

---

# Метод резолюций в алгебре высказываний

---

---

## Следующие задачи равносильны:

- а) проверка тождественной истинности формул;
  - б) проверка логического следования формул;
  - в) проверка тождественной ложности формул;
  - г) проверка противоречивости множества формул;
  - д) **проверка противоречивости множества ДИЗЬЮНКТОВ.**
-

Определение. Пусть для некоторой переменной  $X$  дизъюнкты  $D_1, D_2$  представимы в виде  $D_1 = D'_1 \vee X$ ,  $D_2 = D'_2 \vee \neg X$ . Тогда дизъюнкт  $D'_1 \vee D'_2$  называется *резольвентой дизъюнктов*  $D_1, D_2$  по переменной  $X$  и обозначается  $\text{Res}_X(D_1, D_2)$ .

Резольвента дизъюнктов  $D_1, D_2$  по некоторой переменной  $X$  называется *резольвентой дизъюнктов*  $D_1, D_2$  и обозначается  $\text{Res}(D_1, D_2)$ . По определению  $\text{Res}(X, \neg X) = 0$ .

Свойство. Если  $D_1 = D'_1 \vee X$ ,  $D_2 = D'_2 \vee \neg X$  выполнимы, то выполнима  $\text{Res}_X(D_1, D_2)$ .

Определение. Резолютивным выводом формулы  $\Phi$  из множества дизъюнктов  $S = \{D_1, \dots, D_m\}$  называется такая последовательность формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ , что:

- 1)  $\Phi_n = \Phi$ ;
- 2) каждая из формул  $\Phi_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) либо принадлежит множеству  $S$ , либо является резольвентой  $\Phi_i = \text{Res}(\Phi_j, \Phi_k)$  предыдущих формул  $\Phi_j, \Phi_k$  при некоторых  $1 \leq j, k \leq i$ .

Теорема. Множество дизъюнктов  $S = \{D_1, \dots, D_m\}$  противоречиво в том и только том случае, если существует резолютивный вывод значения 0 из множества  $S$ .

Так как по критерию логического следования соотношение

$$\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$$

равносильно условию

$$\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg \Phi \models$$

то справедлив следующий результат.

Следствие (Проверка логического следования формул).

Пусть для формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi$  формула  
 $\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg \Phi$  имеет КНФ  
 $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$

Тогда логическое следование  $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$   
равносильно существованию резолютивного  
вывода значения 0 из множества дизъюнктов  
 $S = \{D_1, \dots, D_m\}.$

Алгоритм проверки логического следования формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$  :

1. Составить формулу

$$\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg \Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества  $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ .

3. Если такой вывод существует, то выполняется  $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$ .

Пример. Методом резолюций проверим логическое следование:

$$(\neg X \Rightarrow Z), (Y \Rightarrow W), ((W \wedge Z) \Rightarrow V), \neg V \models X \vee \neg Y.$$

Данное соотношение равносильно условию

$$(\neg X \Rightarrow Z), (Y \Rightarrow W), ((W \wedge Z) \Rightarrow V), \neg V, \neg(X \vee \neg Y) \models,$$

т.е. условию противоречивости формулы

$$\Psi = (\neg X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge ((W \wedge Z) \Rightarrow V) \wedge \neg V \wedge \neg(X \vee \neg Y).$$



Найдем КНФ этой формулы:

$$\begin{aligned}\Psi &= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg(W \wedge Z) \vee V) \wedge \neg V \wedge (\neg X \wedge Y) = \\ &= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg Z \vee V) \wedge \neg V \wedge \neg X \wedge Y.\end{aligned}$$

Рассмотрим множество дизъюнктов

$$S = \{X \vee Z, \neg Y \vee W, \neg W \vee \neg Z \vee V, \neg V, \neg X, Y\}.$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества  $S$ :

$$\Phi_1 = \text{Res}_X(X \vee Z, \neg X) = Z,$$

$$\Phi_2 = \text{Res}_Y(\neg Y \vee W, Y) = W,$$

$$\Phi_3 = \text{Res}_Z(\neg W \vee \neg Z \vee V, Z) = \neg W \vee V,$$

$$\Phi_4 = \text{Res}_W(\Phi_2, \Phi_3) = V,$$

$$\Phi_5 = \text{Res}(\Phi_4, \neg V) = 0.$$

Таким образом, множество дизъюнктов формулы  $\Psi$  противоречиво и, значит, выполняется исходное логическое следование.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы  $\Phi$  :

1. Рассмотреть формулу

$$\Psi = \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества  $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ .

3. Если такой вывод существует, то выполняется  $\models \Phi$ .



# Решение логических задач

---

Задача. Методом резолюций проверьте справедливость следующих рассуждений.

Допустим, что если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник не отчисляется, если он является задолжником не более одного месяца или преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск. Не будет ли отчислен студент-задолжник, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась?

---

*Решение.* Введем обозначения для следующих высказываний:

$D$  = «руководство вуза действует по закону высшей школы»;

$S$  = «студент-задолжник отчисляется»;

$P$  = «преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск»;

$T$  = «студент является задолжником не более одного месяца».

Первое утверждение задачи

$$\Phi_1 = D \Rightarrow ((T \vee P) \Rightarrow \neg S)$$

---

Сформулированное в вопросе задачи утверждение выражается следующим сложным высказыванием:

$$\Phi_2 = D \wedge T \Rightarrow \neg S$$

По условию задачи требуется определить, выполняется ли логическое следование

$$\Phi_1 \models \Phi_2$$

---

$$\Psi = \left( D \Rightarrow ((T \vee P) \Rightarrow \neg S) \right) \wedge \neg(D \wedge T \Rightarrow \neg S) =$$

$$= (\neg D \vee (\neg(T \vee P) \vee \neg S)) \wedge \neg(\neg(D \wedge T) \vee \neg S) =$$

$$= (\neg D \vee \neg S \vee (\neg T \wedge \neg P)) \wedge D \wedge T \wedge S =$$

$$= ((\neg D \vee \neg S \vee \neg T) \wedge (\neg D \vee \neg S \vee \neg P)) \wedge D \wedge T \wedge S.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы  $\Psi$

$$S = \{\neg D \vee \neg S \vee \neg T, \neg D \vee \neg S \vee \neg P, D, T, S\}$$

и построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества  $S$ .



$$\Phi_1 = \text{Res}_D (\neg D \vee \neg S \vee \neg T, D) = \neg S \vee \neg T,$$

$$\Phi_2 = \text{Res}_T (\neg S \vee \neg T, T) = \neg S,$$

$$\Phi_3 = \text{Res}_T (\neg S, S) = 0.$$

Таким образом, из множества формул  $S$  резолютивно выводится значение 0 и по основной теореме множество  $S$  противоречиво. Следовательно, формула  $\Psi$  противоречива и выполняется исходное логическое следование  $\Phi_1 \models \Phi_2$ , т.е. студент-задолжник не будет отчислен, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась.

---

# Алгебра логических значений

---

Пример алгебры дает множество  $\{0,1\}$  истинностных значений высказываний с  $n$ -арными операциями  $F_\Phi$ , которые являются функциями истинностных значений формул логики высказываний  $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ , образованных с помощью  $n$  пропозициональных переменных  $X_1, \dots, X_n$ .

Формула  $\Phi = \neg X$  определяет унарную операцию  $F_\Phi = F_{\neg X}(x)$ , которая обозначается символом  $x'$  и называется *отрицанием* или *дополнением* переменной  $x$ .

Формулы  $\Phi = X \vee Y$ ,  $\Psi = X \wedge Y$  определяют бинарные операции  $F_\Phi = F_{X \vee Y}(x, y)$ ,  $F_\Psi = F_{X \wedge Y}(x, y)$ , которые обозначаются соответственно символами  $x \vee y$ ,  $x \wedge y$  и называются *дизъюнкцией* и *конъюнкцией* переменных  $x, y$ .

Операция  $x \vee y$  иногда называется также *объединением* или *суммой* переменных  $x, y$  и обозначается соответственно через  $x \cup y$  или  $x + y$ .

Операция  $x \wedge y$  иногда называется также *пересечением* или *произведением* переменных  $x, y$  и обозначается соответственно через  $x \cap y$  или  $x \cdot y$ .

---

Алгебра  $B = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, ')$  впервые была введена в 19-ом веке английским математиком Дж.Булем с целью применения в логике математических методов.

Поэтому эта алгебра называется *алгеброй Буля* или *алгеброй логических значений*.

---

Теорема. Алгебра Буля  $B = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, ')$  удовлетворяет свойствам:

1)  $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ,  $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$  – ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции;

2)  $a \vee b = b \vee a$ ,  $a \wedge b = b \wedge a$  – коммутативность дизъюнкции и конъюнкции;

3)  $a \vee a = a$ ,  $a \wedge a = a$  – идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции;

4)  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ,  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$  – дистрибутивность соответственно конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

- 5)  $(a')' = a$  – идемпотентность дополнения;
- 6)  $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ ,  $(a \wedge b)' = a' \vee b'$  – законы де Моргана;
- 7)  $a \vee (a \wedge b) = a$ ,  $a \wedge (a \vee b) = a$  – законы поглощения;
- 8)  $a \vee a' = 1$ ,  $a \wedge a' = 0$  – характеристическое свойство дополнения,
- 9)  $a \vee 1 = 1$ ,  $a \wedge 1 = a$  – характеристическое свойство наибольшего элемента 1,
- 10)  $a \vee 0 = a$ ,  $a \wedge 0 = 0$  – характеристическое свойство наименьшего элемента 0.

---

# Булевы многочлены и булевы функции

---



Для описания алгебраических свойств булевых алгебр используются формулы, которые называются *булевыми многочленами* и которые образованы из булевых переменных  $x, y, \dots$  (принимающих значения 0,1) и символов булевых операций  $+, \cdot, '$  по следующим правилам:

- 1) все булевы переменные  $x, y, \dots$  и символы 0,1 – булевы многочлены;
- 2) если  $p$  и  $q$  – булевы многочлены, то таковыми являются выражения

$$(p) + (q), (p) \cdot (q), (p)'$$

---

Если  $p$  образован с помощью  $x_1, \dots, x_n$ , то он обозначается  $p(x_1, \dots, x_n)$ .

Множество всех булевых многочленов от  $n$  переменных обозначим  $P_n$ .

Если в  $p(x_1, \dots, x_n)$  вместо переменных  $x_1, \dots, x_n$  подставить произвольные значения  $a_1, \dots, a_n$  из множества  $B$ , то в результате вычислений получится некоторый элемент  $\bar{p}(a_1, \dots, a_n)$  алгебры  $B$ .

Каждый булев многочлен  $p(x_1, \dots, x_n)$  определяет отображение  $\bar{p}: B^n \rightarrow B$ , которое называется *булевой полиномиальной функцией*, определяемой булевым многочленом  $p(x_1, \dots, x_n)$ .

---

Определение. Булевы многочлены  $p, q \in P_n$  называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же булеву полиномиальную функцию, т.е.  $\overline{p} = \overline{q}$ .

Символическая запись:  $p \sim q$  или просто  $p = q$ .

Бинарное отношение  $\sim$  является эквивалентностью на множестве  $P_n$ .

Классы эквивалентности  $[p] = \{q \in P_n : p \sim q\}$ , образуют фактор-множество  $P_n / \sim = \{[p] : p \in P_n\}$ .

Полные системы представителей этого фактор-множества называются системами *нормальных форм* булевых многочленов.

Для булевой переменной  $x$  и  $\alpha \in \{0, 1\}$  положим:

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1, \\ x', & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Выражение  $x^\alpha$  называется *литерой*.

Литера или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер называется *конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*).

Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все булевы переменные рассматриваемой формулы.

---

Дизъюнкт или конъюнкция (совершенных)  
дизъюнктов называется (совершенной)  
*конъюнктивной нормальной формой*. Сокращенно  
КНФ и СКНФ, соответственно.

Конъюнкт или дизъюнкция (совершенных)  
конъюнктов называется (совершенной)  
*дизъюнктивной нормальной формой*. Сокращенно  
ДНФ и СДНФ, соответственно.

---

Теорема. Любая булева функция  $f: B^n \rightarrow B$  является булевой полиномиальной функцией следующих булевых многочленов:

$$p_f = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

И

$$q_f = \prod_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n} (f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + x_1^{\alpha_1'} + \dots + x_n^{\alpha_n'}) .$$

Следствие 1. Если булева функция  $f: B^n \rightarrow B$  не равна тождественно нулю, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной дизъюнктивной нормальной формы

$$P_f = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n, \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

которая называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно **СДНФ**) функции  $f$ .

Следствие 2. Если булева функция  $f: B^n \rightarrow B$  не равна тождественно единице, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной конъюнктивной нормальной формы

$$q_f = \prod_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n, \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0}} (x_1^{\alpha_1'} + \dots + x_n^{\alpha_n'}) ,$$

которая называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ) функции  $f$ .



Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ функции  
 $f: B^n \rightarrow B$ :

1. Составить таблицу значений функции  $f$  и добавить к ней два дополнительных столбца с заголовками «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты».

2. Если при значениях  $x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n$  значение функции  $f$  равно 1, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные конъюнкты» записать конъюнкт  $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$  и в столбце «Совершенные дизъюнкты» сделать прочерк (при этом  $x^1 = x$  и  $x^0 = x'$ ).



4. Дизъюнкция полученных совершенных  
конъюнктов

$$x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} + \dots$$

является СДНФ функции  $f$ , конъюнкция  
полученных совершенных дизъюнктов

$$(x_1^{m'_1} + \dots + x_n^{m'_n}) \cdot \dots$$

является СКНФ функции  $f$ .