Метод резолюций в алгебре высказываний

Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул;

д) **проверка противоречивости множества дизъюнктов**.

Определение. Пусть для некоторой переменной X дизъюнкты D_1, D_2 представимы в виде $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. Тогда дизъюнкт $D_1' \vee D_2'$ называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 по переменной X и обозначается $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Резольвента дизъюнктов D_1, D_2 по некоторой переменной X называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 и обозначается $\mathrm{Res}(D_1, D_2)$. По определению $\mathrm{Res}(X, \neg X) = 0$.

Свойство. Если $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. выполнимы, то выполнима $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Определение. *Резолютивным выводом формулы* Φ из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$ называется такая последовательность формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, что:

1) $\Phi_n = \Phi$;
2) каждая из формул Φ_i $(i=1,\ldots,n)$ либо принадлежит множеству S, либо является резольвентой $\Phi_i = \mathrm{Res}(\Phi_j, \Phi_k)$ предыдущих формул Φ_j, Φ_k при некоторых $1 \le j,k \le i$.

Теорема. Множество дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ противоречиво в том и только том случае, если существует резолютивный вывод значения 0 из множества S.

Так как по критерию логического следования соотношение

$$\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$$

равносильно условию

$$\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg\Phi \models,$$

то справедлив следующий результат.

Следствие (Проверка логического следования формул).

Пусть для формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi$ формула $\Psi = \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ имеет КНФ $\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$.

Тогда логическое следование $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \vDash \Phi$ равносильно существованию резолютивного вывода значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$..

Алгоритм проверки логического следования формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \vDash \Phi$:

1. Составить формулу

$$\Psi = \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \vDash \Phi$.

Пример. Методом резолюций проверим логическое следование:

$$(\neg X \Rightarrow Z),(Y \Rightarrow W),((W \wedge Z) \Rightarrow V),\neg V \models X \vee \neg Y.$$

Данное соотношение равносильно условию

$$(\neg X \Rightarrow Z),(Y \Rightarrow W),((W \wedge Z) \Rightarrow V),\neg V, \neg(X \vee \neg Y) \models,$$

т.е. условию противоречивости формулы

$$\Psi = (\neg X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge ((W \wedge Z) \Rightarrow V) \wedge \neg V \wedge \neg(X \vee \neg Y).$$

Найдем КНФ этой формулы:

$$\Psi = (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg(W \wedge Z) \vee V) \wedge \neg V \wedge (\neg X \wedge Y) =$$
$$= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg Z \vee V) \wedge \neg V \wedge \neg X \wedge Y\,.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов

$$S = \{X \vee Z, \neg Y \vee W, \neg W \vee \neg Z \vee V, \neg V, \neg X, Y\}\,.$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S:

$$\Phi_1 = \mathrm{Res}_X(X \vee Z, \neg X) = Z,$$

$$\Phi_2 = \mathrm{Res}_Y(\neg Y \vee W, Y) = W,$$

$$\Phi_3 = \mathrm{Res}_Z(\neg W \vee \neg Z \vee V, Z) = \neg W \vee V,$$

$$\Phi_4 = \mathrm{Res}_W(\Phi_2, \Phi_3) = V,$$

$$\Phi_5 = \mathrm{Res}(\Phi_4, \neg V) = 0.$$

Таким образом, множество дизъюнктов формулы Ψ противоречиво и, значит, выполняется исходное логическое следование.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы Φ :

1. Рассмотреть формулу

$$\Psi = \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\models \Phi$.

Решение логических задач

Задача. Методом резолюций проверьте справедливость следующих рассуждений.

Допустим, что если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник не отчисляется, если он является задолжником не более одного месяца или преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск. Не будет ли отчислен студент-задолжник, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась?

Решение. Введем обозначения для следующих высказываний:

D = «руководство вуза действует по закону высшей школы»;

S = «студент-задолжник отчисляется»;

P = «преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск»;

T = «студент является задолжником не более одного месяца».

Первое утверждение задачи

$$\Phi_1 = D \Rightarrow \left((T \vee P) \Rightarrow \neg S\right)$$

Сформулированное в вопросе задачи утверждение выражается следующим сложным высказыванием:

$$\Phi_2 = D \wedge T \Rightarrow \neg S$$

По условию задачи требуется определить, выполняется ли логическое следование

$$\Phi_1 \vDash \Phi_2$$

$$\Psi = \Big(D \Rightarrow \big((T \vee P) \Rightarrow \neg S\big)\Big) \wedge \neg(D \wedge T \Rightarrow \neg S) =$$

$$= \big(\neg D \vee (\neg(T \vee P) \vee \neg S)\big) \wedge \neg(\neg(D \wedge T) \vee \neg S) =$$

$$= \big(\neg D \vee \neg S \vee (\neg T \wedge \neg P)\big) \wedge D \wedge T \wedge S =$$

$$= \big((\neg D \vee \neg S \vee \neg T) \wedge (\neg D \vee \neg S \vee \neg P)\big) \wedge D \wedge T \wedge S.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы Ψ

$$S = \{\neg D \vee \neg S \vee \neg T, \neg D \vee \neg S \vee \neg P, D, T, S\}$$

и построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S.

$$\Phi_1 = \mathrm{Res}_D\,(\neg D \vee \neg S \vee \neg T, D) = \neg S \vee \neg T,$$

$$\Phi_2 = \mathrm{Res}_T\,(\neg S \vee \neg T, T) = \neg S,$$

$$\Phi_3 = \mathrm{Res}_T\,(\neg S, S) = 0.$$

Таким образом, из множества формул S резолютивно выводится значение 0 и по основной теореме множество S противоречиво. Следовательно, формула Ψ противоречива и выполняется исходное логическое следование $\Phi_1 \vDash \Phi_2$, т.е. студент-задолжник не будет отчислен, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась.

Алгебра логических значений

Пример алгебры дает множество $\{0,1\}$ истинностных значений высказываний с n-арными операциями F_{Φ}, которые являются функциями истинностных значений формул логики высказываний $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$, образованных с помощью n пропозициональных переменных $X_1,\ldots,X_n$.

Формула $\Phi = \neg X$ определяет унарную операцию $F_{\Phi} = F_{\neg X}(x)$, которая обозначается символом x' и называется *отрицанием* или *дополнением* переменной x.

Формулы $\Phi = X \vee Y$, $\Psi = X \wedge Y$ определяют бинарные операции $F_\Phi = F_{X \vee Y}(x, y)$, $F_\Psi = F_{X \wedge Y}(x, y)$, которые обозначаются соответственно символами $x \vee y$, $x \wedge y$ и называются *дизъюнкцией* и *конъюнкцией* переменных x, y.

Операция $x \vee y$ иногда называется также *объединением* или *суммой* переменных x, y и обозначается соответственно через $x \cup y$ или $x + y$.

Операция $x \wedge y$ иногда называется также *пересечением* или *произведением* переменных x, y и обозначается соответственно через $x \cap y$ или $x \cdot y$.

Алгебра $\boldsymbol{B}=(\{0,1\},\vee,\wedge,')$ впервые была введена в 19-ом веке английским математиком Дж.Булем с целью применения в логике математических методов.

Поэтому эта алгебра называется *алгеброй Буля* или *алгеброй логических значений*.

Теорема. Алгебра Буля $\boldsymbol{B}=(\{0,1\},\vee,\wedge,')$ удовлетворяет свойствам:

1) $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$, $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$ – ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции;

2) $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$ – коммутативность дизъюнкции и конъюнкции;

3) $a\vee a=a$, $a\wedge a=a$ – идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции;

4) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$, $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ – дистрибутивность соответственно конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5) $(a')' = a$ – идемпотентность дополнения;

6) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ – законы де Моргана;

7) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ – законы поглощения;

8) $a \vee a' = 1$, $a \wedge a' = 0$ – характеристическое свойство дополнения,

9) $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 1 = a$ – характеристическое свойство наибольшего элемента 1,

10) $a \vee 0 = a$, $a \wedge 0 = 0$ – характеристическое свойство наименьшего элемента 0.

Булевы многочлены и булевы функции

Для описания алгебраических свойств булевых алгебр используются формулы, которые называются *булевыми многочленами* и которые образованы из булевых переменных $x, y, \ldots$ (принимающих значения $0,1$) и символов булевых операций $+, \cdot, '$ по следующим правилам:

1) все булевы переменные $x, y, \ldots$ и символы $0,1$ – булевы многочлены;

2) если p и q – булевы многочлены, то таковыми являются выражения

$$(p)+(q),\ (p)\cdot(q),\ (p)'.$$

Если p образован с помощью $x_1,\dots,x_n$, то он обозначается $p(x_1,\dots,x_n)$.

Множество всех булевых многочленов от n переменных обозначим P_n .

Если в $p(x_1,\dots,x_n)$ вместо переменных $x_1,\dots,x_n$ подставить произвольные значения $a_1,\dots,a_n$ из множества $\boldsymbol{B}$, то в результате вычислений получится некоторый элемент $\overline{p}(a_1,\dots,a_n)$ алгебры $\boldsymbol{B}$.

Каждый булев многочлен $p(x_1,\dots,x_n)$ определяет отображение $\overline{p}:\boldsymbol{B}^n\to\boldsymbol{B}$, которое называется *булевой полиномиальной функцией*, определяемой булевым многочленом $p(x_1,\dots,x_n)$.

Определение. Булевы многочлены $p, q \in P_n$ называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же булеву полиномиальную функцию, т.е. $\overline{p} = \overline{q}$.

Символическая запись: $p \sim q$ или просто $p = q$.

Бинарное отношение $\sim$ является эквивалентностью на множестве P_n.

Классы эквивалентности $[p] = \{q \in P_n : p \sim q\}$, образуют фактор-множество $P_n / \sim = \{[p] : p \in P_n\}$.

Полные системы представителей этого фактор-множества называются системами *нормальных форм* булевых многочленов.

Для булевой переменной x и $\alpha \in \{0,1\}$ положим:

$$x^{\alpha} = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1, \\ x', & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Выражение x^{α} называется *литерой*.

Литера или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер называется *конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*).

Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все булевы переменные рассматриваемой формулы.

Дизъюнкт или конъюнкция (совершенных) дизъюнктов называется (*совершенной*) *конъюнктивной нормальной формой*. Сокращенно КНФ и СКНФ, соответственно.

Конъюнкт или дизъюнкция (совершенных) конъюнктов называется (*совершенной*) *дизъюнктивной нормальной формой*. Сокращенно ДНФ и СДНФ, соответственно.

Теорема. Любая булева функция $f\colon \boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$ является булевой полиномиальной функцией следующих булевых многочленов:

$$p_f = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \boldsymbol{B}^n} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\cdot x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

и

$$q_f = \prod_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \boldsymbol{B}^n} \left(f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) + x_1^{\alpha_1'} + \ldots + x_n^{\alpha_n'}\right).$$

Следствие 1. Если булева функция $f\colon \boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$ не равна тождественно нулю, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной дизъюнктивной нормальной формы

$$p_f = \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \boldsymbol{B}^n,\\ f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n},$$

которая называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СДНФ) *функции* f.

Следствие 2. Если булева функция $f{:}\boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$ не равна тождественно единице, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной конъюнктивной нормальной формы

$$q_f = \prod_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \boldsymbol{B}^n, \\ f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0}} (x_1^{\alpha_1'} + \ldots + x_n^{\alpha_n'}),$$

которая называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ) функции f.

Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ функции f:$\boldsymbol{B}^n \rightarrow \boldsymbol{B}$:

1. Составить таблицу значений функции f и добавить к ней два дополнительных столбца с заголовками «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты».

2. Если при значениях $x_1 = k_1, \ldots, x_n = k_n$ значение функции f равно 1, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные конъюнкты» записать конъюнкт $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ и в столбце «Совершенные дизъюнкты» сделать прочерк (при этом $x^1 = x$ и $x^0 = x'$).

3. Если при значениях $x_1 = m_1, \ldots, x_n = m_n$ значение функции f равно 0, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные дизъюнкты» записать дизъюнкт $x_1^{m_1'} + \ldots + x_n^{m_n'}$ и в столбце «Совершенные конъюнкты» сделать прочерк.

x_1	$\ldots$	x_n	$\ldots$	$f(x_1, \ldots, x_n)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
k_1	$\ldots$	k_n	$\ldots$	1	$x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$	–
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
m_1	$\ldots$	m_n	$\ldots$	0	–	$x_1^{m_1'} + \ldots + x_n^{m_n'}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

4. Дизъюнкция полученных совершенных конъюнктов

$$x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} + \ldots$$

является СДНФ функции f , конъюнкция полученных совершенных дизъюнктов

$$(x_1^{m_1'} + \ldots + x_n^{m_n'}) \cdot \ldots$$

является СКНФ функции f.