Математический анализ

Лекция -4(ю)

Производная функции

Повтор лекции 2

Предел функции

Определение Пусть $a \in \mathbf{R}$. Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал (b, c), содержащий точку a.

Проколотой окрестностью $\dot{O}(a)$ точки a называется любая ее окрестность, из которой исключается сама точка a.

Определение Пусть $\varepsilon > 0$, ε-окрестностью $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Проколотой ε-окрестностью $\dot{O}_\varepsilon(a)$ точки a называется ее ε-окрестность, из которой исключена сама точка a. Окрестность ε и проколотую окрестность ε точки a можно задать в виде

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

$$\dot{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\} = \underline{(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)}.$$

Определение (Коши). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Здесь принятые обозначения $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

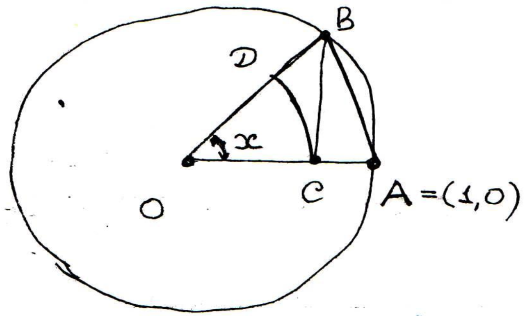
Заметим, что в самой точке a функция $f(x)$ может быть не определена

Пример : $f(x) = \sqrt[3]{x} \, \sin\frac{1}{x}$ в точке x = 0 не определена , но $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Повтор лекции 2

Первый замечательный предел

Рассмотрим окружность единичного радиуса. x – центральный угол. $0 < x < \pi/2$



$$|OA| = |OB| = 1$$

$$S_{\sphericalangle OCD} < S_{\triangle OAB} < S_{\sphericalangle OAB}$$

$$S_{\sphericalangle OCD} = \frac{\pi |OC|^2}{2\pi}\cdot x = \frac{x}{2}\cdot\cos^2 x$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|BC| = \frac{1}{2}\sin x$$

$$S_{\sphericalangle OAB} = \frac{\pi |OA|^2}{2\pi}\cdot x = \frac{x}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{x}{2}\cos^2 x < \frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2}$$

т.к. $0 < x$ $\Rightarrow$

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

т.к. ф-ии чётные, это верно при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \sin x = 0}$$

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1 \Rightarrow |\sin x| < |x|$$

$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$\forall \varepsilon > 0$

$$|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - 0| = |x| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

| первый замечательный предел.

Перейдём к пределу при $x \to 0$ в нер-ве $1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$$\lim(1 - \sin^2 x) = 1 - \lim \sin x \cdot \lim \sin x = 1 \Rightarrow 1 \le \lim \frac{\sin x}{x} \le 1$$

Второй замечательный предел.

Теорема. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Теорема. Послед. $\{x_n\}$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Док-во.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\} =$$

$$= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$x_n < x_{n+1}$$

ничена :

, т.е.

$$x_n < 2+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

следовательно $2 < x_n < 3\,,\quad n\to\infty$

Следствие 1. Если $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to a} \left\{1 + \frac{1}{\beta(x)}\right\}^{\beta(x)} = e.$$

Док. Положим $\beta(x) = y \to \infty$, $x \to a$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to a} \left\{1 + \frac{1}{\beta(x)}\right\}^{\beta(x)} = \lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e.$$

Следствие 2. Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to a} \left\{1 + \alpha(x)\right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$$

Док. Положим $\beta(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$, $x \to a$

$$\lim_{x\to a} \left\{1 + \alpha(x)\right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim_{x\to a} \left\{1 + \frac{1}{\beta(x)}\right\}^{\beta(x)} = e.$$

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

Повтор лекции 2

список функций, эквивалентных x при $x \to 0$:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim$$

$$\sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0).$$

Замечани. Заменять б.м. на эквивалентные им в суммах и разностях, вообще говоря, нельзя.

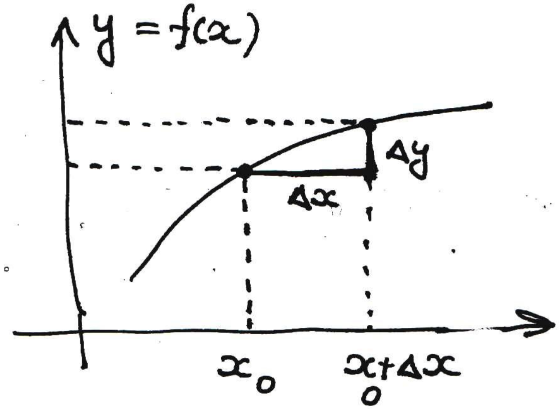
Пример. $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$

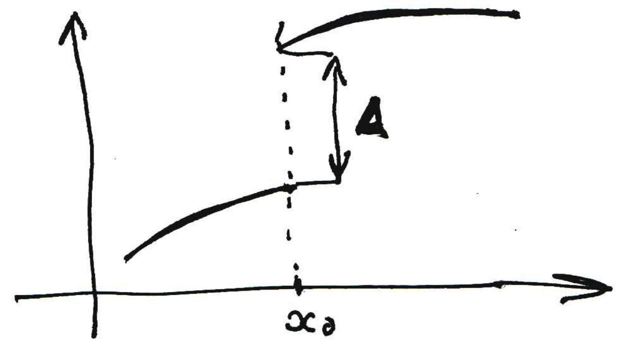
$\ln(1+x) \sim x$
$\ln(1-x) \sim -x$ $\quad x \to 0$

Если заменить, то $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-x}{x^2} = 0$, н

$A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{\cancel{x}^2} = -1.$

Непрерывность функции





$$\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$ | приращ. ф. в точке x_0

Определение. Функция $f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Подробно: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \{ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$x_0 + \Delta x = x \longrightarrow x_0$ при $\Delta x \to 0$

Непрерывные функции

Непрерывность функции **f(x)** в окрестности т. ***a*** сформулируем на языке приращений **Δf(x)** от приращения аргумента **Δ x** :

$$\Delta x = x - a. \qquad (9.3)$$

Тогда новое значение $f(a+\Delta x)$ функции $y = f(x)$ будет отличаться от прежнего значения $f(a)$ на величину

$$\Delta y = \Delta f(a) = f(x) - f(a) = f(a+\Delta x) - f(a), \qquad (9.4)$$

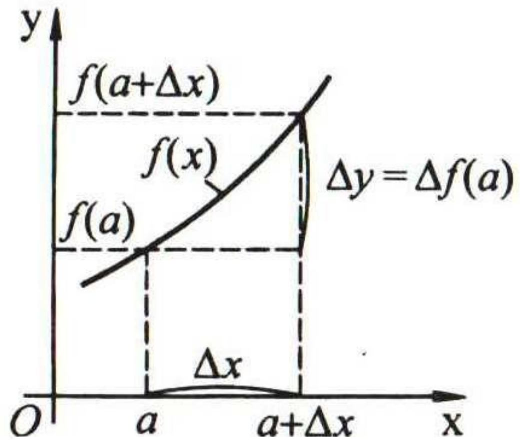


Рис.3

называемую ***приращением функции в точке*** $a \in \mathbb{R}$. Геометрический смысл приращений ясен из рис. 9.3, на котором и Δx, и Δy положительны. Поскольку $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$, то с учетом (9.3) и (9.4) это равносильно $\Delta f(a) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $\Delta f(a)$ является функцией, *бесконечно малой* (б.м.) при $\Delta x \to 0$.

Определение 9.3. Функцию $f(x)$ называют ***непрерывной в точке*** $a \in \mathbb{R}$, если приращение функции в этой точке является функцией, б.м. при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0. \qquad (9.5)$$

Следствие. Если $y=f(x)$ непр. в т. x_0, а $g(y)$ непр. в т. $y_0=f(x_0)$, то

10 $$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

Док. В силу непр-ти $f(x)$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, в силу непр-ти сл. функции $g(f(x))$ $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$. ■

Следовательно, для непрерывных функций операция предельного перехода перестановочна с операциями по вычислению значения функции в соответствующей точке. Теорема 10 позволяет при вычислении предела сложной непрерывной функции удобно чередовать эти операции.

Непрерывные функции в точке

Определение. Функция $f(x)$, определённая на $[x_0, x_0+\varepsilon)$ $\varepsilon>0$ наз. непрерывной справа в т. x_0, если

$$\exists \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \quad \text{и} \quad f(x_0+0) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$, определённая на $(x_0-\varepsilon, x_0]$, $\varepsilon>0$ наз. непрерывной слева в т. x_0, если

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} = f(x_0-0) \quad \text{и} \quad f(x_0-0) = f(x_0).$$

Повтор лекции 3

Примеры непрерывных функций:

1 $y = C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in R$

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y(x_0) = C \;\Big|\; \Delta y = 0 \Rightarrow \Delta y \to 0,\ \Delta x \to 0$$

5 $y = \sin x$ непр. $\forall x_0 \in R$ $\;\Big|\;$ $y = \cos x$ – для упражнения

$$|\Delta y| = |\sin(x+\Delta x) - \sin x| = \left|2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le$$

$$\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x| \Longrightarrow \Delta y \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0$$

2 $y = x$ непр. $\forall x \in R$

$$\Delta y = \Delta x \Rightarrow \Delta y \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0$$

3 $y = x^n$ непрерывна как произведение непр. функций.

4 Многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

непрерывен как сумма произведений непр. ф-ций.

Определение 21. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке выполняется соотношение

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это определение предъявляет к функции следующие требования:

а) функция $f(x)$ должна быть определена в точке x_0;

б) функция $f(x)$ должна иметь предел в точке x_0;

в) этот предел должен совпадать со значением функции $f(x)$ в этой точке.

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то говорят, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0, а сама точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Односторонние пределы.

Если односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют и конечны, то точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. В частности, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, т. е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет предел, то говорят, что x_0 есть точка устранимого разрыва. Разрыв в этом случае можно устранить, доопределяя или переопределяя значение функции $f(x)$ в точке x_0: $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Эта процедура называется продолжением функции по непрерывности.

Всякая точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва 1-го рода, называется точкой разрыва 2-го рода. Другими словами, в точке разрыва 2-го рода по крайней мере один из односторонних пределов функции не существует или бесконечен. Наиболее типичный случай разрыва 2-го рода — это именно бесконечный разрыв.

Продолжение.

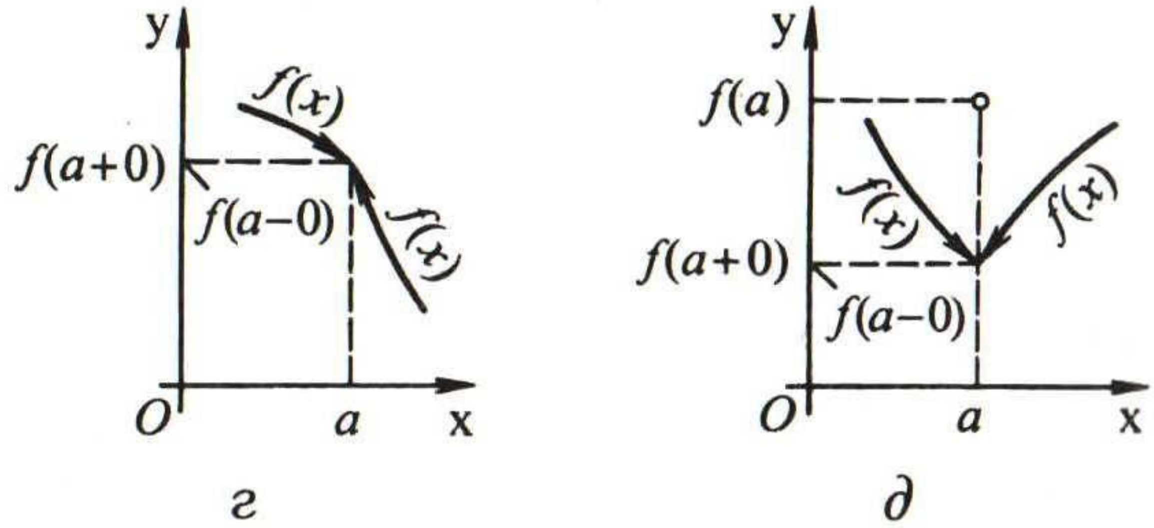


Рис. 9.4

Если скачок равен нулю (см. рис. 9.4, *г* и *д*), т.е. в точке a выполнено еще и условие 3 непрерывности функции, а поэтому существует конечный предел функции в этой точке, то имеем ***точку устранимого разрыва***. Если в этом случае для функции $g(x)$, совпадающей в некоторой проколотой окрестности точки a с $f(x)$, положить $g(a) = f(a+0) = f(a-0)$, то $g(x)$ будет непрерывна в точке a, поскольку все условия 1–4 непрерывности функции в точке a будут выполнены. Про возможность введения такой непрерывной функции $g(x)$ говорят, что разрыв непрерывности $f(x)$ в точке a можно устранить.

Свойства непрерывных функций

Теорема (первая теорема Больцано — Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдется точка c, в которой функция обращается в нуль, т.е.

$$(f(x) \in C[a, b]) \wedge (f(a)f(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in (a, b): \quad f(c) = 0.$$

Теорема имеет простой геометрический смысл: если непрерывная линия *графика функции* лежит и ниже, и выше оси Ox, то эта линия пересекает ось Ox (рис. 9.6).

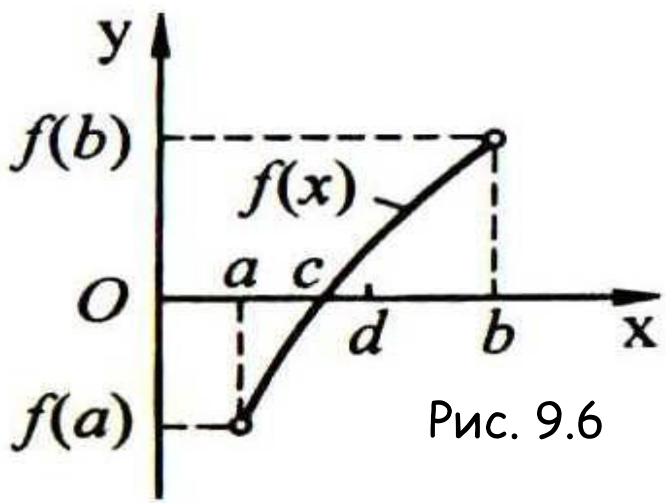


Рис. 9.6

15

Теорема (*первая теорема Вейерштрасса*). Непрерывная на отрезке функция является *ограниченной* на этом отрезке, т.е. существуют числа m и M, такие, что $m \leqslant f(x) \leqslant M$ $\forall x \in [a, b]$.

Существенным условием в этой теореме является непрерывность функции именно на отрезке. Непрерывность лишь на интервале не обеспечивает ограниченности функции. Так, при $x \in (0, \pi/2)$ функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна (см. пример 9.3), но не ограничена

Асимптоты

Определение. Прямая $x = a$ наз. вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Пример. Прямая $x = 0$ – вертик. асимптота графиков $y = \frac{1}{x}$, $y = \ln x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Определение. Прямая $y = kx + b$ наз. (двусторонней) <u>наклонной асимптотой</u> графика функции $y = f(x)$, если

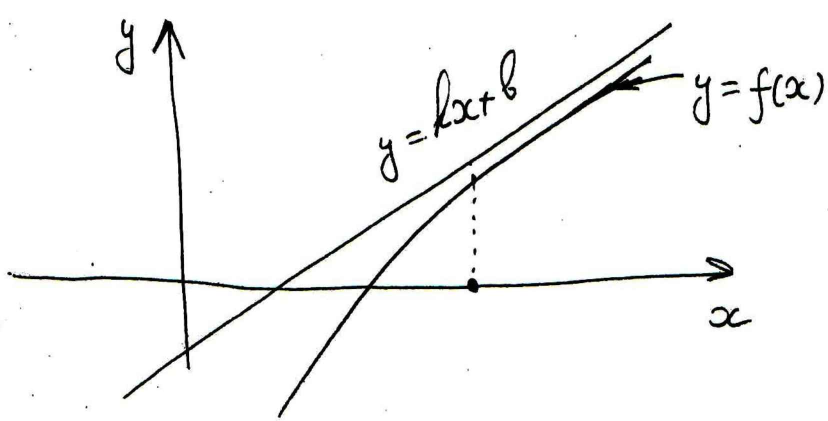
$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty$$

иначе, $\lim\limits_{x\to\infty} \{ f(x) - (kx + b) \} = 0$

Если этот предел существует только при:
$x \to -\infty$, то асимптота наз. левосторонней,
$x \to +\infty$, — правосторонней.

<u>односторонние асимптоты</u>.

При $k = 0$ асимптота наз. <u>горизонтальной</u>.



Теорема. Прямая $y = kx + b$ является двусторонней асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x) - kx\} = b$$

Док-во. Пусть $y = kx + b$ – асимптота, тогда

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0, \ x \to \infty \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \longrightarrow k, \quad x \to \infty$$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \longrightarrow b, \quad x \to \infty$$

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} \{f(x) - kx\} = b \quad \Rightarrow$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0, \ x \to \infty$$

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad y = kx + b \text{ – асимптота.}$$

Замечание. Для существования асимптоты достаточно лишь $\lim\limits_{x\to\infty} \{f(x) - kx\} = b$.

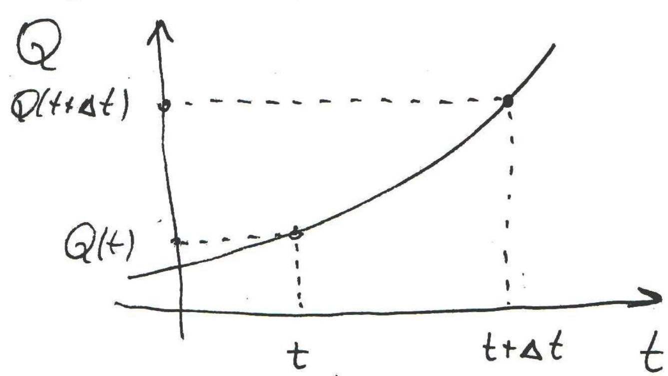
Производная функции

В основе дифференциального исчисления лежат фундаментальные понятия *производной* и *дифференциала функции в точке*. Термин „производная“ был введен Ж. Лагранжем в 1797 г., тогда как термин „дифференциал“ Г. Лейбниц использовал уже начиная с 1675 г. Но прежде чем говорить о производной и дифференциале, целесообразно предварительно рассмотреть отношение приращения функции к приращению ее аргумента.

Понятие производной

Пусть величина $Q = Q(t)$ изменяется во времени

За время от t до $t+\Delta t$ величина Q получит приращение $\Delta Q = Q(t+\Delta t) - Q(t)$



Как быстро меняется $Q(t)$

Какова скорость изменения

Средняя скорость изменения величины Q за время от t до $t+\Delta t$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

Скорость изменения величины Q в момент времени t

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \dot{Q}(t)$$

Таким образом, приходим к важнейшему понятию :

Определение. Пусть ф. $f(x)$ определена в окр. т. x $U(x)$

Если существует предел

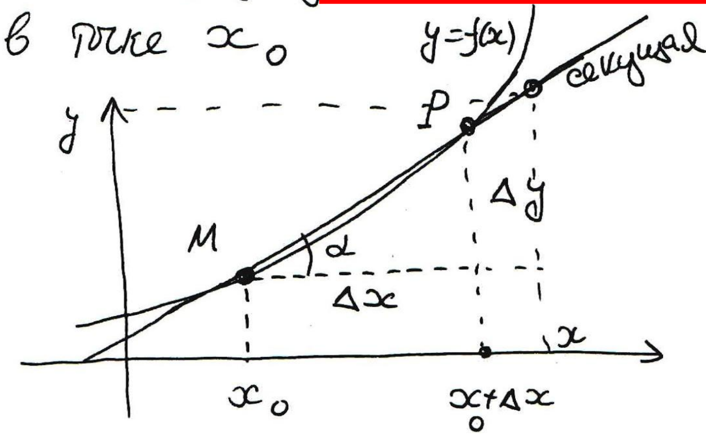
$$f'(x) \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

то он наз. производной функции f в точке x.

Наряду с обозначением производной $f'(x)$ использ. также: $\frac{df}{dx}(x)$, $\dot{f}(t)$

Процедура вычисления производной наз. дифференцированием

Рассм. задачу о касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0



Касательной наз. предельное положение секущей при $P \to M$

Ур-е секущей – ур-е прямой, проходящей через точку $M(x_0, f(x_0))$ с угловым коэфф. $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$k = f'(a)$$

Пусть (x, y) текущая точка секущей, где

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg}\alpha = k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0)$$ | ур-е секущей

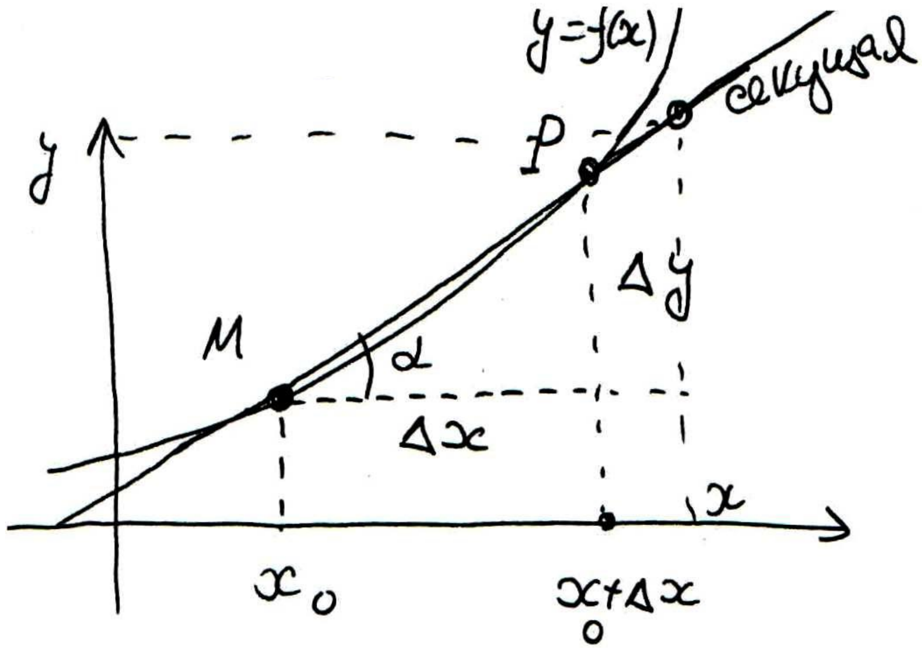
При $\Delta x \to 0$ $P \to M$ и ур-е секущей переходит в

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$ | ур-е касательной

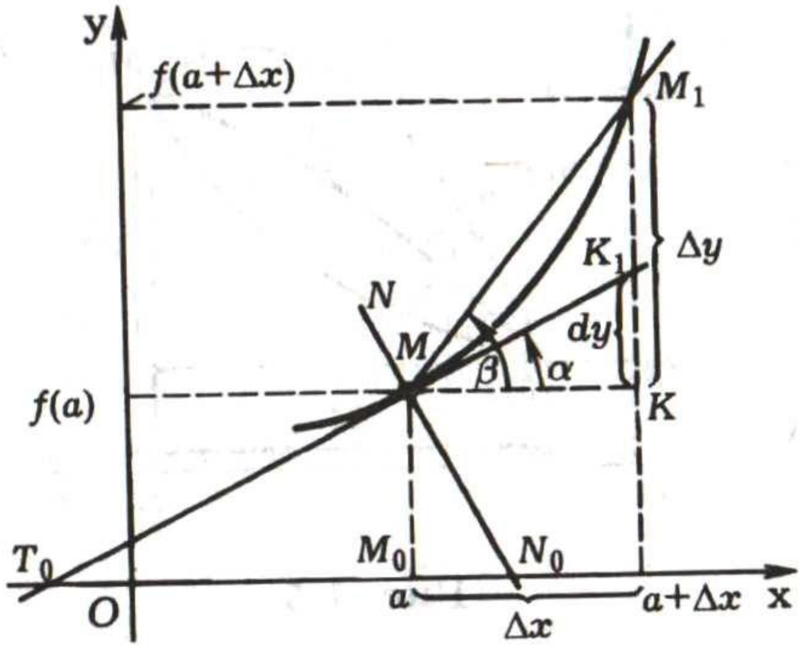
Геометрический смысл производной

С геометрической точки зрения значение производной $f'(a)$ в данной точке $x = a$ равно *угловому коэффициенту касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(a, f(a))$. Зная геометрический смысл производной, нетрудно написать уравнение касательной к плоской кривой $y = f(x)$ в точке $M(a, f(a))$, если касательная не параллельна оси Oy.

$$k = f'(a)$$



Уравнение нормали в точке



Прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная к касательной, наз. нормалью к графику функции y = f(x) в т. M (прямая NM). Если $f'(a) \neq 0$, то уравнение нормали имеет вид

$$y - f(a) = -(x-a)/f'(a)$$

В случае $f'(a) = 0$, нормаль вертикальна, т.е. ее уравнение будет x = a

Теорема. Если функции u, v имеют конечные производные в т. x, то

а) $\left(u(x)+v(x)\right)' = u'(x) + v'(x)$,

б) $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

в) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$, $\quad v(x) \neq 0$.

Док-во

а) $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v \quad \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

б) $\Delta(uv) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$

$= \left[u(x)+\Delta u\right]\left[v(x)+\Delta v\right] - u(x)v(x) = u(x)\Delta v + \Delta u\cdot v(x) + \Delta u\cdot\Delta v$

$\lim \Delta u \cdot \lim \frac{\Delta v}{\Delta x}$ / u-непр.

$(uv)'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta(uv)}{\Delta x} = v(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \ldots = u'(x)v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

в) $\Delta\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \dfrac{u}{v} = \dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)} = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Дифференцируемость функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интерва ле E, содержащем точку $x = a$. Возьмем такое приращени Δx аргумента x, чтобы точка $a + \Delta x$ не вышла из этог интервала, т.е. $a + \Delta x \in E$.

Определение 1.3. ***Функцию*** $y = f(x)$ называют ***диффе-ренцируемой в точке*** a, если отвечающее приращению Δx приращение Δy этой функции в окрестности точки a может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x, \qquad (1.15$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx, а $\beta(\Delta x)$ – функция, бесконечно малая (б.м.) при $\Delta x \to 0$.

Ясно, что в (1.15) $\beta(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ как произведение бесконечно малых функций есть б.м. функция более высокого порядка по сравнению с Δx. Поэтому (1.15) можно переписать в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \qquad (1.16)$$

27

Теорему называют необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции одного переменного. Она позволяет дать еще одно определение дифференцируемости такой функции: функцию $y = f(x)$ называют дифференцируемой в точке a, если в этой точке существует конечная производная $f'(a)$. Необходимое условие дифференцируемости функции в точке устанавливает следующая теорема.

Теорема 1.2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то она непрерывна в этой точке.

◀ Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке a, ее приращение представимо в виде (1.16) $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$. Отсюда сразу следует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

что равносильно (1.1) и означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке a. ▶

Производные элементарных функций.

1) $f(x) = C = \text{const}$

$\Delta f = C - C = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad C' = 0$

Следствие. Если $u = u(x)$, то $(Cu)' = Cu'$

2) $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$ (*)

$$\Delta f = (x + \Delta x)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} (\Delta x)^k - x^n =$$

$$= \cancel{C_n^0 x^n} + C_n^1 x^{n-1} \Delta x + \ldots \cancel{- x^n} = n x^{n-1} \Delta x + o(\Delta x), \ \Delta x \to 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = n x^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = n x^{n-1}$$

3) $f(x) = \sin x$

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}}{2 \left(\frac{\Delta x}{2} \right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = \cos x$$

непрерывность $\cos x$

4) $f(x) = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

Док. аналогично 3)

---

*) $\Delta f = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1 \right] \sim x^n n \frac{\Delta x}{x}$, $\Delta X \to 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = n x^{n-1}$$

$n = \alpha$

Продолжение

5) $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

6) $f(x) = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

7) $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ – потом проверить отдельно

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \, \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

В частности, при $a = e$ $\quad (e^x)' = e^x$

Производная сложной функции.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет произв. в т. x_0, а функция $z=g(y)$ имеет производную в т. $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $z(x)=g(f(x))$ имеет в т. x_0 производную $z'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Док-во

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

$$\frac{g(f(x_0+\Delta x))-g(f(x_0))}{\Delta x}=\frac{g(f(x_0)+\Delta f)-g(f(x_0))}{\Delta f}\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$\Delta f\to 0$ при $\Delta x\to 0$

Логарифмическая производная

Если требуется найти производную функции (показательно степенной)

$$y(x) = [u(x)]^{v(x)}, \quad u(x) > 0,$$

то полезно рассмотреть её логарифмическую производную:

$$[\ln y(x)]' = \frac{y'(x)}{y(x)} \qquad \Big| \quad \frac{y'}{y} \overset{def}{=} \text{логарифмич. производная}$$

$$\ln y = v \ln u \Rightarrow \frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{v u'}{u} \Rightarrow$$

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v u'}{u}\right) = u^{v}\left(v' \ln u + \frac{v u'}{u}\right)$$

Примеры.

1. $y = x^{\alpha}$, $x > 0$, α - действительное

$$\ln y = \alpha \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow y' = y \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{при произвольном } \alpha \text{ и } x > 0$$

Теорема 2.3. Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет *конечную* и отличную от нуля *производную* $f'(a)$ и пусть, кроме того, для нее существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, непрерывная в соответствующей точке $y = b$, где $b = f(a)$. Тогда существует производная $g'(b)$ и она равна

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{2.18}$$

Производные обратных элементарных функций

1) $y = f(x) = \sin x$, $\quad x = f^{-1}(y) = \arcsin y$

При $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ выполнены условия теоремы =>

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\cos x > 0$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

обычно пишут $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ =>

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y=f(x)=\operatorname{tg}x$, $x=f^{-1}(y)=\operatorname{arctg}y$

При $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ выполнены условия теоремы $\Rightarrow$

$$(\operatorname{arctg}y)'=\frac{1}{(\operatorname{tg}x)'}=\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+y^2}$$

Обычно пишут $(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

4) $(\operatorname{arcctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

5) $y=f(x)=a^x$, $x=f^{-1}(y)=\log_a y$

$a\neq 1$ иначе нет обр. ф-ции

$$[\log_a y]'=\frac{1}{(a^x)'}=\frac{1}{a^x\ln a}=\frac{1}{y\ln a}$$

обычно пишут: $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, в частн., $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

Таблица производных основных функций

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

II. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

III. $(\sin x)' = \cos x$.

IV. $(\cos x)' = -\sin x$.

V. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

VI. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

VII. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

VIII. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

IX. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

X. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

XI. $(a^x)' = a^x \ln a$.

XII. $(e^x)' = e^x$.

XIII. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

XIV. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$
$(x > 0,\ a > 0)$.

XV. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

XVI. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XVII. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XVIII. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{Arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

XX. $(\operatorname{Arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(|x| > 1)$.

XXI. $(\operatorname{Arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$.

XXII. $(\operatorname{Arcth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1}$ $(|x| > 1)$.

Спасибо за внимание

37

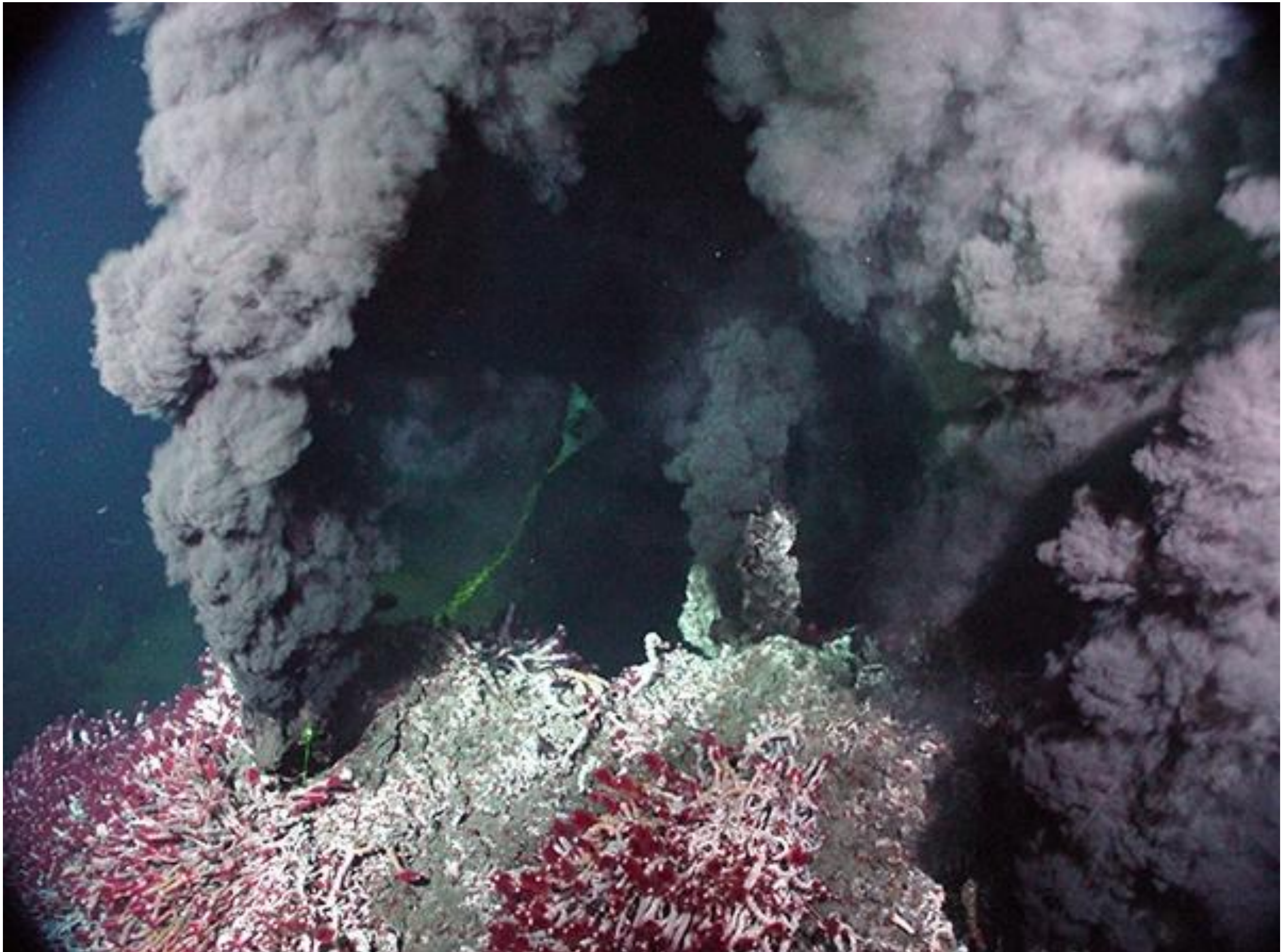
А.С. Монин, Н.Н. Корчагин

Десять открытий

в физике океана

Прикладная математика и открытия в Мировом океане


АКАДЕМИК
СЕРГЕЙ ВАВИЛОВ



Ранее (1959) специалисты по геоморфологии и тектонике дна Океана установили: САХ является частью срединно-океанских хребтов, образующих по всему дну Мирового океана причудливую структуру в виде <u>непрерывной цепочки подводных гор,</u> высотой 1500–4000 м и <u>длиной 60 тыс. км</u> с пересекающимися многочисленными поперечными разломами по всей ее длине.


высота цунами,
определённая по
следам на деревьях