Логика высказываний и булевы алгебры

(Boolean Algebra and Logic)

Автор курса: Гринченков Дмитрий Валерьевич, доцент, к.т.н., заведующий кафедрой ПОВТ

Лекции – 18 часов

Практические занятия – 18 часов

Лабораторные работы – 18 часов

Экзамен

ВВЕДЕНИЕ

Математическая логика (ее называют также формальной логикой, теорией доказательств) изучает законы и формы корректных человеческих рассуждений.

Этот раздел математики имеет особое значение в изучении математических наук.

С одной стороны, предметом изучения математической логики является конкретная область знаний, связанная с расширением, развитием и формализацией положений и законов Булевой алгебры.

Положения этой теории лежат в основе таких направлений исследований, как дискретная математика, функциональное и логическое программирование, системы искусственного интеллекта и др.

С другой стороны, положения математической логики носят всеобщий характер, так как они определяют понятия и правила строгого выполнения логических доказательств.

Строгое доказательство правильности тех или иных утверждений – это центральное звено любой математической теории.

Главная цель математической логики – дать точное и адекватное определение понятия "*математическое доказательство*".

Поскольку математика является наукой, в которой все утверждения доказываются с помощью умозаключений, математическая логика может представляться как инструмент (как совокупность средств) для описания правил построения множества других математических теорий.

С точки зрения построения математической теории весь комплекс знаний в некоторой предметной области удобно разделить на две части:

1. **Содержательная часть теории (семантика).**
2. **Формальная часть теории (синтаксис).**

Содержательная часть теории (семантика), которая непосредственно связана с изучаемым объектом и позволяет описывать его поведение и свойства в терминах соответствующей области знания; все утверждения такого описания имеют содержательный смысл.

Формальная часть теории (синтаксис), основу которой составляет набор правил, позволяющих осуществлять преобразования и формировать новые истинные утверждения на основе ранее доказанных.

Эта часть теории носит абстрактный характер и не связывается с конкретным реальным объектом.

Более того, полученные в формальной теории результаты могут относиться к большому количеству различных объектов реальной жизни.

Пример.

Рассмотрим цепочку логических рассуждений:

- из *A* следует *B;*
- из *C* следует *A.*

Вывод: из C следует *B.*

Эта цепочка рассуждений может иметь практически любое содержание.

Например:

Все люди смертны.

Сократ – человек.

Следовательно, Сократ смертен.

Все студенты сдали сессию.

Петров – студент.

Следовательно, Петров сдал сессию.

Обычно формальная теория (исчисление) строится по типовой схеме, предусматривающей определение символов, из которых строятся формулы, и правил, по которым доказывается истинность новых формул.

Примером семантической теории является **булева алгебра** (алгебра высказываний).

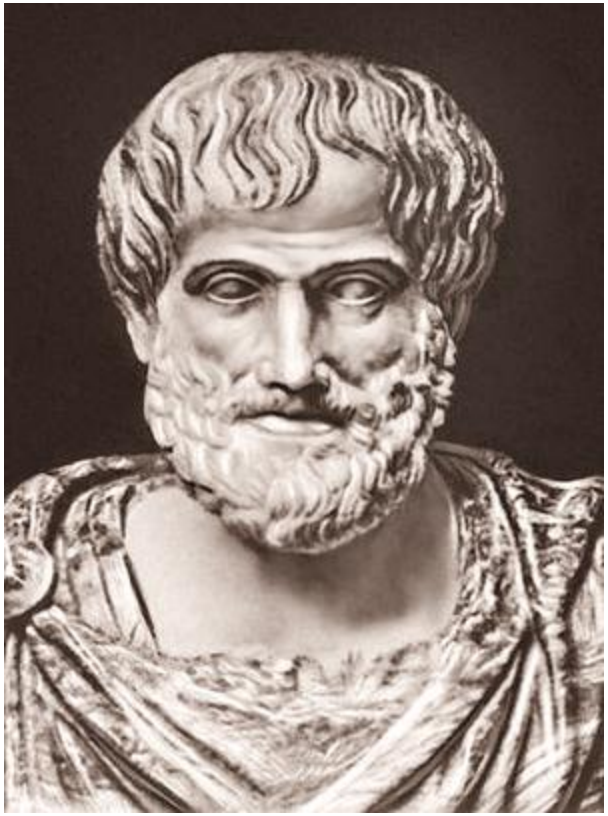
Одной из основных задач этой теории является установление значения истинности (или ложности) сложных (составных) высказываний и формирования в ее рамках средств, для описания реальных логических устройств.

Другим примером построения математической теории является **теория предикатов.**

Семантическая часть этой теории – логика предикатов, она представляет расширение логики высказываний в части описания множества отношений и двоичных функций (в том числе функций непрерывных переменных).

Синтаксической частью этой теории является **исчисление предикатов**, – это формальная система, которая дает инструмент для доказательства истинных в данной теории утверждений (теорем).

История развития



Интерес к логике возник еще в VI – IV вв. до н.э. Оформление же ее как самостоятельной науки произошло в трудах греческого философа Аристотеля (384 – 322 гг. до н. э.), который в своих "Аналитиках" систематизировал известные до него сведения, и эта система стала впоследствии называться *формальной логикой*.

Формальная логика в ее первоначальном виде, просуществовала без особых изменений двадцать столетий.

Сравнительно рано возникла идея и о том, что, записав исходные посылки формулами, похожими на математические, удастся заменить все рассуждения формальными "вычислениями".

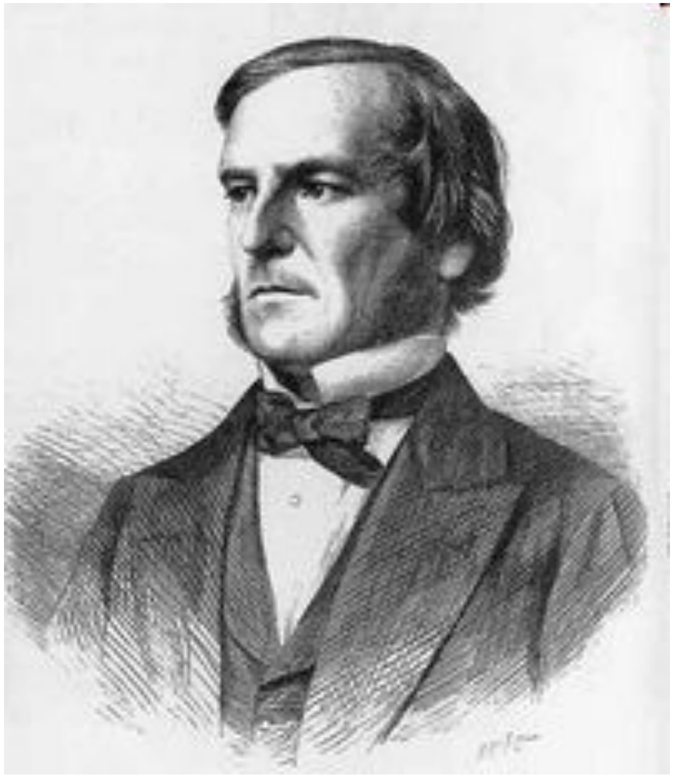
Уже в средние века делались попытки даже создания таких "логических" машин.

Развитие математики выявило недостатки логики, разработанной Аристотилем, и потребовало дальнейшего ее развития. Идеи о построении логики на математической основе были высказаны немецким математиком

Г. Лейбницем (1646 – 1716) в конце XVII века.

Он считал, что основные понятия логики должны быть обозначены символами, которые соединяются по особым правилам. Это позволит всякое рассуждение заменить вычислением.

Лейбниц говорил: «Мы употребляем знаки не только для того, чтобы передать наши мысли другим лицам, но и для того, чтобы облегчить сам процесс нашего мышления».



Первая реализация идей Лейбница, положившая начало современному аппарату математической логики (точнее, алгебре логики), принадлежит английскому ученому Дж. Булю (1815 – 1864). Он создал алгебру, в которой буквами обозначены высказывания, и это привело к алгебре высказываний.

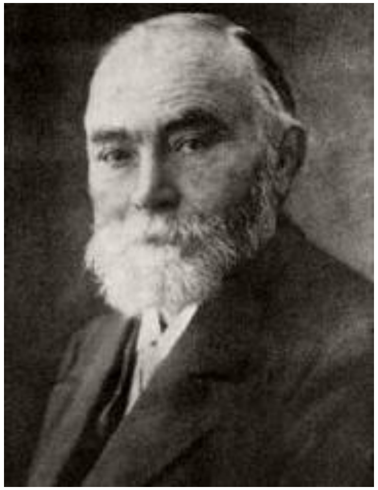
Введение символических обозначений в логику имело огромное значение, именно благодаря введению символов в логику была получена основа для создания новой науки − ***математической логики***.

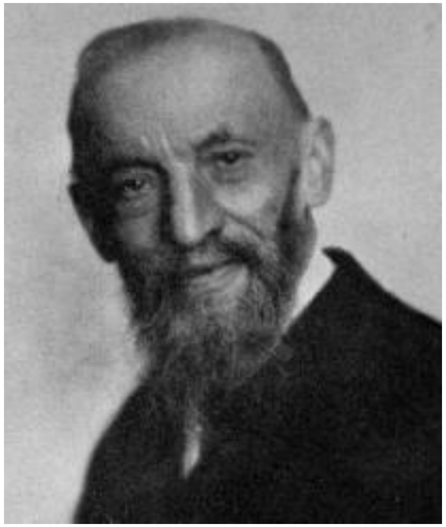
Применение математики к логике позволило представить логические теории в новой удобной форме и применить вычислительный аппарат к решению задач, ранее практически недоступных человеческому мышлению, что существенно расширило область логических исследований.

Ставшие в конце XIX века актуальными вопросы обоснования основных математических понятий также имели логическую природу, что привело к дальнейшему активному развитию математической логики.

Особенности математического мышления объясняются особенностями математических абстракций и многообразием их взаимосвязей, которые отражаются в логической систематизации математики, в доказательстве математических теорем.

Именно поэтому современную математическую логику определяют как *раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики*.





Существенное развитие математическая логика получила в работах Г. Фреге (1848 – 1925), посвященных теории формальных языков, и Д.Пеано (1858 – 1932), который применил математическую логику для обоснования арифметики и теории множеств.

Однако особое значение этот раздел математики приобрел после инициативы Д.Гильберта (1862 − 1943), выступившего в 20-х годах прошлого века с программой обоснования математики на базе математической логики, именно с этого момента и начинается активное развитие современной математической логики.

Теории Д. Гильберта и его школа основывались на построении математических теорий как синтаксических теорий, в которых все утверждения записываются формулами в некотором алфавите и точно указываются правила вывода одних формул из других.

В теорию как составная часть входит математическая логика. Таким образом, математическая теория, непротиворечивость которой требовалось доказать, стала предметом другой математической теории, которую Гильберт назвал *метаматематикой*, или *теорией доказательств*.

В связи с этим решается задача построения синтаксической, то есть формализованной аксиоматической теории самой математической логики.

Выбирая по-разному системы аксиом и правила вывода одних формул из других, получают различные синтаксические логические теории. Каждую из них называют *логическим исчислением*.

Для математиков это открытие логических парадоксов, затронувших основы теории множеств. Распространение аксиоматического метода в построении различных математических теорий, в первую очередь геометрии, а затем арифметики, теории групп и т.д.

В аксиоматическом построении математической теории предварительно выбираются некоторая система базовых понятий и отношения между ними. Эти понятия и отношения часто называются основными. Далее без доказательства принимаются основные положения рассматриваемой теории – аксиомы. Все дальнейшее содержание теории выводится логически из аксиом.

Впервые аксиоматическое построение математической теории было предпринято Евклидом в построении геометрии.

Изложение этой теории в «Началах» Евклида не безупречно. Евклид здесь пытается дать определение исходных понятий (точки, прямой, плоскости).

В доказательстве теорем используются нигде явно не сформулированные положения, которые считаются очевидными. Таким образом, в этом построении отсутствует необходимая логическая строгость, хотя истинность всех положений теории не вызывает сомнений.

Такой подход к аксиоматическому построению теории оставался единственным до XIX века, позднее появляются различные варианты неклассических логик.

Непротиворечивость аксиоматической теории является одним из основных требований, предъявляемых к системе аксиом данной теории. Она означает, что из данной системы аксиом нельзя логическим путем вывести два противоречащих друг другу утверждения.

Интерес инженеров связан с тем, что в рамках математической логики уже создан аппарат для расчета действия самых различных вычислительных и управляющих дискретных устройств и систем.

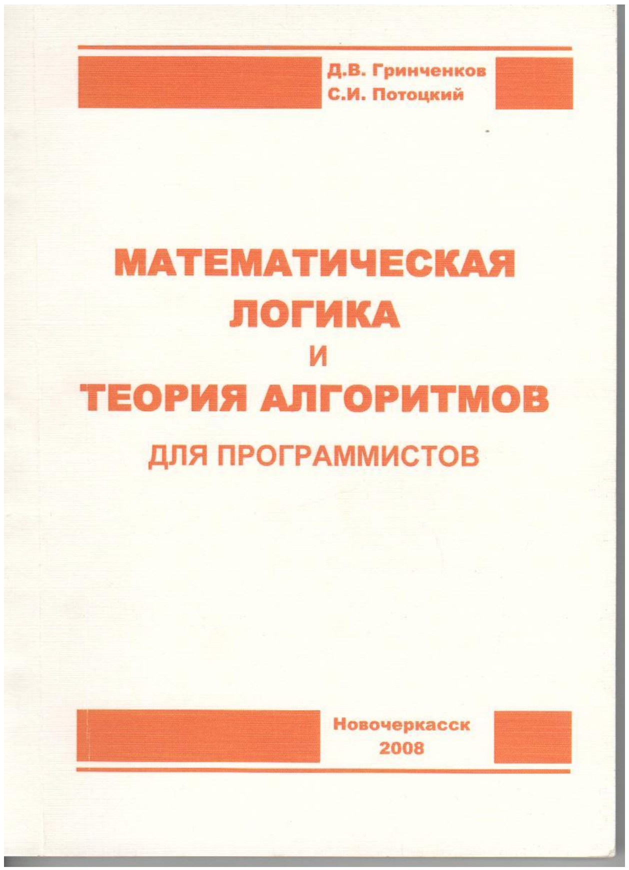
Первым идею применимости математической логики для формального описания сложных цепей, состоящих из технических объектов, вступающих в дискретные отношения, высказал в 1910 г. профессор С.-Петербургского университета П. Эренфест. Он предложил описывать релейные схемы, имевшие уже в то время большое значение для техники связи, с помощью аппарата логики. Но поскольку эти цепи были довольно примитивны и не требовали для своей разработки теоретической базы, идеи Эренфеста были надолго забыты.

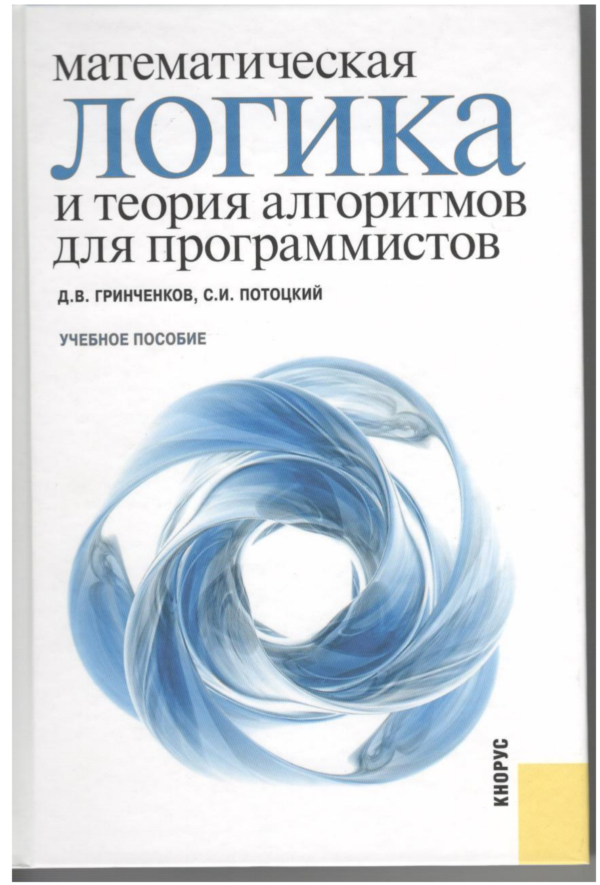
И лишь в 1938 г. американский инженер К.Шеннон использовал на практике алгебру логики Дж. Буля для анализа и расчета релейных схем.

В дальнейшем достижения математической логики стали использоваться при создании технических средств для информационных и вычислительных систем.

Кроме того, результаты, полученные в логической теории языков, применяются при создании формальных языков программирования и элементов искусственного интеллекта.

Рекомендуемая литература по курсу


Д.В. Гринченков
С.И. Потоцкий
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
И
ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ
ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ
Новочеркасск
2008


математическая
логика
и теория алгоритмов
для программистов
Д.В. ГРИНЧЕНКОВ, С.И. ПОТОЦКИЙ
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
КНОРУС