

# Теоретическая механика

**Часть 2**  
**Динамика**

# Глава 1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

## § 1. Предмет классической динамики

Динамика изучает движение механических систем (систем материальных точек) в связи с причинами, вызывающими или изменяющими это движение.

*Материальной точкой* называется материальное тело, вращательными движениями которого, по сравнению с поступательными, можно пренебречь.

Таким образом, не обязательно понимать под материальной точкой тело очень малых размеров. *Твердое тело, движущееся поступательно, рассматривается как материальная точка.*

*Изолированной* называется материальная точка, на которую не действуют никакие силы (или сумма всех действующих на нее сил равна нулю).

«Способность» материальной точки «сопротивляться» изменению ее скорости называется *инертностью*.

Количественная мера инертности материальной точки, пропорциональная количеству вещества, заключенного в этой точке, называется ее *массой*. Масса материальной точки считается постоянной величиной, не зависящей от обстоятельств движения.

**Задачами** динамики точки являются:

1) зная закон движения материальной точки, определить, под действием какой силы такое движение может происходить;

2) зная действующие на материальную точку силы, а также ее начальное положение и начальную скорость, определить закон движения точки.

Вторая задача является в динамике основной.

## § 2. Законы Ньютона

Основание динамики составляют законы, или аксиомы, Ньютона. Эти аксиомы представляют собой постулаты, справедливость которых подтверждается многовековыми наблюдениями и опытом человечества.

### **Первый закон Ньютона (аксиома инерции).**

*Существуют системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых изолированные материальные точки находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Если точка движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета, то на нее действует некоторая *сила*.

*Сила есть причина возникновения ускорения точки; она является количественной мерой механического действия на точку, в результате которого возникает ускорение этой точки.*

За единицу силы в Международной системе единиц принимается такая сила, которая, будучи приложена к материальной точке массой 1 кг, вызывает ее ускорение в инерциальной системе координат, равное  $1 \text{ м/с}^2$ . Эта единица называется ньютоном (Н).



## **Второй закон Ньютона (основная аксиома динамики).**

*В инерциальной системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе.*

При подходящем выборе единиц измерения, этот закон можно записать в виде формулы:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где  $\vec{a}$  — ускорение материальной точки;

$\vec{F}$  — равнодействующая (сумма) всех сил, приложенных к материальной точке;

$m$  — масса материальной точки.

**Третий закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек).**

*Если одна материальная точка действует на другую, то и вторая точка действует на первую, причем силы, приложенные к каждой из них, равны по модулю и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

### § 3. Инерциальные системы отсчета

*Инерциальная система отсчёта (ИСО) — система отсчёта, в которой все изолированные материальные точки движутся прямолинейно и равномерно либо покоятся.*

В теоретической механике считается, что инерциальные системы отсчета эквивалентны во всех механических отношениях. Иными словами, *все уравнения и законы механики не зависят от конкретного выбора инерциальной системы отсчета.* В этом состоит важнейший принцип механики — **принцип относительности Галилея.**

Существование систем, обладающих таким свойством, постулируется первым законом Ньютона.

В действительности инерциальных систем не существует, но с большой степенью точности за инерциальную систему отсчета можно принять *систему координат с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на «неподвижные» звезды.*

Для многих технических задач за инерциальную систему отсчета принимают *систему координат, жестко связанную с Землей, или же систему, имеющую начало в центре Земли и оси, направленные на «неподвижные» звезды.*

**Теорема.** Любая система отсчета, которая движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета поступательно, равномерно и прямолинейно, также является инерциальной.

*Доказать самостоятельно !*

## § 4. Потенциальное силовое поле. Закон сохранения энергии

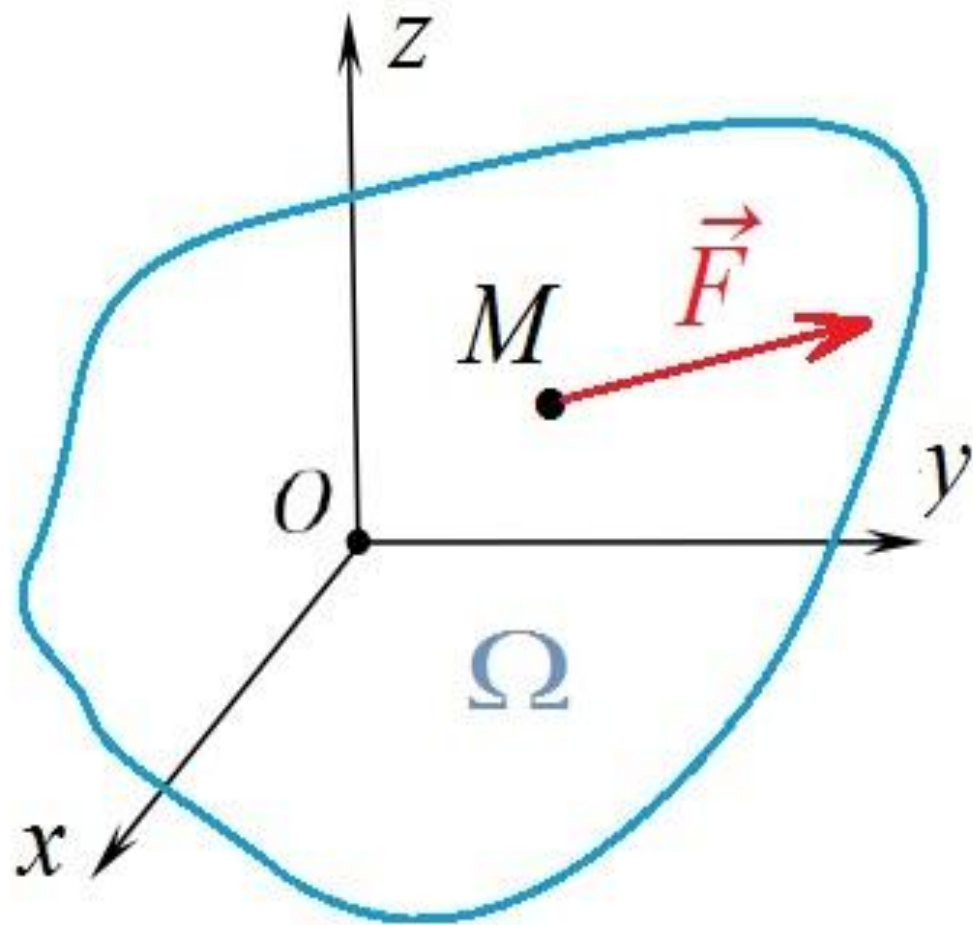
### 1. Силовое поле. Потенциальная энергия.

Пусть  $S$  – инерциальная ДСО в абсолютном пространстве  $E^3$ ,  $\Omega$  – область в  $E^3$ , неподвижная относительно  $S$ . Материальная точка  $M$  движется в области  $\Omega$  под действием силы  $\vec{F}$ , причем  $\vec{F}$  зависит от координат точки  $M$  и, возможно, от времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t),$$

где  $(x, y, z)$  – координаты точки  $M$  в ДСО  $S$ ,  $t$  – время.

Тогда говорят, что на области  $\Omega$  задано *силовое поле*  $\vec{F}(x, y, z, t)$ .





Пусть  $\widehat{\Omega}$  – область в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , соответствующая

$$\Omega \subset E^3: \quad M(x, y, z) \in \Omega \Leftrightarrow r_{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \widehat{\Omega}$$

( $r_{OM}$  – координатный вектор точки  $M$  в ДСО  $S$ ).

Пусть  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  – *стационарное* (не зависящее от времени) силовое поле. Рассмотрим  $F = (F_x, F_y, F_z)^T$  – координатное представление вектора  $\vec{F}$  в ДСО  $S$ . Таким образом, на области  $\widehat{\Omega}$  определена вектор-функция  $F(x, y, z)$ ,  $F: \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Если существует функция  $U(x, y, z)$ , заданная на области  $\widehat{\Omega}$ , такая, что на  $\widehat{\Omega}$

$$\mathit{grad} U = -\vec{F} \quad (\text{то есть } \frac{\partial U}{\partial x} = -F_x, \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y, \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z),$$

то функция  $U(x, y, z)$  называется *потенциальной энергией точки  $M$  в поле силы  $\vec{F}$*  (или *потенциальной энергией силы  $\vec{F}$* ), а само силовое поле  $\vec{F}$  называется *потенциальным*.

Заметим, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого.

**2. Полная механическая энергия. Закон сохранения энергии.** Пусть точка  $M$  движется в потенциальном силовом поле  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ ,

$r = r_{OM}$  – координатный вектор точки  $M(x, y, z)$  в ДСО  $S$ ,

$U = U(x, y, z)$  – потенциальная энергия силы  $\vec{F}$ ,

$m$  – масса точки  $M$ ,

$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \langle \dot{r}, \dot{r} \rangle$  – *кинетическая энергия* точки  $M$ .

Величина  $E = U + T$  называется *полной механической энергией* точки  $M$ .

**Теорема (закон сохранения энергии).** В стационарном силовом поле полная механическая энергия материальной точки постоянна (не зависит от времени).

*Доказательство.* Докажем, что  $\frac{dE}{dt} = 0$ . Для этого рассмотрим производные по времени от кинетической и потенциальной энергий:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \langle \dot{r}, \dot{r} \rangle \right) = \frac{m}{2} (\langle \ddot{r}, \dot{r} \rangle + \langle \dot{r}, \ddot{r} \rangle) = m \langle \ddot{r}, \dot{r} \rangle = \\ &= \langle m\ddot{r}, \dot{r} \rangle = \langle F, \dot{r} \rangle\end{aligned}$$

(с учетом второго закона Ньютона:  $F = m\ddot{r}$ ),

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z} = (-F_x) \dot{x} + (-F_y) \dot{y} + (-F_z) \dot{z} = -\langle F, \dot{r} \rangle.$$

Следовательно,  $\frac{dE}{dt} = \langle F, \dot{r} \rangle - \langle F, \dot{r} \rangle = 0 \Rightarrow E = \text{const.}$

Теорема доказана.

### **3. Примеры потенциальных силовых полей**

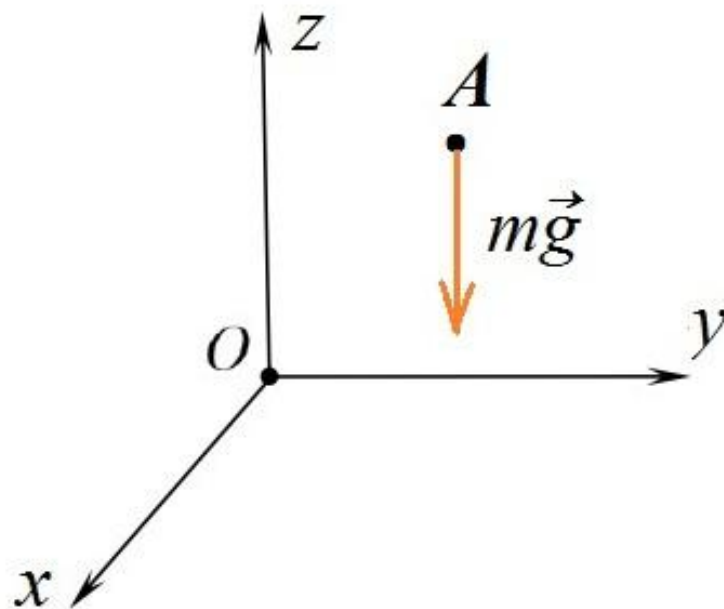
## Пример 1. Поле силы тяжести.

Область  $\Omega$  достаточно мала, чтобы считать силу тяжести  $\vec{F}_T$  постоянной, а поверхность земли – плоской. Координатное

представление вектора силы тяжести: 
$$F_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

(оси  $Ox$  и  $Oy$  параллельны поверхности земли).

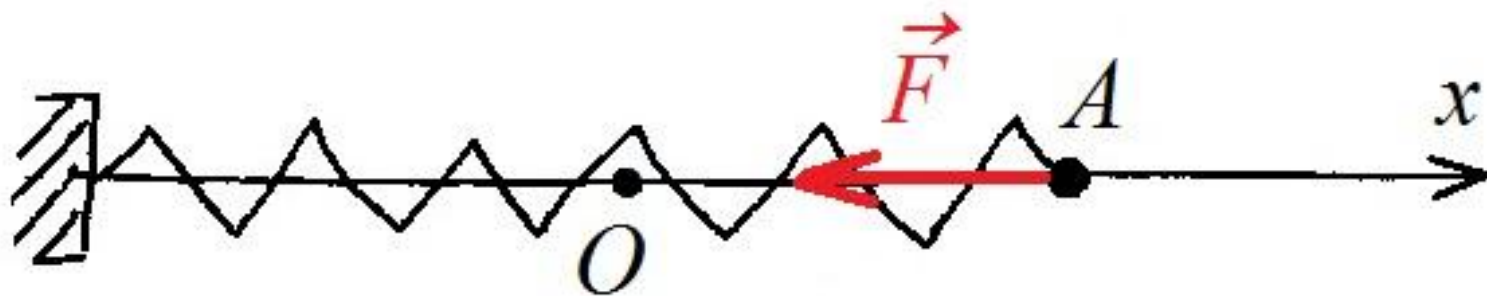
Тогда  $U = mgz$  – потенциальная энергия силы  $\vec{F}_T$  на области  $\Omega$  ( $U$  зависит только от высоты).



## Пример 2. Силовое поле упругой пружины.

При  $x=0$  пружина не деформирована. Материальная точка  $A$  движется по оси  $Ox$  под действием упругой силы  $\vec{F}$ .

При малых отклонениях пружины от положения равновесия можно считать, что  $F_x = -kx$  ( $F_y = F_z = 0$ ). Тогда  $U = \frac{kx^2}{2}$  — потенциальная энергия силы  $\vec{F}$ .





### Пример 3. Гравитационное поле.

Пусть точка  $O$  (начало ДСО  $S$ ) находится в центре притягивающего тела (например, Солнца).

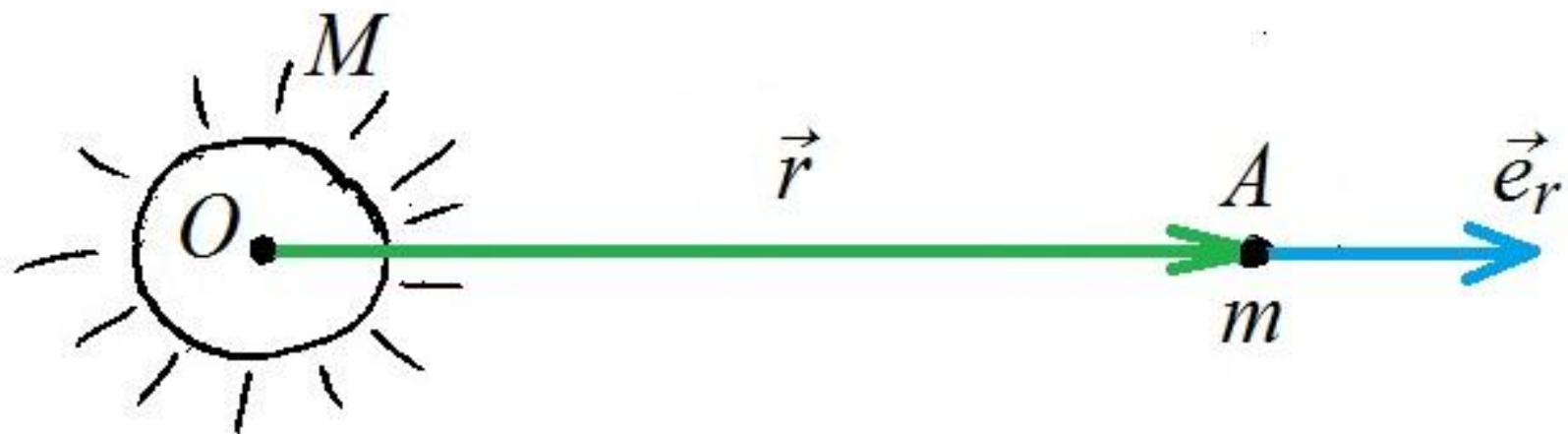
Закон всемирного тяготения: 
$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{\rho^2} \cdot \vec{e}_r,$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,

$M$  – масса притягивающего тела,

$m$  – масса точки  $A$  (небесного тела), к которой приложена

сила  $\vec{F}$ ,  $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\rho = |OA|$ ,  $\vec{e}_r = \frac{1}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{r}$ ,  $\vec{e}_r \uparrow\uparrow \vec{r}$ .



Рассмотрим функцию  $f(\xi) = -G \frac{Mm}{\xi^2} = -\frac{k}{\xi^2}$ , где  $k = GMm$ .

Тогда  $\tilde{V}(\xi) = \frac{k}{\xi}$  – первообразная функции  $f(\xi)$ .

Рассмотрим также функцию

$$U(x, y, z) = -\tilde{V}(|r|) = -\tilde{V}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Частные производные от функции  $U$  имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = kx|r|^{-3}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = ky|r|^{-3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = kz|r|^{-3},$$

Частные производные от функции  $U$  имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} = kx|r|^{-3}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = ky|r|^{-3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = kz|r|^{-3},$$

следовательно,  $\mathit{grad}U = k|r|^{-3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k|r|^{-3}r$ .

Заметим, что в координатах ДСО  $S$

$$F = -G \frac{Mm}{|r|^3} \cdot r = -\frac{k}{|r|^3} \cdot r = -\mathit{grad}U.$$

Следовательно,  $U(x, y, z) = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  – потенциальная энергия

силы  $\vec{F}$  ( $U$  зависит только от расстояния  $\rho = |r|$  (для данной точки  $A$  массы  $m$ )).