
Метод резолюций в алгебре высказываний

Следующие задачи равносильны:

- а) проверка тождественной истинности формул;
 - б) проверка логического следования формул;
 - в) проверка тождественной ложности формул;
 - г) проверка противоречивости множества формул;
 - д) проверка противоречивости множества ДИЗЬЮНКТОВ.**
-

Определение. Пусть для некоторой переменной X дизъюнкты D_1, D_2 представимы в виде $D_1 = D'_1 \vee X$, $D_2 = D'_2 \vee \neg X$. Тогда дизъюнкт $D'_1 \vee D'_2$ называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 по переменной X и обозначается $\text{Res}_X(D_1, D_2)$.

Резольвента дизъюнктов D_1, D_2 по некоторой переменной X называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 и обозначается $\text{Res}(D_1, D_2)$. По определению $\text{Res}(X, \neg X) = 0$.

Свойство. Если $D_1 = D'_1 \vee X$, $D_2 = D'_2 \vee \neg X$ выполнимы, то выполнима $\text{Res}_X(D_1, D_2)$.

Определение. Резолютивным выводом формулы Φ из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ называется такая последовательность формул Φ_1, \dots, Φ_n , что:

- 1) $\Phi_n = \Phi$;
- 2) каждая из формул Φ_i ($i=1, \dots, n$) либо принадлежит множеству S , либо является резольвентой $\Phi_i = \text{Res}(\Phi_j, \Phi_k)$ предыдущих формул Φ_j, Φ_k при некоторых $1 \leq j, k \leq i$.

Теорема. Множество дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ противоречиво в том и только том случае, если существует резолютивный вывод значения 0 из множества S .

Так как по критерию логического следования соотношение

$$\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$$

равносильно условию

$$\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg \Phi \models$$

то справедлив следующий результат.

Следствие (Проверка логического следования формул).

Пусть для формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi$ формула
 $\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg \Phi$ имеет КНФ
 $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$

Тогда логическое следование $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$
равносильно существованию резолютивного
вывода значения 0 из множества дизъюнктов
 $S = \{D_1, \dots, D_m\}.$

Алгоритм проверки логического следования формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$:

1. Составить формулу

$$\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg \Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \dots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$.

Пример. Методом резолюций проверим логическое следование:

$$(\neg X \Rightarrow Z), (Y \Rightarrow W), ((W \wedge Z) \Rightarrow V), \neg V \models X \vee \neg Y.$$

Данное соотношение равносильно условию

$$(\neg X \Rightarrow Z), (Y \Rightarrow W), ((W \wedge Z) \Rightarrow V), \neg V, \neg(X \vee \neg Y) \models,$$

т.е. условию противоречивости формулы

$$\Psi = (\neg X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge ((W \wedge Z) \Rightarrow V) \wedge \neg V \wedge \neg(X \vee \neg Y).$$

Найдем КНФ этой формулы:

$$\begin{aligned}\Psi &= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg(W \wedge Z) \vee V) \wedge \neg V \wedge (\neg X \wedge Y) = \\ &= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg Z \vee V) \wedge \neg V \wedge \neg X \wedge Y.\end{aligned}$$

Рассмотрим множество дизъюнктов

$$S = \{X \vee Z, \neg Y \vee W, \neg W \vee \neg Z \vee V, \neg V, \neg X, Y\}.$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S :

$$\Phi_1 = \text{Res}_X(X \vee Z, \neg X) = Z,$$

$$\Phi_2 = \text{Res}_Y(\neg Y \vee W, Y) = W,$$

$$\Phi_3 = \text{Res}_Z(\neg W \vee \neg Z \vee V, Z) = \neg W \vee V,$$

$$\Phi_4 = \text{Res}_W(\Phi_2, \Phi_3) = V,$$

$$\Phi_5 = \text{Res}(\Phi_4, \neg V) = 0.$$

Таким образом, множество дизъюнктов формулы Ψ противоречиво и, значит, выполняется исходное логическое следование.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы Φ :

1. Рассмотреть формулу

$$\Psi = \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \dots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\models \Phi$.



Решение логических задач

Задача. Методом резолюций проверьте справедливость следующих рассуждений.

Допустим, что если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник не отчисляется, если он является задолжником не более одного месяца или преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск. Не будет ли отчислен студент-задолжник, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась?

Решение. Введем обозначения для следующих высказываний:

D = «руководство вуза действует по закону высшей школы»;

S = «студент-задолжник отчисляется»;

P = «преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск»;

T = «студент является задолжником не более одного месяца».

Первое утверждение задачи

$$\Phi_1 = D \Rightarrow ((T \vee P) \Rightarrow \neg S)$$

Сформулированное в вопросе задачи утверждение выражается следующим сложным высказыванием:

$$\Phi_2 = D \wedge T \Rightarrow \neg S$$

По условию задачи требуется определить, выполняется ли логическое следование

$$\Phi_1 \models \Phi_2$$

$$\Psi = \left(D \Rightarrow ((T \vee P) \Rightarrow \neg S) \right) \wedge \neg(D \wedge T \Rightarrow \neg S) =$$

$$= (\neg D \vee (\neg(T \vee P) \vee \neg S)) \wedge \neg(\neg(D \wedge T) \vee \neg S) =$$

$$= (\neg D \vee \neg S \vee (\neg T \wedge \neg P)) \wedge D \wedge T \wedge S =$$

$$= ((\neg D \vee \neg S \vee \neg T) \wedge (\neg D \vee \neg S \vee \neg P)) \wedge D \wedge T \wedge S.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы Ψ

$$S = \{\neg D \vee \neg S \vee \neg T, \neg D \vee \neg S \vee \neg P, D, T, S\}$$

и построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S .

$$\Phi_1 = \text{Res}_D (\neg D \vee \neg S \vee \neg T, D) = \neg S \vee \neg T,$$

$$\Phi_2 = \text{Res}_T (\neg S \vee \neg T, T) = \neg S,$$

$$\Phi_3 = \text{Res}_T (\neg S, S) = 0.$$

Таким образом, из множества формул S резолютивно выводится значение 0 и по основной теореме множество S противоречиво. Следовательно, формула Ψ противоречива и выполняется исходное логическое следование $\Phi_1 \models \Phi_2$, т.е. студент-задолжник не будет отчислен, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась.

Алгебра логических значений

Пример алгебры дает множество $\{0,1\}$ истинностных значений высказываний с n -арными операциями F_Φ , которые являются функциями истинностных значений формул логики высказываний $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$, образованных с помощью n пропозициональных переменных X_1, \dots, X_n .

Формула $\Phi = \neg X$ определяет унарную операцию $F_\Phi = F_{\neg X}(x)$, которая обозначается символом x' и называется *отрицанием* или *дополнением* переменной x .

Формулы $\Phi = X \vee Y$, $\Psi = X \wedge Y$ определяют бинарные операции $F_\Phi = F_{X \vee Y}(x, y)$, $F_\Psi = F_{X \wedge Y}(x, y)$, которые обозначаются соответственно символами $x \vee y$, $x \wedge y$ и называются *дизъюнкцией* и *конъюнкцией* переменных x, y .

Операция $x \vee y$ иногда называется также *объединением* или *суммой* переменных x, y и обозначается соответственно через $x \cup y$ или $x + y$.

Операция $x \wedge y$ иногда называется также *пересечением* или *произведением* переменных x, y и обозначается соответственно через $x \cap y$ или $x \cdot y$.

Алгебра $B = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, ')$ впервые была введена в 19-ом веке английским математиком Дж. Булем с целью применения в логике математических методов.

Поэтому эта алгебра называется *алгеброй Буля* или *алгеброй логических значений*.

Теорема. Алгебра Буля $B = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, ')$ удовлетворяет свойствам:

1) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ – ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции;

2) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ – коммутативность дизъюнкции и конъюнкции;

3) $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ – идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции;

4) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ – дистрибутивность соответственно конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5) $(a')' = a$ – идемпотентность дополнения;

6) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ – законы де Моргана;

7) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ – законы поглощения;

8) $a \vee a' = 1$, $a \wedge a' = 0$ – характеристическое свойство дополнения,

9) $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 1 = a$ – характеристическое свойство наибольшего элемента 1,

10) $a \vee 0 = a$, $a \wedge 0 = 0$ – характеристическое свойство наименьшего элемента 0.

Булевы многочлены и булевы функции

Для описания алгебраических свойств булевых алгебр используются формулы, которые называются *булевыми многочленами* и которые образованы из булевых переменных x, y, \dots (принимающих значения 0,1) и символов булевых операций $+, \cdot, '$ по следующим правилам:

- 1) все булевы переменные x, y, \dots и символы 0,1 – булевы многочлены;
- 2) если p и q – булевы многочлены, то таковыми являются выражения

$$(p) + (q), (p) \cdot (q), (p)'$$

Если p образован с помощью x_1, \dots, x_n , то он обозначается $p(x_1, \dots, x_n)$.

Множество всех булевых многочленов от n переменных обозначим P_n .

Если в $p(x_1, \dots, x_n)$ вместо переменных x_1, \dots, x_n подставить произвольные значения a_1, \dots, a_n из множества B , то в результате вычислений получится некоторый элемент $\bar{p}(a_1, \dots, a_n)$ алгебры B .

Каждый булев многочлен $p(x_1, \dots, x_n)$ определяет отображение $\bar{p}: B^n \rightarrow B$, которое называется *булевой полиномиальной функцией*, определяемой булевым многочленом $p(x_1, \dots, x_n)$.

Определение. Булевы многочлены $p, q \in P_n$ называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же булеву полиномиальную функцию, т.е. $\overline{p} = \overline{q}$.

Символическая запись: $p \sim q$ или просто $p = q$.

Бинарное отношение \sim является эквивалентностью на множестве P_n .

Классы эквивалентности $[p] = \{q \in P_n : p \sim q\}$, образуют фактор-множество $P_n / \sim = \{[p] : p \in P_n\}$.

Полные системы представителей этого фактор-множества называются системами *нормальных форм* булевых многочленов.

Для булевой переменной x и $\alpha \in \{0, 1\}$ положим:

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1, \\ x', & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Выражение x^α называется *литерой*.

Литера или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер называется *конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*).

Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все булевы переменные рассматриваемой формулы.

Дизъюнкт или конъюнкция (совершенных)
дизъюнктов называется (совершенной)
конъюнктивной нормальной формой. Сокращенно
КНФ и СКНФ, соответственно.

Конъюнкт или дизъюнкция (совершенных)
конъюнктов называется (совершенной)
дизъюнктивной нормальной формой. Сокращенно
ДНФ и СДНФ, соответственно.

Теорема. Любая булева функция $f: B^n \rightarrow B$ является булевой полиномиальной функцией следующих булевых многочленов:

$$p_f = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

И

$$q_f = \prod_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n} (f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + x_1^{\alpha'_1} + \dots + x_n^{\alpha'_n})$$

Следствие 1. Если булева функция $f: \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ не равна тождественно нулю, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной дизъюнктивной нормальной формы

$$P_f = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{B}^n, \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

которая называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно **СДНФ**) функции f .

Следствие 2. Если булева функция $f: B^n \rightarrow B$ не равна тождественно единице, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной конъюнктивной нормальной формы

$$q_f = \prod_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n, \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0}} (x_1^{\alpha_1'} + \dots + x_n^{\alpha_n'}) ,$$

которая называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ) функции f .

Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ функции $f: B^n \rightarrow B$:

1. Составить таблицу значений функции f и добавить к ней два дополнительных столбца с заголовками «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты».

2. Если при значениях $x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n$ значение функции f равно 1, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные конъюнкты» записать конъюнкт $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ и в столбце «Совершенные дизъюнкты» сделать прочерк (при этом $x^1 = x$ и $x^0 = x'$).

4. Дизъюнкция полученных совершенных
конъюнктов

$$x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} + \dots$$

является СДНФ функции f , конъюнкция
полученных совершенных дизъюнктов

$$(x_1^{m'_1} + \dots + x_n^{m'_n}) \cdot \dots$$

является СКНФ функции f .