

Математический анализ

Лекция -4(ю)

Производная функции

Определение Пусть $a \in \mathbf{R}$. Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал (b, c) , содержащий точку a .

Проколотой окрестностью $\dot{O}(a)$ точки a называется любая ее окрестность, из которой исключается сама точка a .

Определение Пусть $\varepsilon > 0$, ε -окрестностью $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Проколотой ε -окрестностью $\dot{O}_\varepsilon(a)$ точки a называется ее ε -окрестность, из которой исключена сама точка a . Окрестность ε и проколотую окрестность ε точки a можно задать в виде

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

$$\dot{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\} = \underline{(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)}.$$

Определение (Коши). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a (или при $x \rightarrow a$), если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

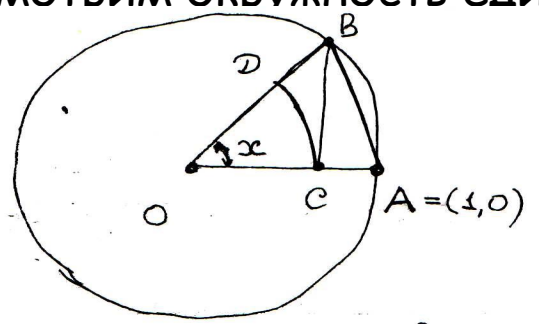
Здесь принятые обозначения $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

Заметим, что в самой точке a функция $f(x)$ может быть не определена

Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x} \sin \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не определена, но $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Первый замечательный предел

Рассмотрим окружность единичного радиуса. X - центральный угол. $0 < x < \pi/2$



$$|OA| = |OB| = 1$$

$$S_{\text{сектор } OCD} < S_{\Delta OAB} < S_{\text{сектор } OAB}$$

$$S_{\text{сектор } OCD} = \frac{\pi |OC|^2}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2} \cdot \cos^2 x$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \sin x$$

$$S_{\text{сектор } OAB} = \frac{\pi |OA|^2}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} \cos^2 x < \frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} \\ \text{т.к. } 0 < x \Rightarrow \\ \cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \end{cases}$$

т.к. \sin и \cos непрерывны, $\exists \delta$ верно при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0}$$

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1 \Rightarrow |\sin x| < |x|$$

$\forall \epsilon > 0$

$$|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \epsilon \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ при } 0 < |x - 0| = |x| < \delta(\epsilon) = \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

первый замечательный предел

Перейдем к пределу при $x \rightarrow 0$ в кр. ве $1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Второй замечательный предел.

Теорема. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Теорема. Послед. $\{x_n\}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Док-во.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \right\} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$x_n < x_{n+1}$$

ничена:

t.e.

$$\{x_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$x_n < 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

следовательно $2 < x_n < 3$, $n \rightarrow \infty$

Следствие 1. Если $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta(x)} \right\}^{\beta(x)} = e.$$

Док. Положим $\beta(x) = y \rightarrow \infty$, $x \rightarrow a \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta(x)} \right\}^{\beta(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e. \quad \blacktriangleright$$

Следствие 2. Если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \alpha(x) \right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$$

Док. Положим $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \rightarrow \infty$, $x \rightarrow a$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \alpha(x) \right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta(x)} \right\}^{\beta(x)} = e. \quad \blacktriangleright$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

список функций, эквивалентных x при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \\ \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x \quad (x \rightarrow 0).$$

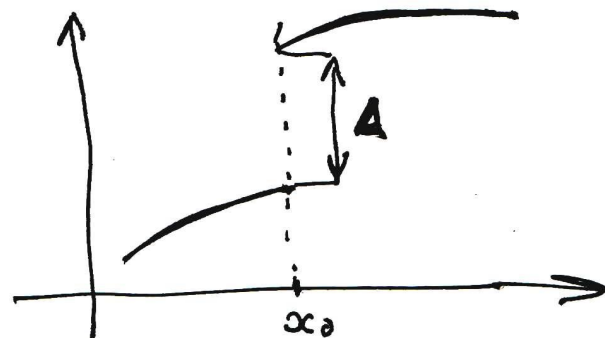
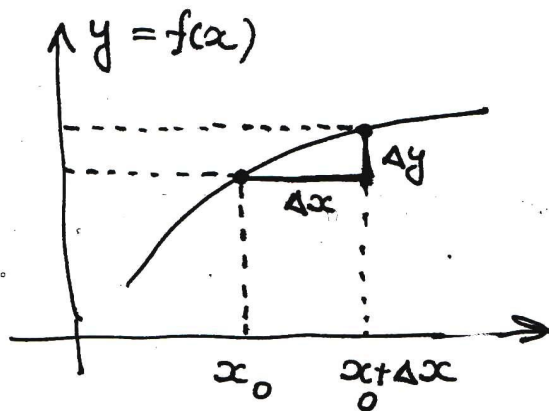
Замечание Заменяя $\delta.m.$ на эквивалентные или в суммах и разностях, вообще говоря, нельзя.

Пример. $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$

$$\left. \begin{array}{l} \ln(1+x) \sim x \\ \ln(1-x) \sim -x \end{array} \right\} x \rightarrow 0$$

Если заметить, то $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x}{x^2} = 0$, т

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

Непрерывность функции

$$\Delta f = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad | \quad \text{приращ. ф. в точке } x_0$$

Определение. Функция $f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$

подробно: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\} = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$x_0 + \Delta x = x \rightarrow x_0 \quad \text{или} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Непрерывность функции $f(x)$ в окрестности т. a сформулируем на языке приращений $\Delta f(x)$ от приращения аргумента Δx :

$$\Delta x = x - a. \quad (9.3)$$

Тогда новое значение $f(a + \Delta x)$ функции $y = f(x)$ будет отличаться от прежнего значения $f(a)$ на величину

$$\Delta y = \Delta f(a) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a), \quad (9.4)$$

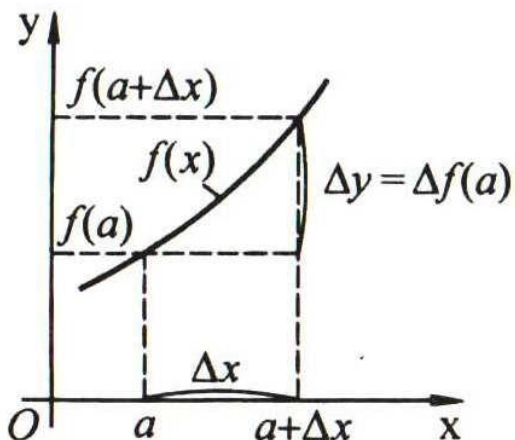


Рис.3

называемую приращением функции в точке $a \in \mathbb{R}$. Геометрический смысл приращений ясен из рис. 9.3, на котором и Δx , и Δy положительны.

Поскольку $f(x) \rightarrow f(a)$ при $x \rightarrow a$, то с учетом (9.3) и (9.4) это равносильно

$\Delta f(a) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $\Delta f(a)$ является функцией, бесконечно малой (б.м.) при $\Delta x \rightarrow 0$.


Определение 9.3. Функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке $a \in \mathbb{R}$, если приращение функции в этой точке является функцией, б.м. при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0. \quad (9.5)$$

Следствие. Если $y = f(x)$ непрерывна в x_0 ,
а $g(y)$ непрерывна в $y_0 = f(x_0)$, то

$$\textcircled{10} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

Док. В силу непрерывности $f(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$,

в силу непрерывности сложной функции $g(f(x))$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$. 

Следовательно, для непрерывных функций операция предельного перехода перестановочна с операциями по вычислению значения функции в соответствующей точке. Теорема $\textcircled{10}$ позволяет при вычислении предела сложной непрерывной функции удобно чередовать эти операции.

Непрерывные функции в точке

Определение. Функция $f(x)$, определённая на $[x_0, x_0 + \varepsilon)$

$\varepsilon > 0$ наз. непрерывной слева в т. x_0 , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \quad \text{и} \quad f(x_0+0) = f(x_0)$$

Функция $f(x)$, определённая на $(x_0 - \varepsilon, x_0]$, $\varepsilon > 0$ наз.

непрерывной справа в т. x_0 , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \quad \text{и} \quad f(x_0-0) = f(x_0).$$

Примеры непрерывных функций.

1. $y = C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y(x_0) = C \mid \Delta y = 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$

5. $y = \sin x$ непрерывна $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\parallel y = \cos x$ - тоже непрерывна

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = \left| 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \leq$$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x| \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

2. $y = x$ непрерывна $\forall x \in \mathbb{R}$
 $\Delta y = \Delta x \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$

3. $y = x^n$ непрерывна как произведение непрерывных функций.

4. Многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
 непрерывен как сумма произведений непрерывных функций.

Определение 21. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если в этой точке выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это определение предъявляет к функции следующие требования:

- а) функция $f(x)$ должна быть определена в точке x_0 ;
- б) функция $f(x)$ должна иметь предел в точке x_0 ;
- в) этот предел должен совпадать со значением функции $f(x)$ в этой точке.

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то говорят, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0 , а сама точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.



Односторонние пределы.

Если односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют и конечны, то точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. В частности, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, т. е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет предел, то говорят, что x_0 есть точка устранимого разрыва. Разрыв в этом случае можно устранить, доопределяя или переопределяя значение функции $f(x)$ в точке x_0 : $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Эта процедура называется продолжением функции по непрерывности.

Всякая точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва 1-го рода, называется точкой разрыва 2-го рода. Другими словами, в точке разрыва 2-го рода по крайней мере один из односторонних пределов функции не существует или бесконечен. Наиболее типичный случай разрыва 2-го рода — это именно бесконечный разрыв.

Продолжение.

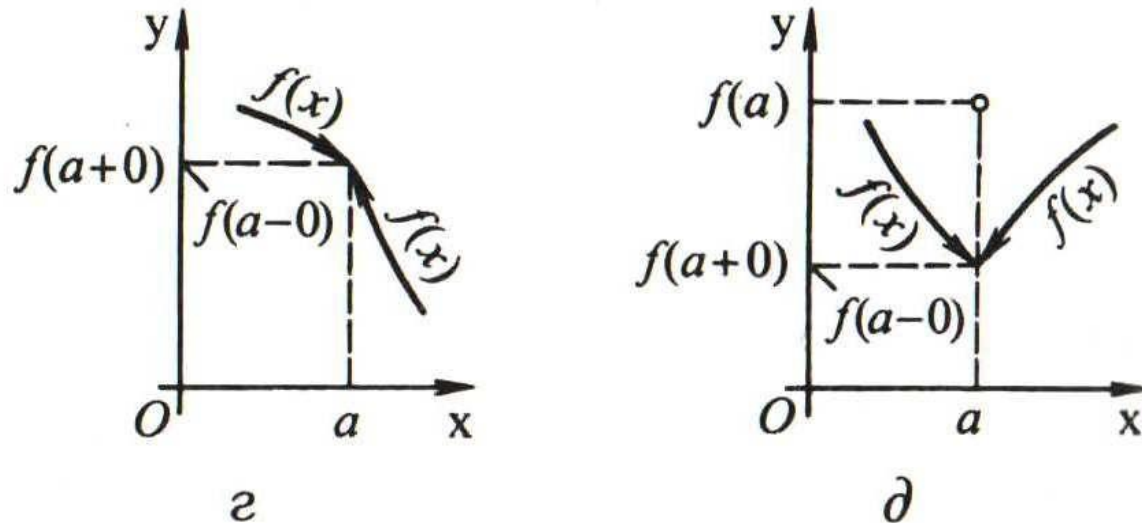


Рис. 9.4

Если

скачок равен нулю (см. рис. 9.4, а и б), т.е. в точке a выполнено еще и условие 3 непрерывности функции, а поэтому существует конечный предел функции в этой точке, то имеем точку устранимого разрыва. Если в этом случае для функции $g(x)$, совпадающей в некоторой проколотовой окрестности точки a с $f(x)$, положить

$$g(a) = f(a+0) = f(a-0),$$

то $g(x)$ будет непрерывна в точке a , поскольку все условия 1–4 непрерывности функции в точке a будут выполнены. Про возможность введения такой непрерывной функции $g(x)$ говорят, что разрыв непрерывности $f(x)$ в точке a можно устранить.

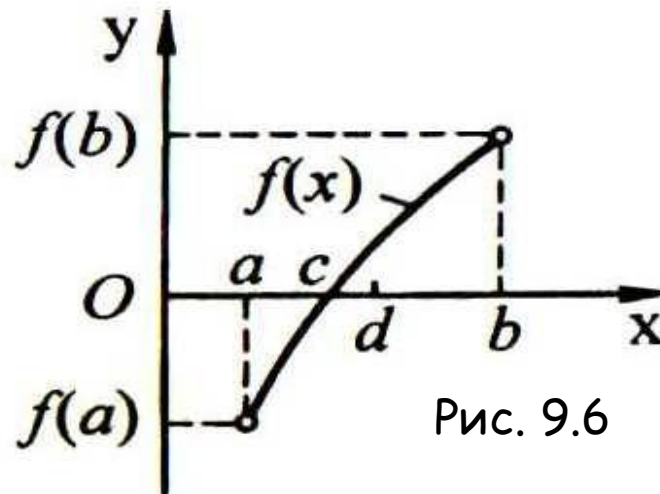
Свойства непрерывных функций

Теорема (первая теорема Больцано — Коши).

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдется точка c , в которой функция обращается в нуль, т.е.

$$(f(x) \in C[a, b]) \wedge (f(a)f(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Теорема имеет простой геометрический смысл: если непрерывная линия *графика функции* лежит и ниже, и выше оси Ox , то эта линия пересекает ось Ox (рис. 9.6).



Теорема (первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция является *ограниченной* на этом отрезке, т.е. существуют числа m и M , такие, что $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a, b]$.

Существенным условием в этой теореме является непрерывность функции именно на отрезке. Непрерывность лишь на интервале не обеспечивает ограниченности функции. Так, при $x \in (0, \pi/2)$ функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна (см. пример 9.3), но не ограничена

Асимптоты

Определение. Прямая $x = a$ наз.
вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$,
если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.

Пример. Прямая $x = 0$ - вертикальная асимптота графиков
 $y = \frac{1}{x}$, $y = \ln x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Определение. Прямая $y = kx + b$ наз. (двусторонней) наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

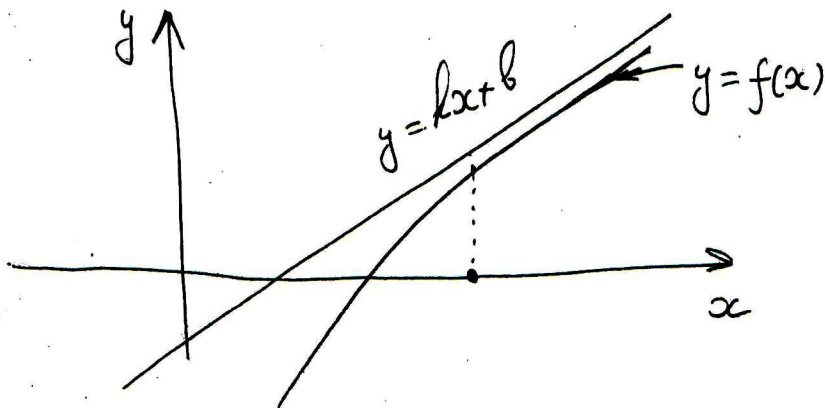
$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

иначе, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (kx + b)\} = 0$

Если этот предел существует только при:

$x \rightarrow -\infty$, то асимптота наз. левосторонней,	<u>односторонняя</u> <u>асимптота</u> .
$x \rightarrow +\infty$, — правосторонней.	

При $k = 0$ асимптота наз. горизонтальной.



Теорема. Прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда

когда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - kx\} = b$$

Док-во. Пусть $y = kx + b$ - асимптота, тогда

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \rightarrow k, \quad x \rightarrow \infty$$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \rightarrow b, \quad x \rightarrow \infty$$

Пусть $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - kx\} = b \Rightarrow$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \Rightarrow y = kx + b - \text{асимптота.} \blacktriangleright$$

Замечание. Для существования асимптоты необходимо

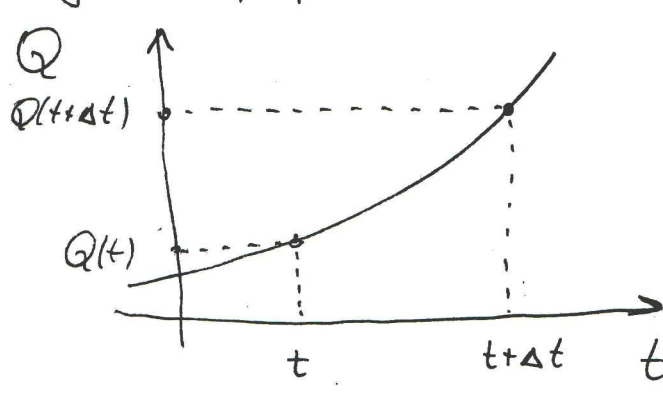
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - kx\} = b.$$

Производная функции

В основе дифференциального исчисления лежат фундаментальные понятия производной и дифференциала функции в точке. Термин „производная“ был введен Ж. Лагранжем в 1797 г., тогда как термин „дифференциал“ Г. Лейбниц использовал уже начиная с 1675 г. Но прежде чем говорить о производной и дифференциале, целесообразно предварительно рассмотреть отношение приращения функции к приращению ее аргумента.

Понятие производной

Пусть величина $Q = Q(t)$ увеличивается во время
За время от t до $t + \Delta t$ величина Q
получит приращение $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$



Как быстро меняется $Q(t)$
какова скорость изменения

Средняя скорость изменения величины Q
за время от t до $t + \Delta t$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

Скорость изменения величины Q в момент времени t

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \dot{Q}(t)$$



Таким образом, приходим к важнейшему понятию :

Определение. Пусть ф. $f(x)$ определена в окр. т. $x \in U(x)$

Если существует предел

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

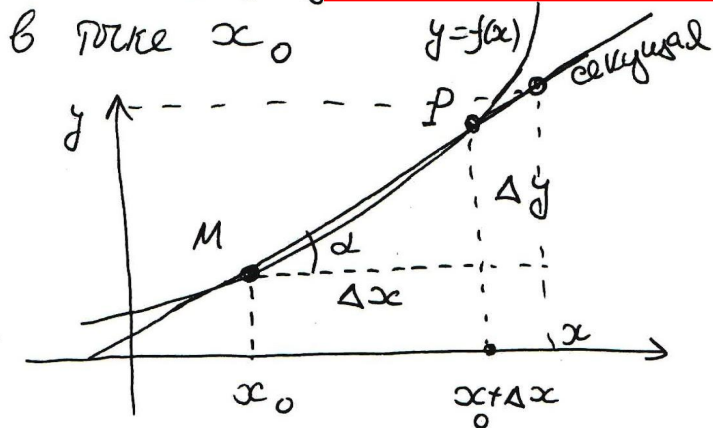
то он наз. производной функции f в точке x .

Наряду с обозначением производной $f'(x)$ используем.

также: $\frac{df}{dx}(x)$, $\dot{f}(t)$

Процедура вычисления производной наз.
дифференцированием

Рассм. задачу о касательной к графику функции $y = f(x)$.



Касательной наз. предельное положение секущей при $P \rightarrow M$

Ур-е секущей - ур-е прямой, проходящей через точку $M(x_0, f(x_0))$ с угловым коэф. $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\underline{k = f'(a)}$$

Пусть (x, y) точка секущей, тогда

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \alpha = k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x} (x - x_0) + f(x_0) \quad | \text{ ур-е секущей}$$

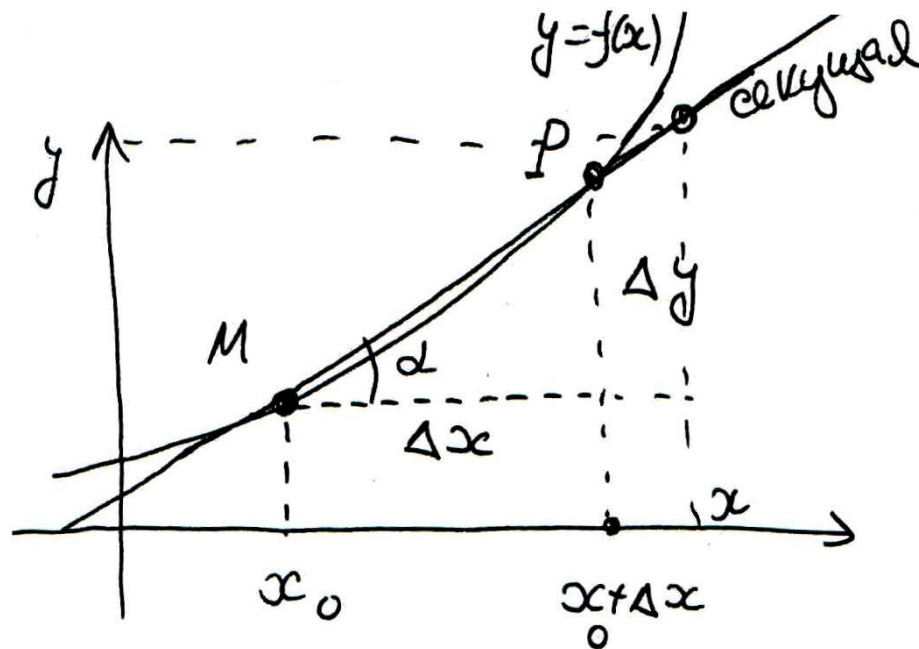
При $\Delta x \rightarrow 0$ $P \rightarrow M$ и ур-е секущей переходит в

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad | \text{ ур-е касательной}$$

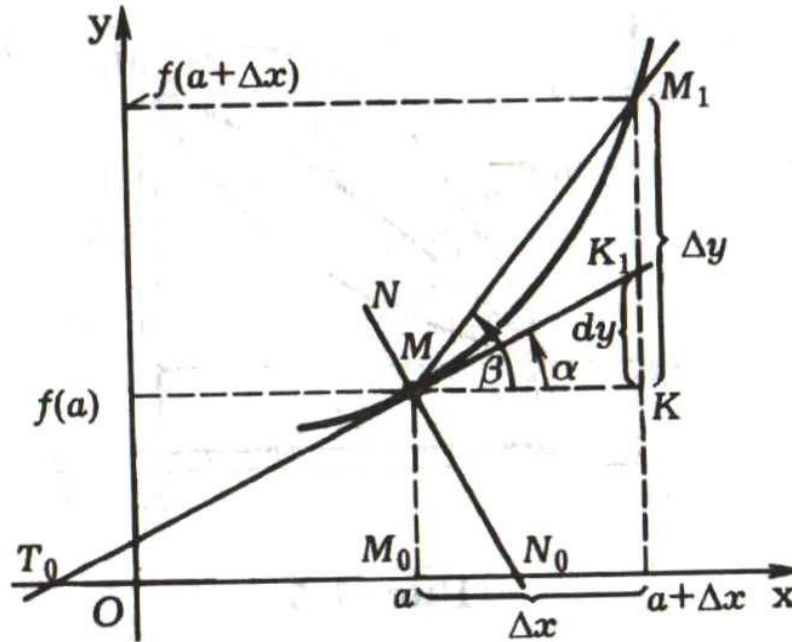
Геометрический смысл производной

С геометрической точки зрения значение производной $f'(a)$ в данной точке $x = a$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(a, f(a))$. Зная геометрический смысл производной, нетрудно написать уравнение касательной к плоской кривой $y = f(x)$ в точке $M(a, f(a))$, если касательная не параллельна оси Oy .

$$k = f'(a)$$



Уравнение нормали в точке



Прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная к касательной, наз. нормалью к графику функции $y = f(x)$ в т. M (прямая NM). Если $f'(a) \neq 0$, то уравнение нормали имеет вид

$$y - f(a) = -(x - a) / f'(a)$$

В случае $f'(a) = 0$, нормаль вертикальна, т.е. ее уравнение будет $x = a$

Теорема. Если функции u, v имеют конечные производные в т. x , то

$$a) (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x),$$

$$b) (u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$b) \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0.$$

Док-во

$$a) \Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$b) \Delta(uv) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = \\ = [u(x) + \Delta u][v(x) + \Delta v] - u(x)v(x) = u(x)\Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$(uv)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \overbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}}^{(u \cdot v)'(x)} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$b) \Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Дифференцируемость функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале E , содержащем точку $x = a$. Возьмем такое приращение Δx аргумента x , чтобы точка $a + \Delta x$ не вышла из этого интервала, т.е. $a + \Delta x \in E$.

Определение 1.3. Функцию $y = f(x)$ называют *дифференцируемой в точке a* , если отвечающее приращению Δx приращение Δy этой функции в окрестности точки a может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x, \quad (1.15)$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx , а $\beta(\Delta x)$ — функция, бесконечно малая (б.м.) при $\Delta x \rightarrow 0$.

Ясно, что в (1.15) $\beta(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$ как произведение бесконечно малых функций есть б.м. функция более высокого порядка по сравнению с Δx . Поэтому (1.15) можно переписать в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \quad (1.16)$$

Теорему называют необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции одного переменного. Она позволяет дать еще одно определение дифференцируемости такой функции: функцию $y = f(x)$ называют дифференцируемой в точке a , если в этой точке существует конечная производная $f'(a)$. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке устанавливает следующая теорема.

Теорема 1.2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то она непрерывна в этой точке.

◀ Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке a , ее приращение представимо в виде (1.16) $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$. Отсюда сразу следует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

что равносильно (1.1) и означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке a . ▶

Упрощенные формулы дифференцирования

1) $f(x) = C = const$
 $\Delta f = C - C = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0 \Rightarrow C' = 0$

Лейбниц. Если $u = u(x)$, то $(Cu)' = Cu'$

2) $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots$ *

$$\Delta f = (x + \Delta x)^n - x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (\Delta x)^k - x^n =$$

$$= \cancel{C_n^0 x^n} + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + \dots - \cancel{x^n} = n x^{n-1} \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = n x^{n-1} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = n x^{n-1}$$

3) $f(x) = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}}{2 \left(\frac{\Delta x}{2} \right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\left(\frac{\Delta x}{2} \right)} = \cos x \quad \left| \begin{array}{l} \text{независимость} \\ \underline{\underline{\cos x}} \end{array} \right.$$

4) $f(x) = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

Док. аналогично 3)

* $\Delta f = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1 \right] \sim x^n n \frac{\Delta x}{x}$
 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = n x^{n-1}$ $\Delta x \rightarrow 0$

|| $u = x$!

Продолжение

$$5) \underline{f(x) = \operatorname{tg}(x)} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$6) \underline{f(x) = \operatorname{ctg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$7) \underline{f(x) = a^x}, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \text{ - константа проверить область}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

$$\text{В частности, при } a = e \quad \underline{(e^x)' = e^x}$$

Производная сложной функции.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в τ . x_0 , а функция $\mathcal{F} = g(y)$ имеет производную в τ . $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $\mathcal{F}(x) = g(f(x))$ имеет в τ . x_0 производную

$$\mathcal{F}'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Док-во

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

$$\frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0) + \Delta f) - g(f(x_0))}{\Delta f} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\Delta f \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

Логарифмическая производная

Если требуется найти производную функции (показательная степенная)

$$y(x) = [u(x)]^{\sigma(x)}, \quad u(x) > 0,$$

то можно рассмотреть ее логарифмическую производную:

$$[\ln y(x)]' = \frac{y'(x)}{y(x)} \quad \left| \frac{y'}{y} \xrightarrow{\text{дет}} \text{логарифмич. производная} \right.$$

$$\ln y = \sigma \ln u \Rightarrow \frac{y'}{y} = \sigma' \ln u + \frac{\sigma u'}{u} \Rightarrow$$

$$y' = y \left(\sigma' \ln u + \frac{\sigma u'}{u} \right) = \underline{u^{\sigma} \left(\sigma' \ln u + \frac{\sigma u'}{u} \right)}$$

Примеры.

1. $y = x^{\alpha}$, $x > 0$, α - действительное

$$\ln y = \alpha \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = y \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \underline{\text{при произвольном } \alpha \text{ и } x > 0}$$

Теорема 2.3. Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(a)$ и пусть, кроме того, для нее существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, непрерывная в соответствующей точке $y = b$, где $b = f(a)$. Тогда существует производная $g'(b)$ и она равна

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \quad (2.18)$$

Производные обратных элементарных функций

$$\textcircled{1}) y = f(x) = \sin x, \quad x = f^{-1}(y) = \arcsin y$$

При $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ выполняются условия Теоремы \Rightarrow

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \left. \begin{array}{l} \cos x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

Обратно пишут $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\textcircled{2}) \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad \Rightarrow$$

$$\underline{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$



Продолжение

$$3) y = f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$$

При $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ выполняются условия Теоремы \Rightarrow

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Обратно именуя $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$$4) \underline{(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}}$$

$$5) y = f(x) = a^x, \quad x = f^{-1}(y) = \log_a y \quad \left| \begin{array}{l} a \neq 1 \\ \text{число не } 0 \\ \text{одн. ф-ии} \end{array} \right.$$

$$[\log_a y]' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$$

Обратно именуя: $\underline{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$, В частности, $\underline{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$

Таблица производных основных функций

$$\text{I. } (x^n)' = nx^{n-1}.$$

$$\text{II. } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

$$\text{III. } (\sin x)' = \cos x.$$

$$\text{IV. } (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\text{V. } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\text{VI. } (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\text{VII. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

$$\text{VIII. } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

$$\text{IX. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{X. } (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}.$$

$$\text{XI. } (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$\text{XII. } (e^x)' = e^x.$$

$$\text{XIII. } (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

$$\text{XIV. } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x} \quad (x > 0, a > 0).$$

$$\text{XV. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

$$\text{XVI. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$\text{XVII. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\text{XVIII. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

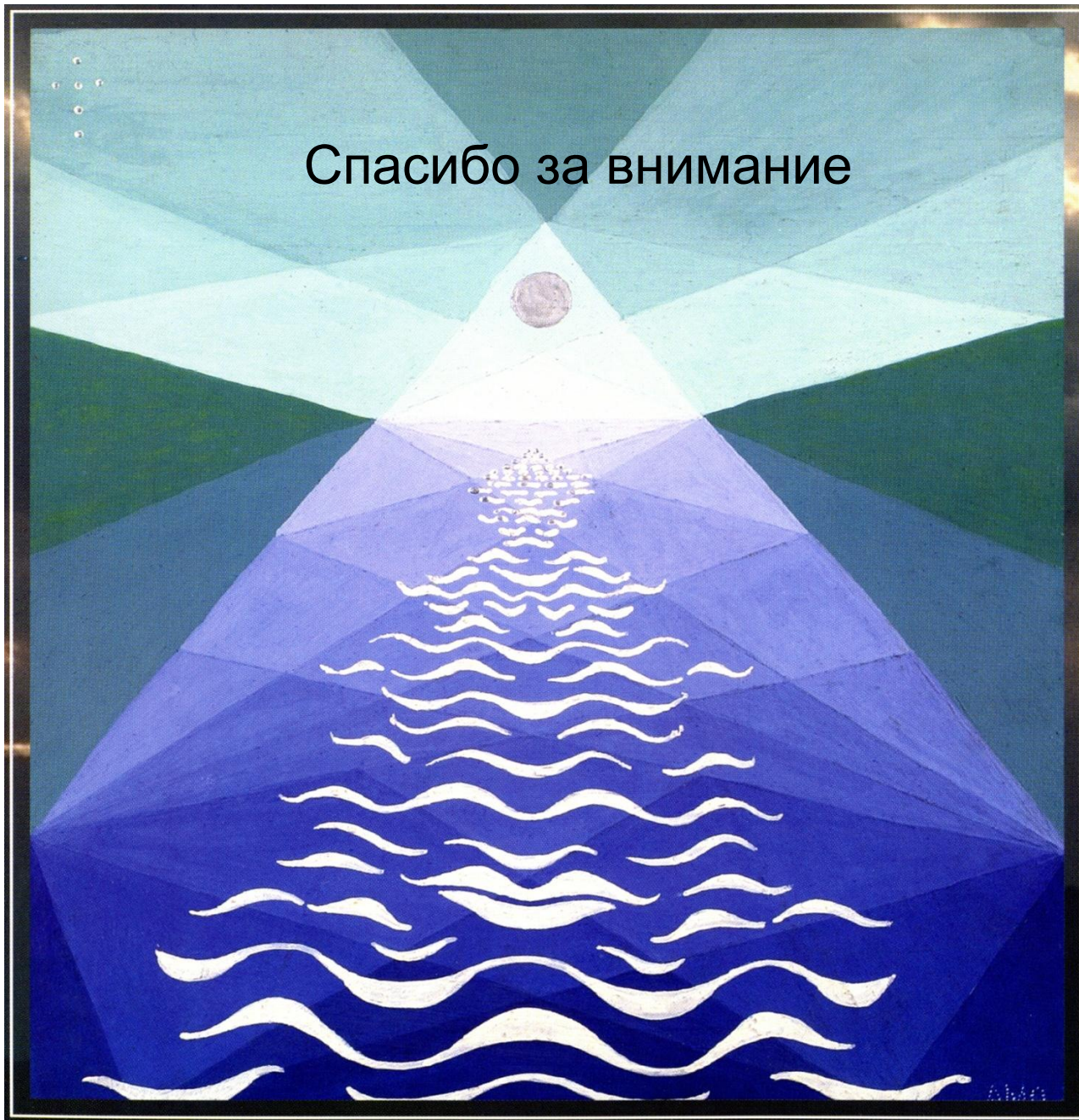
$$\text{XIX. } (\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{XX. } (\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1).$$

$$\text{XXI. } (\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1).$$

$$\text{XXII. } (\operatorname{Arcth} x)' = -\frac{1}{x^2-1} \quad (|x| > 1).$$

Спасибо за внимание



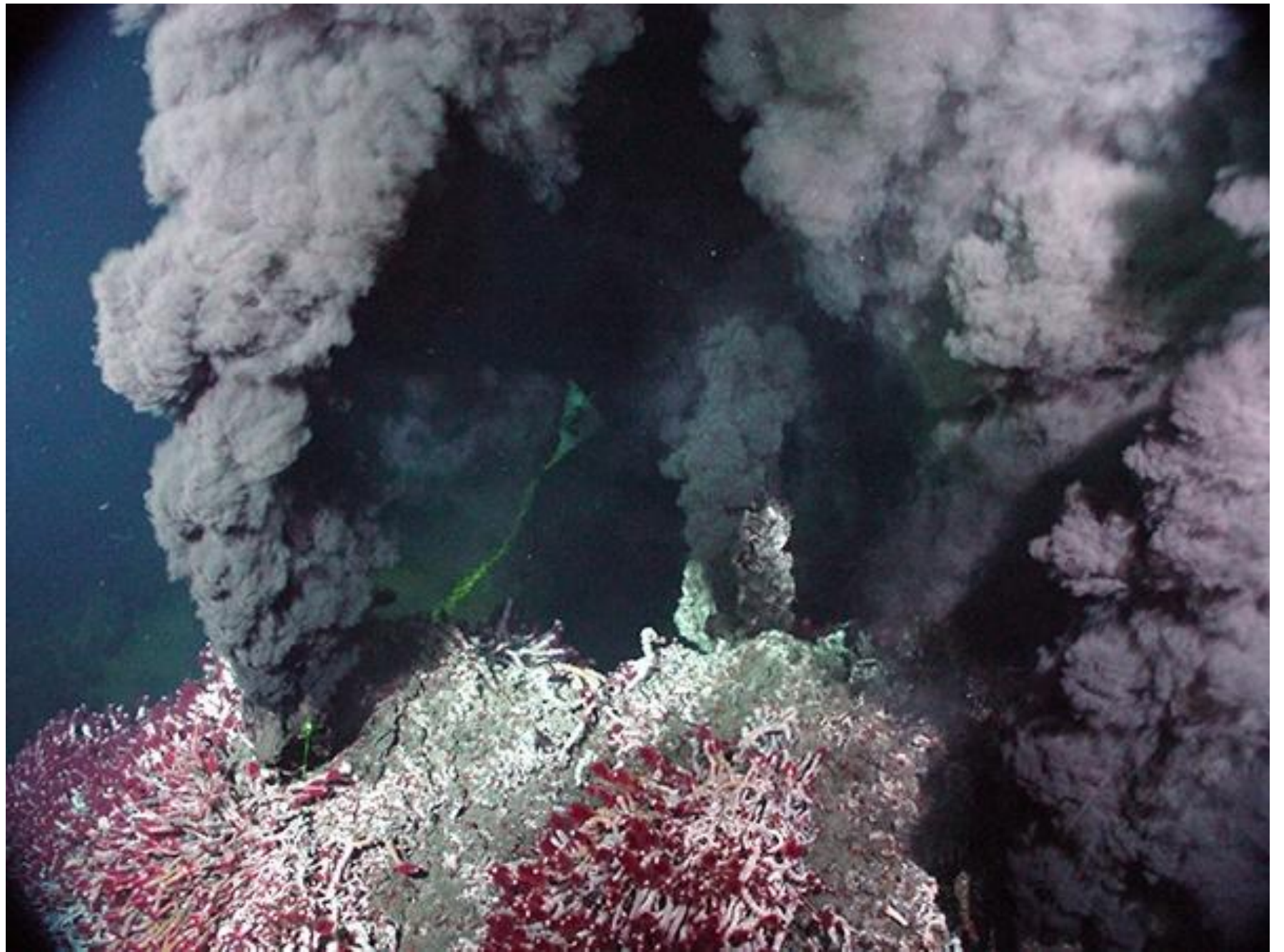
А.С. Монин, Н.Н. Корчагин

**Десять открытий
в физике океана**

Прикладная математика и
открытия в Мировом океане









Ранее (1959) специалисты по геоморфологии и тектонике дна Океана установили: САХ является частью срединно-океанских хребтов, образующих по всему дну Мирового океана причудливую структуру в виде непрерывной цепочки подводных гор, высотой 1500–4000 м и длиной 60 тыс. км с пересекающимися многочисленными поперечными разломами по всей ее длине.



высота цунами,
определённая по
следам на деревьях

