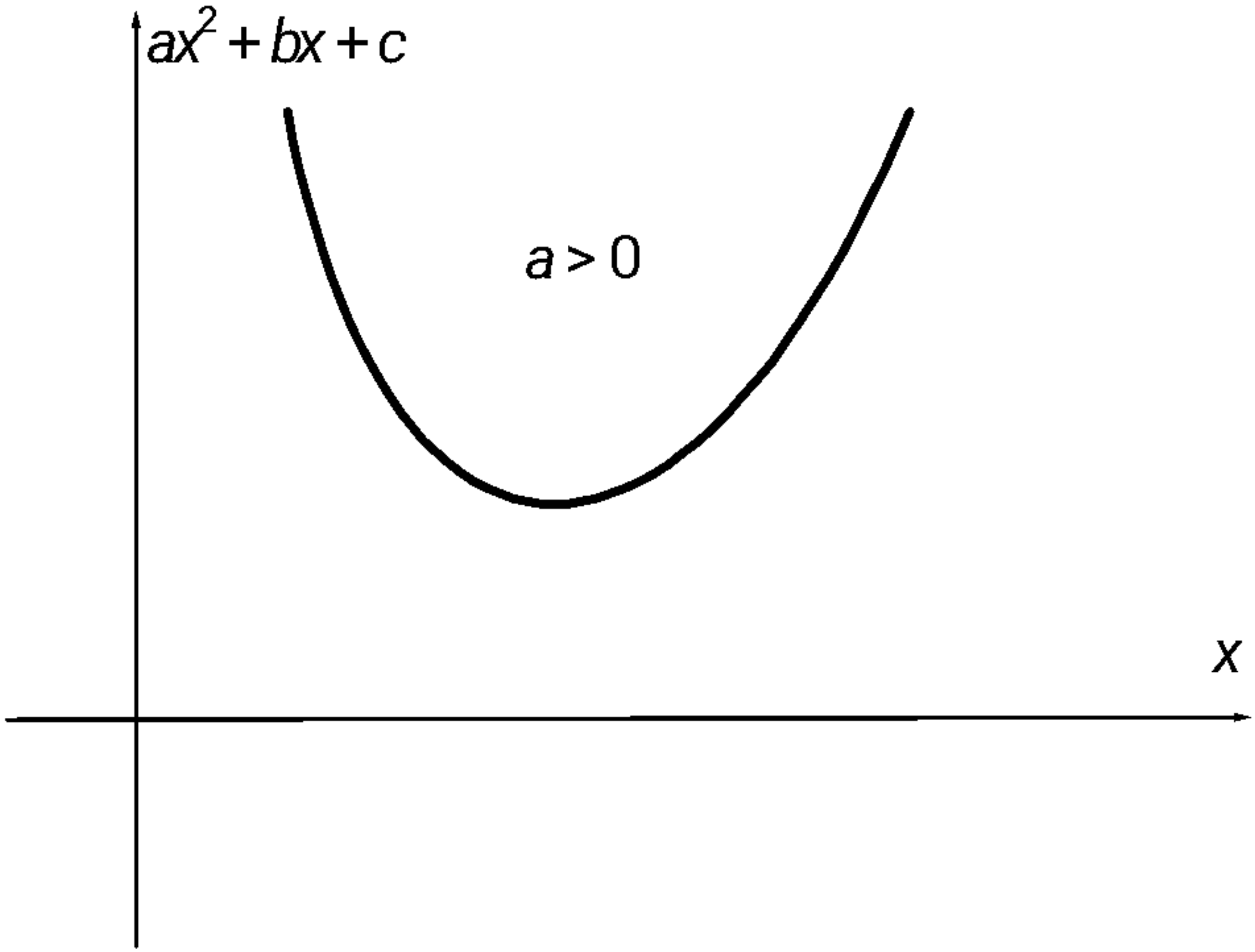
и корень исчезает. Легко получить, что

$$dx=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt$$

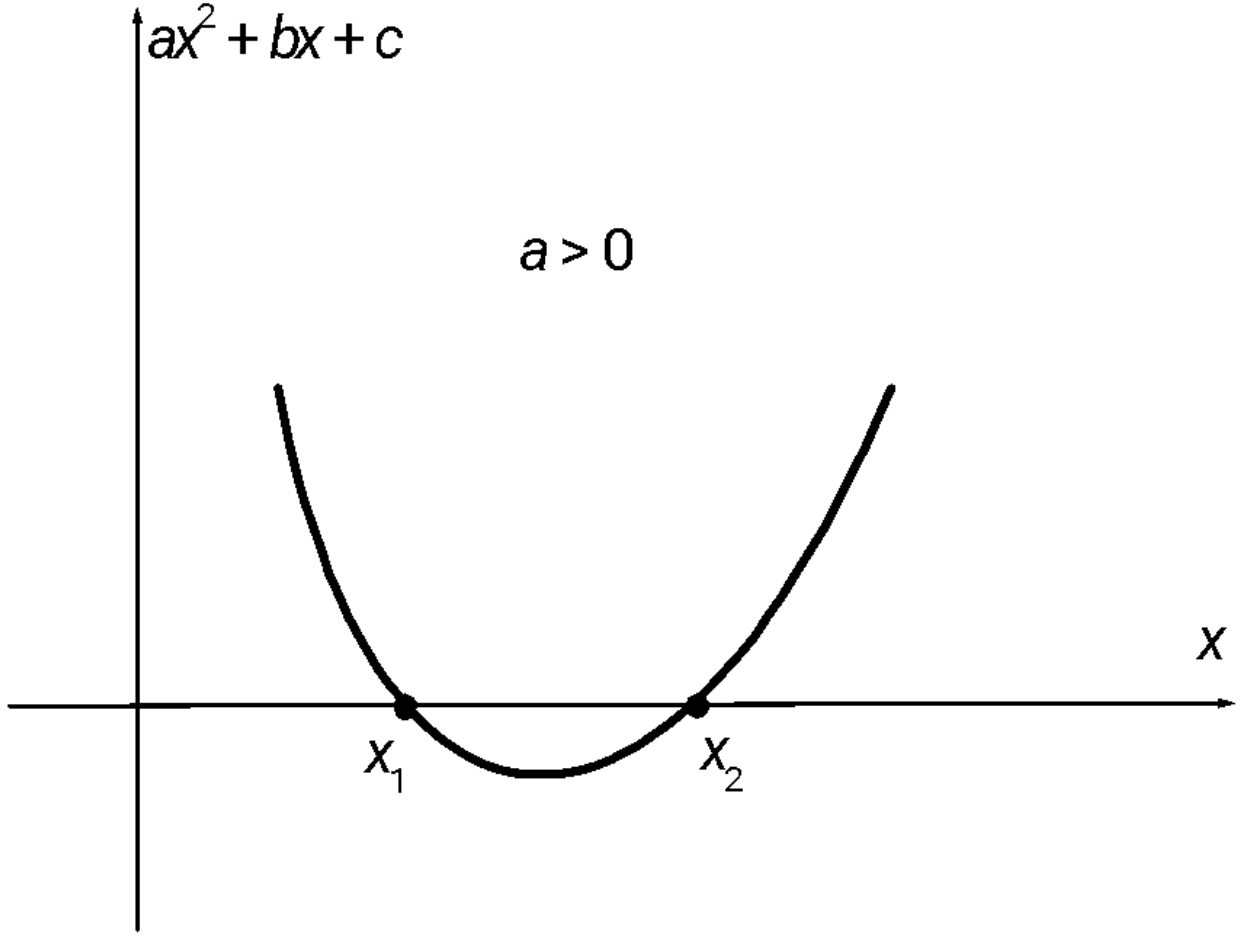
и рассматриваемый интеграл приводится к виду

$$\int R\left(\frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a},\frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}\right)\cdot\frac{2a(x_2-x_1)tdt}{(t^2-a)^2},$$

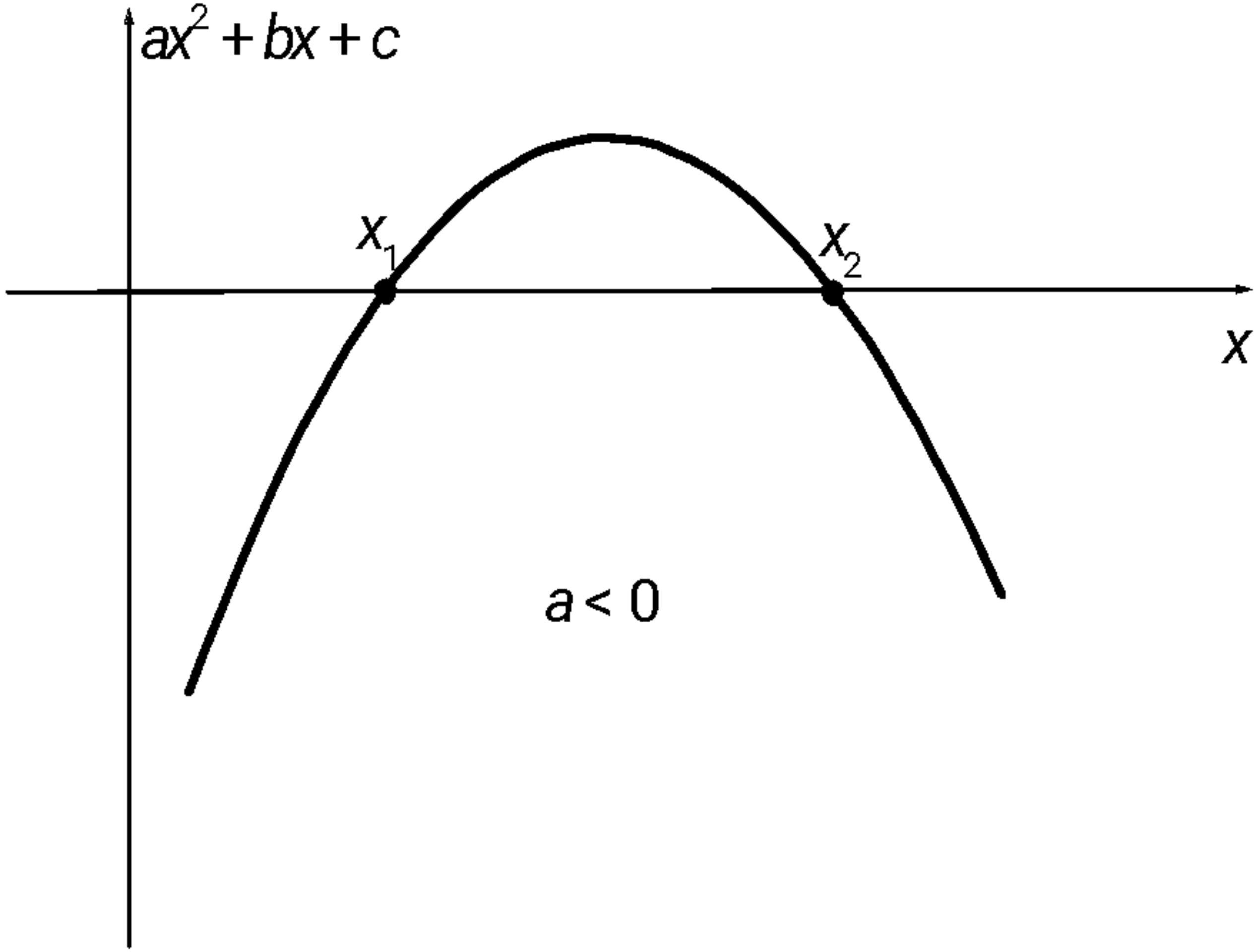
и под знаком интеграла снова получилась дробно рациональная функция от переменной t.



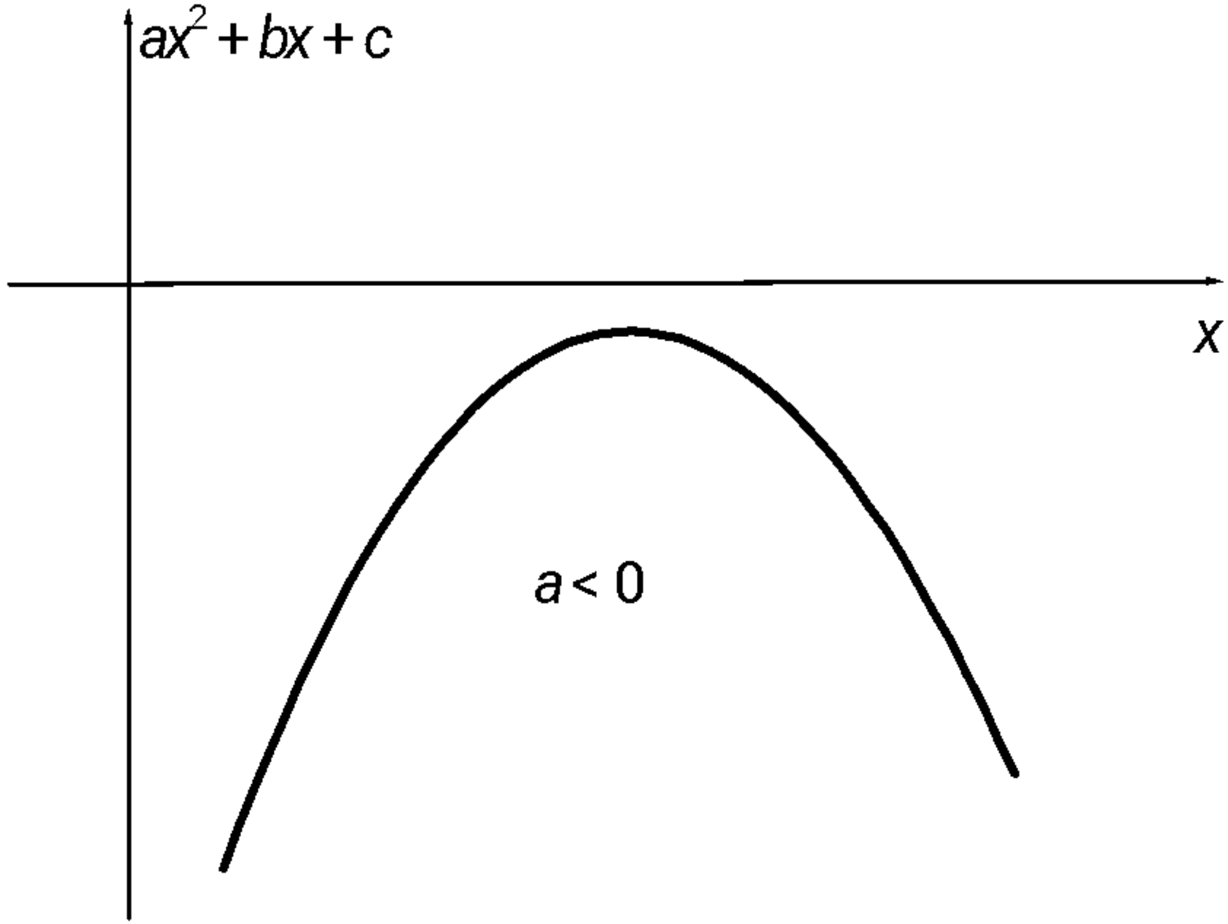
Применима первая подстановка Эйлера



Применимы первая и третья подстановки Эйлера



Применима третья подстановка Эйлера



Подкоренное выражение всегда отрицательно, поэтому интеграл не имеет смысла.

Конец первой части

Часть 2

Определённый интеграл

Процедура построения определенного интеграла

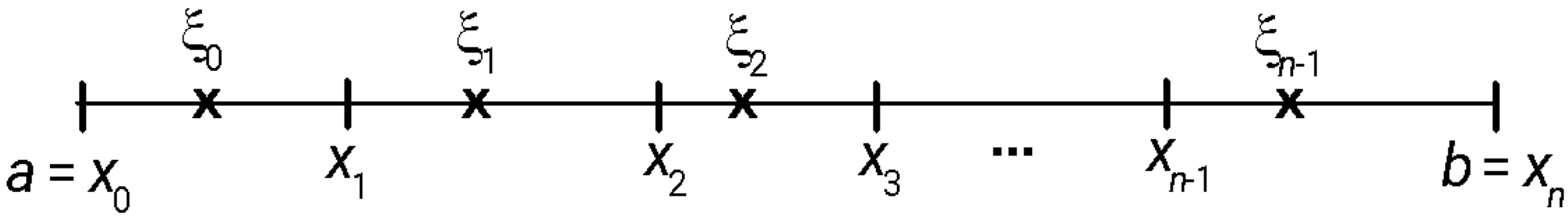
Пусть нам заданы следующие объекты

1. Отрезок $[a,b]$ **конечной длины** $b-a$.
2. Функция $f(x)$, которая определена и **ограничена** на этом отрезке.

Проведем следующее построение:

1. **Разбиение отрезка на кусочки**

Разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на части (кусочки) точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (см. рис.). Для единообразия, точку a будем называть точкой x_0, а точку b – точкой x_n.



Пусть есть длина i-го кусочка и – самая большая из этих длин.

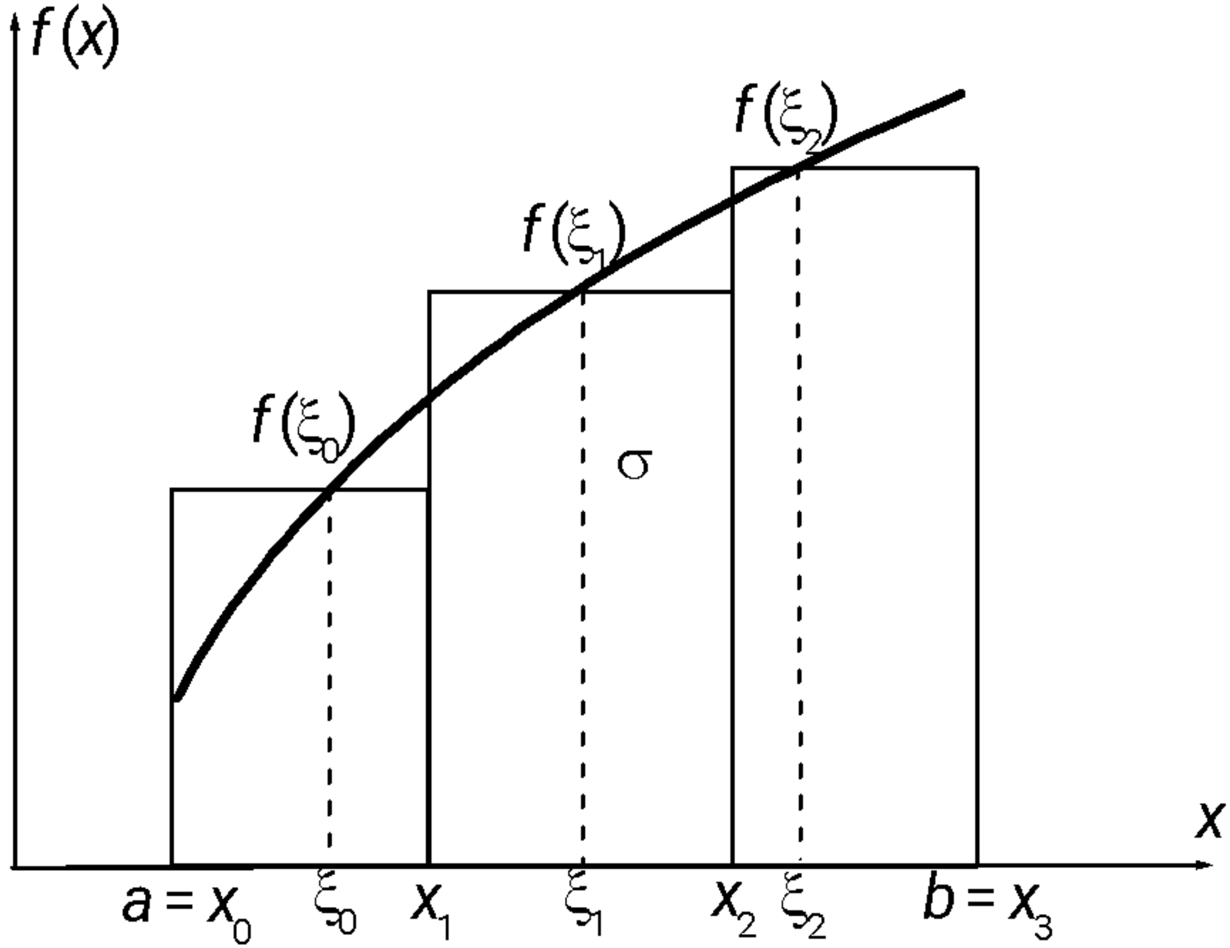
$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

2. **Составление интегральной суммы**

На каждом из кусочков $[x_i, x_{i+1}]$ возьмем **произвольно** некоторую точку ξ_i (она называется **средней точкой**, хотя, конечно, не обязательно лежит на середине кусочка), так что $[x_i \le \xi_i \le x_{i+1}]$ и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

которая называется **интегральной суммой**.



Геометрически она представляет собой сумму площадей прямоугольников высотой и длиной основания .

3. **Предельный переход**

Наконец, перейдем к пределу $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$.

Определение. Если $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$ существует и не зависит от

А) способа разбиения отрезка $[a,b]$ на кусочки и от

Б) способа выбора средней точки,

то он называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sigma.$$

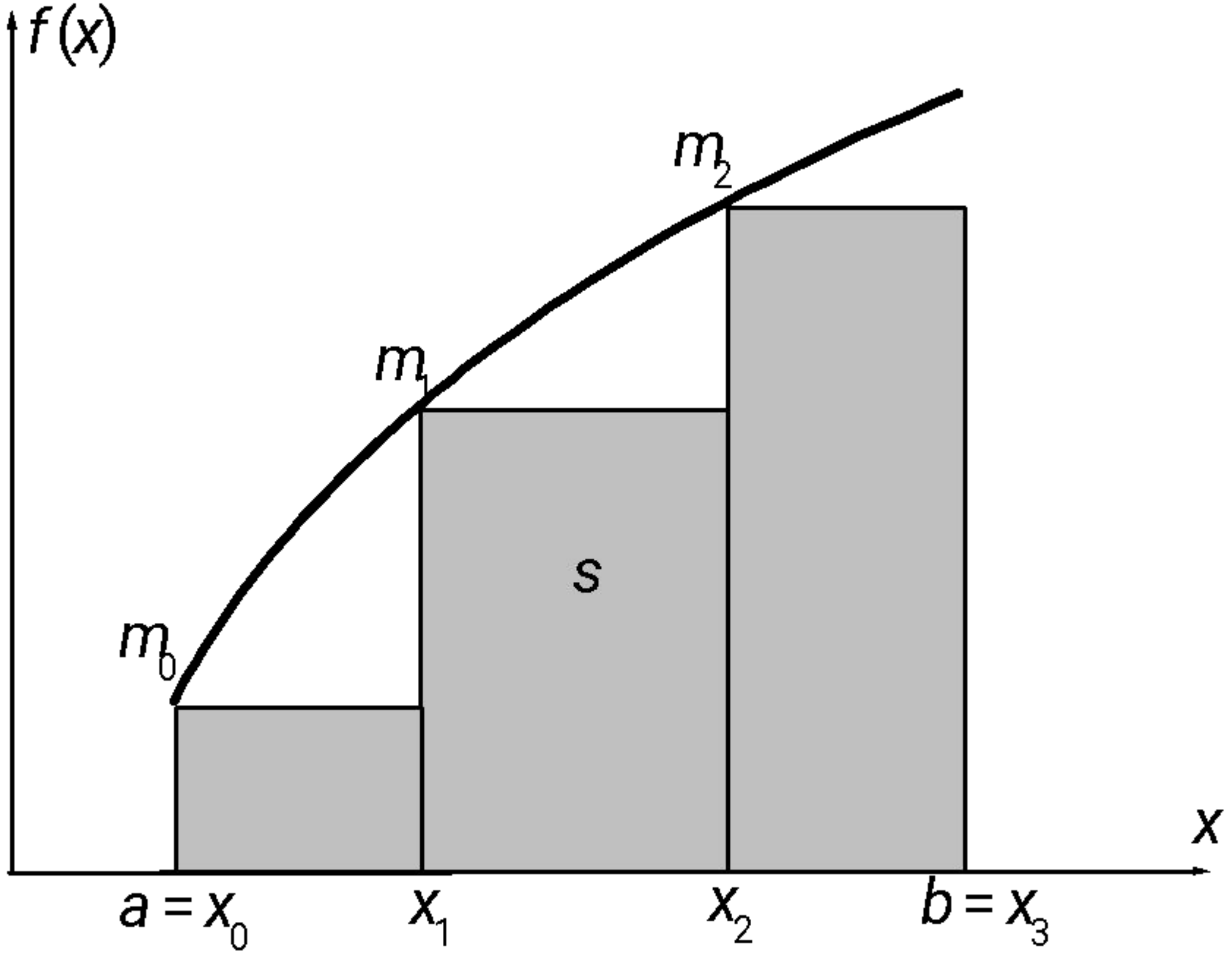
Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, число a – **нижним пределом интегрирования, а** b – **верхним пределом** интегрирования.

Суммы Дарбу

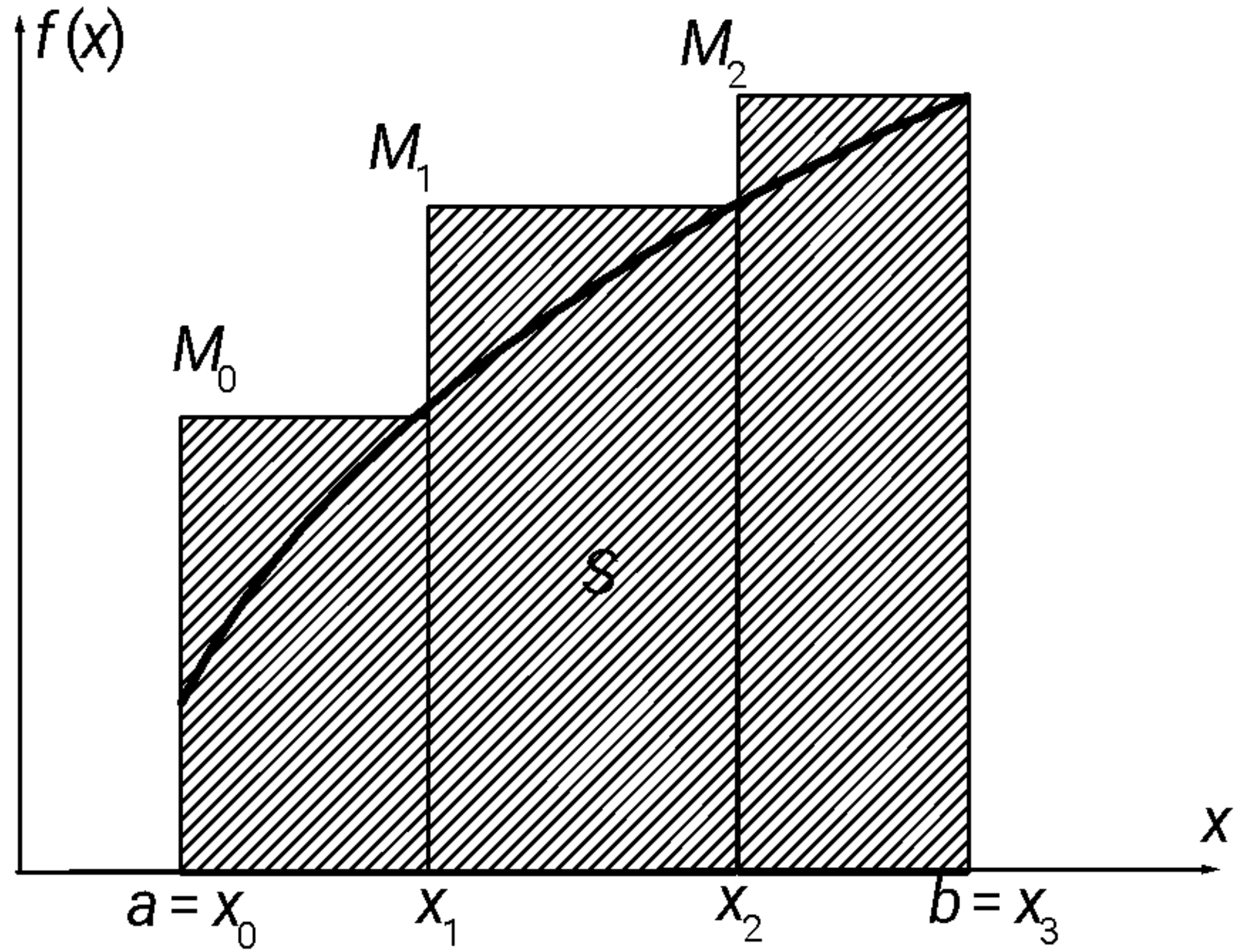
Перейдем теперь к построению теории определенного интеграла. Ее основой являются так называемые суммы Дарбу.

Пусть $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ есть наименьшее и наибольшее значения функции на i-м кусочке. Суммы $s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ и $S = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ носят название **нижней** и **верхней сумм Дарбу.**

Так как $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, то $s \le \sigma \le S$ при любом выборе средней точки. Ясно также, что при фиксированном разбиении отрезка $[a,b]$ на кусочки $s = \inf \sigma$ и $S = \sup \sigma$, где inf и sup берутся по всевозможным выборам средних точек при заданном разбиении отрезка $[a, b]$ на кусочки.



Геометрический смысл нижней суммы Дарбу.

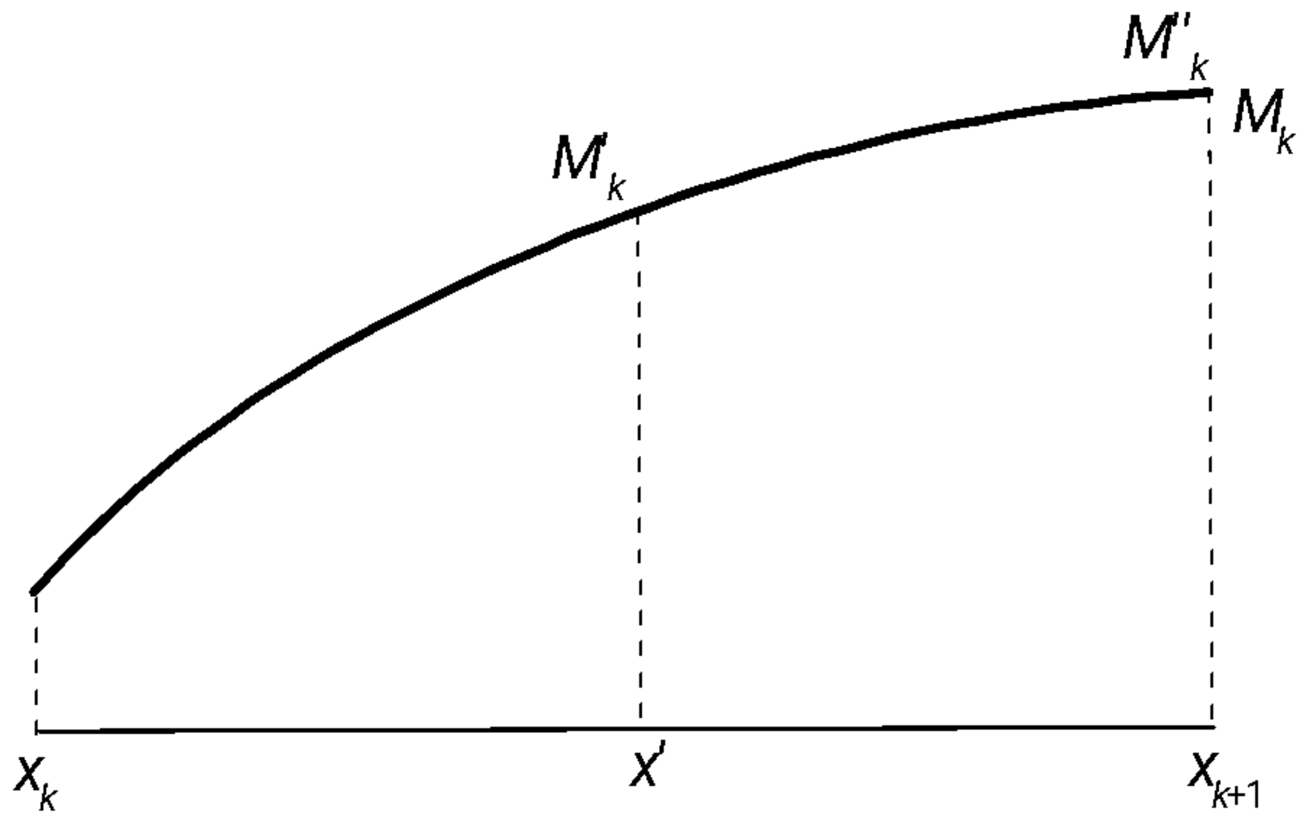


Геометрический смысл верхней суммы Дарбу

Свойства сумм Дарбу

1. Если к имеющимся точкам деления добавить новые, то s может только увеличиться, а S – только уменьшиться.

Рассмотрим кусочек $[x_k, x_{k+1}]$ и представим себе, что на нем появилась еще одна точка x', так что $x_k < x' < x_{k+1}$.



Пусть

$$M_k = \sup_{x\in[x_k, x_{k+1}]} f(x),\ M_k' = \sup_{x\in[x_k, x']} f(x) \text{ и } M_k'' = \sup_{x\in[x', x_{k+1}]} f(x).$$

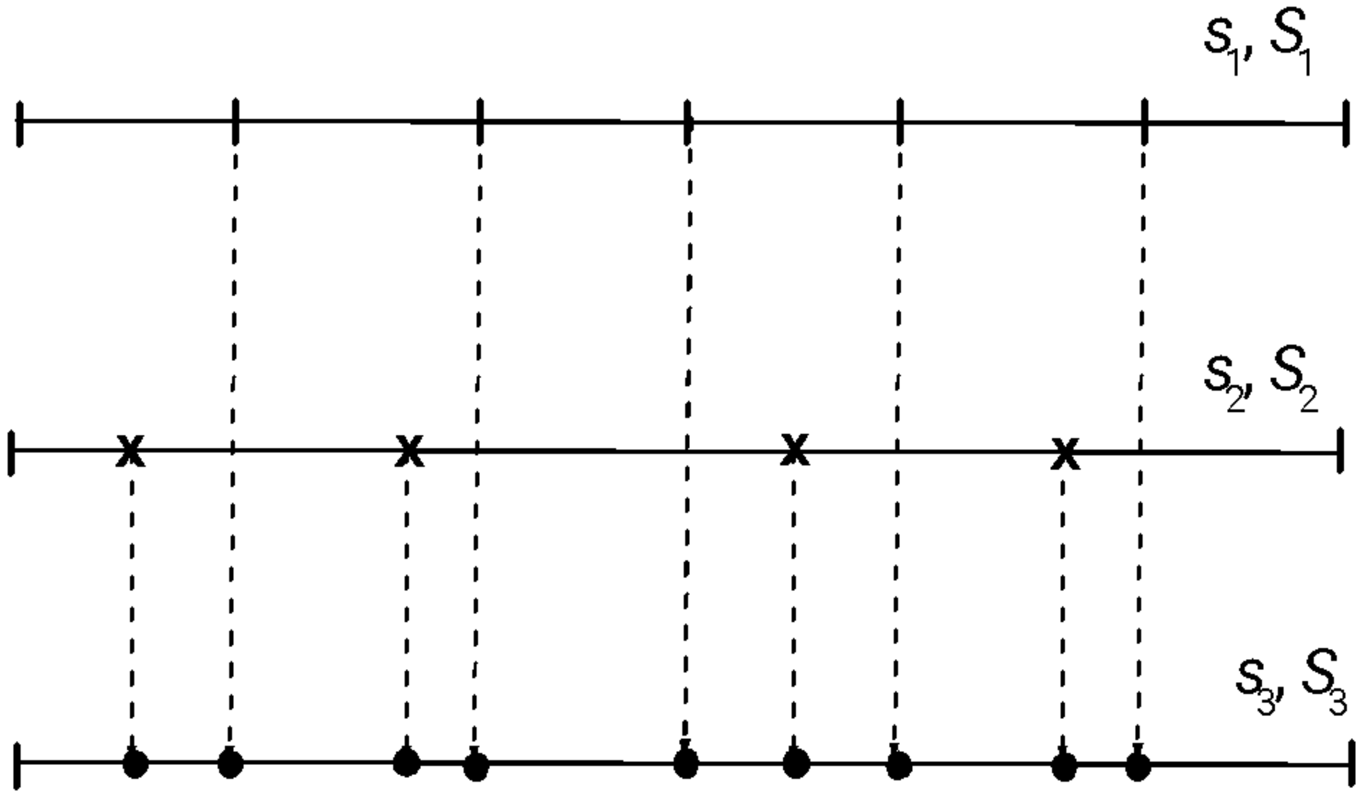
Так как

$$[x_k, x'] \subset [x_k, x_{k+1}] \text{ и } [x', x_{k+1}] \subset [x_k, x_{k+1}],$$

то ясно, что $M_k' \le M_k$ и $M_k'' \le M_k$.

Рассмотрим отдельное слагаемое, скажем, верхней суммы Дарбу, соответствующее отрезку $[x_k, x_{k+1}]$. До добавления точки x' оно **было равно** $M_k(x_{k+1} - x_k)$**.** После добавления точки x' оно превратилось в два слагаемых и **стало равно** $M_k'(x' - x_k) + M_k''(x_{k+1} - x')$**.** Так как $M_k' \le M_k$ и $M_k'' \le M_k$, то $M_k'(x' - x_k) + M_k''(x_{k+1} - x') \le M_k(x_{k+1} - x_k)$ и поэтому от добавления точки x' верхняя сумма Дарбу не могла возрасти. Аналогично можно получить, что от добавления точки x' нижняя сумма Дарбу не могла уменьшиться.

2. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу, даже если они принадлежат **различным разбиениям** отрезка $[a,b]$ на кусочки.



В первом разбиении, очевидно, $s_1 \le S_1$, во втором – $s_2 \le S_2$. Объединим эти два разбиения в одно, смешав вместе все точки деления (см. рис.). Тогда, учитывая свойство 1, получим следующую цепочку неравенств

$$s_1 \le s_3 \le S_3 \le S_2,$$

откуда следует, что $s_1 \le S_2$, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что множество нижних сумм Дарбу $\{s\}$, соответствующих различным разбиениям отрезка $[a,b]$ **ограничено сверху** любой верхней суммой Дарбу, а множество верхних сумм Дарбу $\{S\}$ **ограничено снизу** любой нижней суммой Дарбу. Поэтому существуют $I_* = \sup\{s\}$ и $I^* = \inf\{S\}$. Они носят название нижнего и верхнего интегралов Дарбу. Очевидно, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$ на кусочки верно соотношение $s \le I_* \le I^* \le S$.