Степенная функция

Вы знакомы с функциями $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ и т. д.

$\boxed{y = x^p,}$ - **степенная функция**

где p — заданное действительное число.

Познакомимся с некоторыми свойствами функций, которыми обладают, в частности, отдельные степенные функции.

1. Показатель $p = 2n$ — чётное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — все действительные числа, т. е. множество R;
— множество значений — неотрицательные числа, т. е. $y \geqslant 0$;
— функция $y = x^{2n}$ чётная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;
— функция является убывающей на промежутке $x \leqslant 0$ и возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;
— функция ограничена снизу;
— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

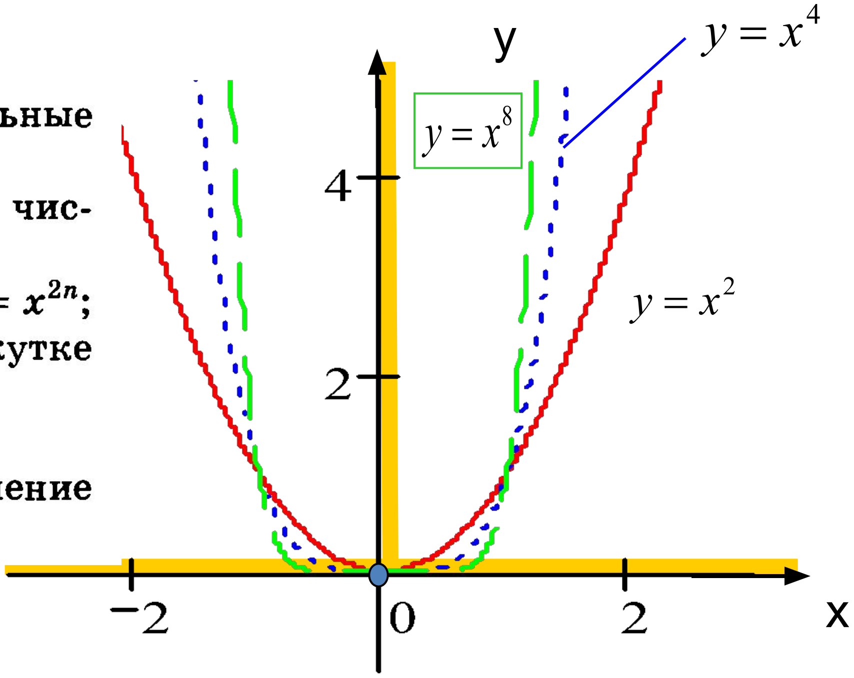
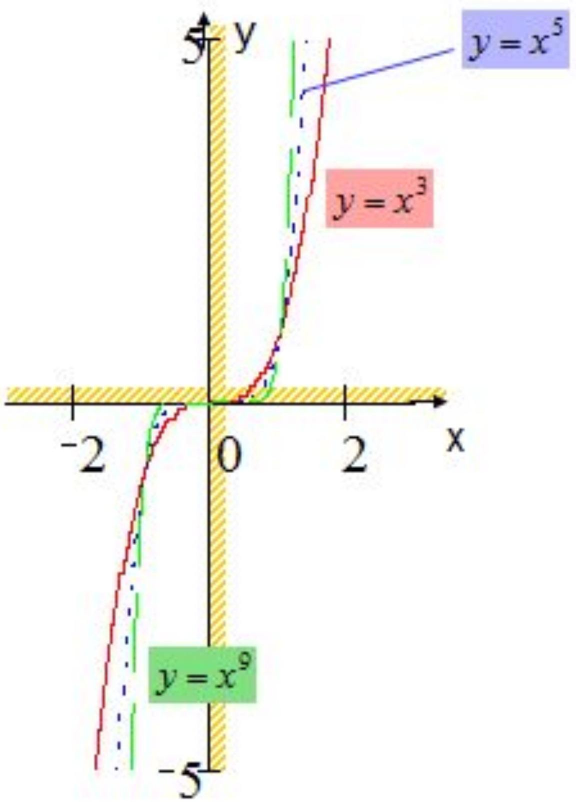


График функции $y = x^{2n}$

2. Показатель $p = 2n - 1$ — нечётное натуральное число.

График функции $y = x^{2n-1}$



В этом случае степенная функция $y = x^{2n-1}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — множество $\boldsymbol{R}$;
— функция $y = x^{2n-1}$ нечётная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$;
— функция является возрастающей на всей действительной оси;
— функция не является ограниченной;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

3. Показатель $p = -2n$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$

обладает следующими свойствами:

— область определения — множество R, кроме $x = 0$;

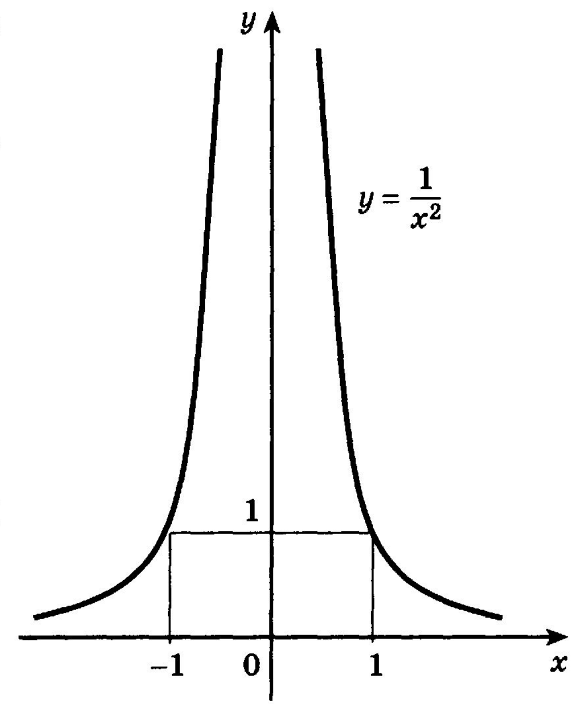
— множество значений — положительные числа $y > 0$;

— функция $y = \frac{1}{x^{2n}}$ чётная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}}$;

— функция является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$;

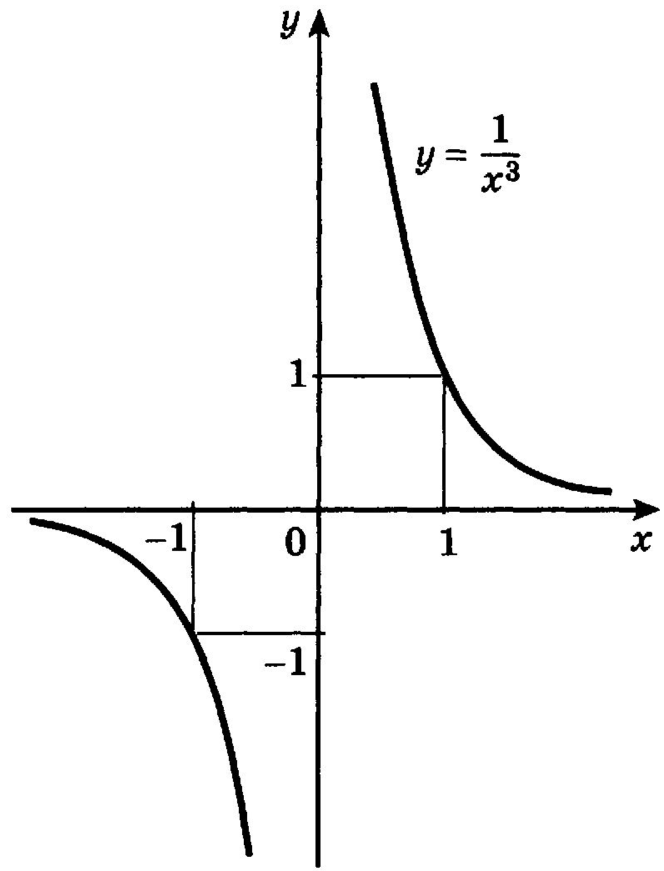
— функция ограничена снизу;

— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.



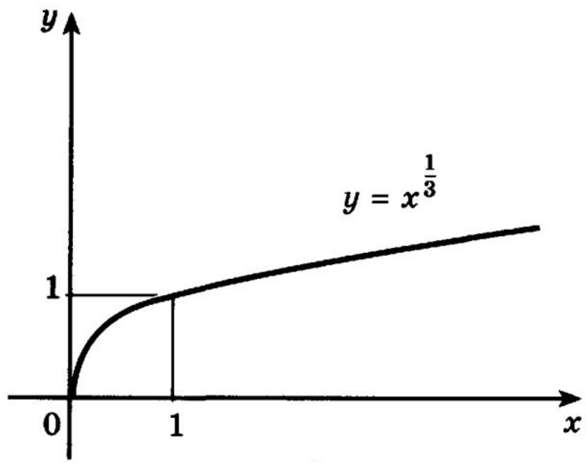
4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, где $n \in N$, обладает следующими свойствами:

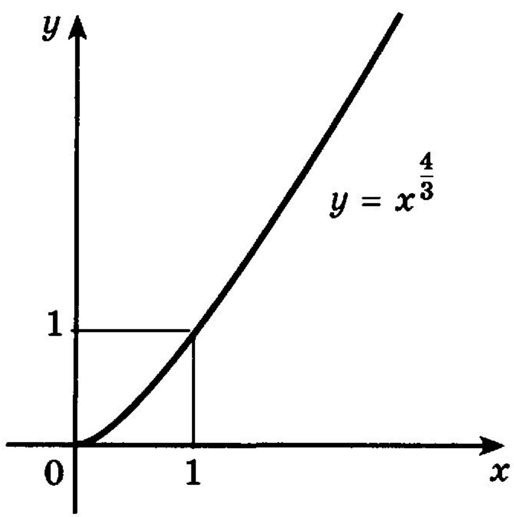


— область определения — множество R, кроме $x = 0$;
— множество значений — множество R, кроме $y = 0$;
— функция $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ нечётная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-1}}$;
— функция является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

5*. Показатель p — положительное действительное нецелое число.



а)



б)

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество неотрицательных чисел $x \geqslant 0$;
— множество значений — множество неотрицательных чисел $y \geqslant 0$;
— функция является возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;
— функция не является ни чётной, ни нечётной;
— функция ограничена снизу;
— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

6*. Показатель p — отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество положительных чисел $x > 0$;
— множество значений — множество положительных чисел $y > 0$;
— функция является убывающей на промежутке $x > 0$;
— функция не является ни чётной, ни нечётной;
— функция ограничена снизу.

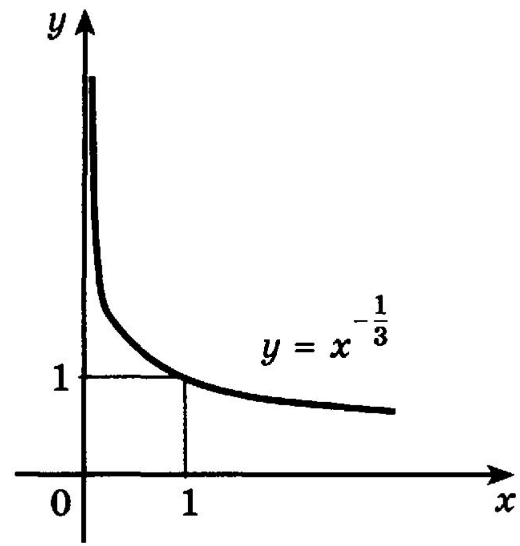


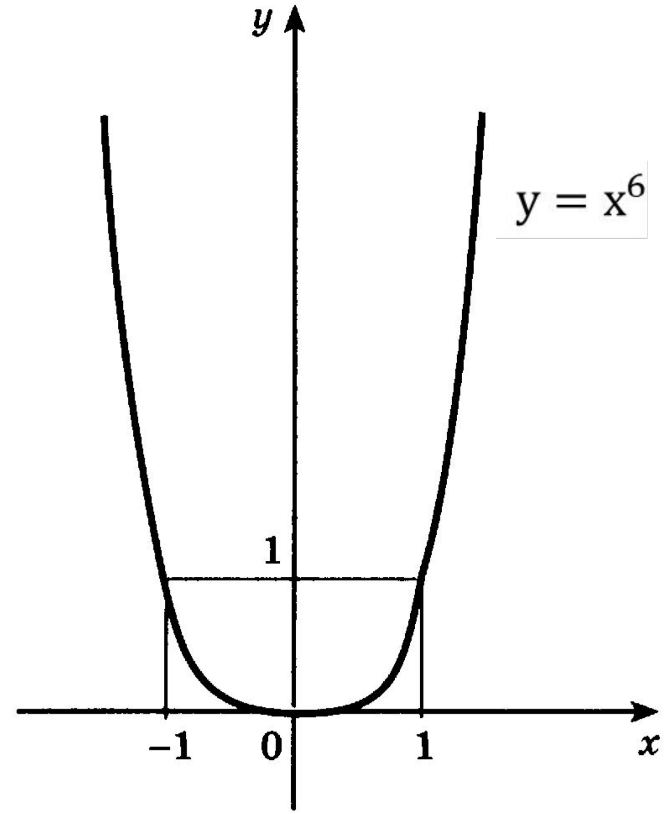
Рис. 12

Задача 1 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^6$ на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

▶ Функция $y = x^6$ на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ убывает при $x \in [-2; 0]$, возрастает при $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, следовательно, она принимает наименьшее значение, равное нулю, при $x = 0$. Наибольшее значение этой функции — наибольшее из чисел $y(-2)$ и $y\left(\frac{1}{2}\right)$. Так как

$y(-2) = (-2)^6 = 64$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$,

то $y(-2) > y\left(\frac{1}{2}\right)$ и наибольшее значение равно 64. ◁



$$y = x^6$$

Задача 2 Построить график функции $y = -(x-1)^5 + 2$.

▶ Областью определения функции является множество действительных чисел.

$y = x^6$

x	-2	-1	0	1	2
y	-32	-1	0	1	32

2) Симметрия относительно оси у
3) Сдвиг на 1 ед. вправо
4) Сдвиг на 2 ед. вверх

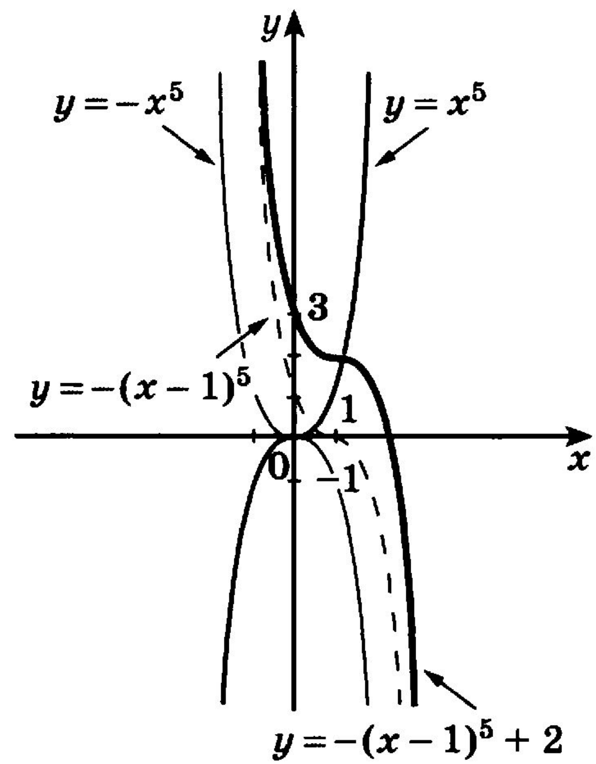


Рис. 13

124 Сравнить значения выражений:

1) $3{,}1^7$ и $4{,}3^7$;

2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^3$;

3) $0{,}3^8$ и $0{,}2^8$;

4) $2{,}5^2$ и $2{,}6^2$;

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$;

6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{-6}$;

7) $(4\sqrt{3})^{-3}$ и $(3\sqrt{4})^{-3}$;

8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5}$ и $(6\sqrt[3]{2})^{-5}$.