Теоретическая механика

Часть 2

Динамика

Глава 1

Основные понятия и законы динамики

§ 1. Предмет классической динамики

Динамика изучает движение механических систем (систем материальных точек) в связи с причинами, вызывающими или изменяющими это движение.

Материальной точкой называется материальное тело, вращательными движениями которого, по сравнению с поступательными, можно пренебречь.

Таким образом, не обязательно понимать под материальной точкой тело очень малых размеров. ***Твердое тело, движущееся поступательно, рассматривается как материальная точка.***

Изолированной называется материальная точка, на которую не действуют никакие силы (или сумма всех действующих на нее сил равна нулю).

«Способность» материальной точки «сопротивляться» изменению ее скорости называется ***инертностью***.

Количественная мера инертности материальной точки, пропорциональная количеству вещества, заключенного в этой точке, называется ее ***массой***. Масса материальной точки считается постоянной величиной, не зависящей от обстоятельств движения.

Задачами динамики точки являются:

1) зная закон движения материальной точки, определить, под действием какой силы такое движение может происходить;

2) зная действующие на материальную точку силы, а также ее начальное положение и начальную скорость, определить закон движения точки.

Вторая задача является в динамике основной.

§ 2. Законы Ньютона

Основание динамики составляют законы, или аксиомы, Ньютона. Эти аксиомы представляют собой постулаты, справедливость которых подтверждается многовековыми наблюдениями и опытом человечества.

Первый закон Ньютона (аксиома инерции).

Существуют системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых изолированные материальные точки находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Если точка движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета, то на нее действует некоторая ***сила*.**

Сила есть причина возникновения ускорения точки; она является ***количественной мерой механического действия на точку****, в результате которого возникает ускорение этой точки.*

За единицу силы в Международной системе единиц принимается такая сила, которая, будучи приложена к материальной точке массой 1 кг, вызывает ее ускорение в инерциальной системе координат, равное $1\,м/с^2$. Эта единица называется ньютоном (Н).

Второй закон Ньютона (основная аксиома динамики).

В инерциальной системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе.

При подходящем выборе единиц измерения, этот закон можно записать в виде формулы:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где $\vec{a}$ — ускорение материальной точки;

$\vec{F}$ — равнодействующая (сумма) всех сил, приложенных к материальной точке;

m — масса материальной точки.

Третий закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек).

Если одна материальная точка действует на другую, то и вторая точка действует на первую, причем силы, приложенные к каждой из них, равны по модулю и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

§ 3. Инерциальные системы отсчета

Инерциальная система отсчёта (ИСО) *— система отсчёта, в которой все изолированные материальные точки движутся прямолинейно и равномерно либо покоятся.*

В теоретической механике считается, что инерциальные системы отсчета эквивалентны во всех механических отношениях. Иными словами, *все уравнения и законы механики не зависят от конкретного выбора инерциальной системы отсчета*. В этом состоит важнейший принцип механики — **принцип относительности Галилея.**

Существование систем, обладающих таким свойством, постулируется первым законом Ньютона.

В действительности инерциальных систем не существует, но с большой степенью точности за инерциальную систему отсчета можно принять *систему координат с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на «неподвижные» звезды.*

Для многих технических задач за инерциальную систему отсчета принимают *систему координат, жестко связанную с Землей,* или же *систему, имеющую начало в центре Земли и оси, направленные на «неподвижные» звезды.*

Теорема. Любая система отсчета, которая движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета поступательно, равномерно и прямолинейно, также является инерциальной.

Доказать самостоятельно !

§ 4. Потенциальное силовое поле. Закон сохранения энергии

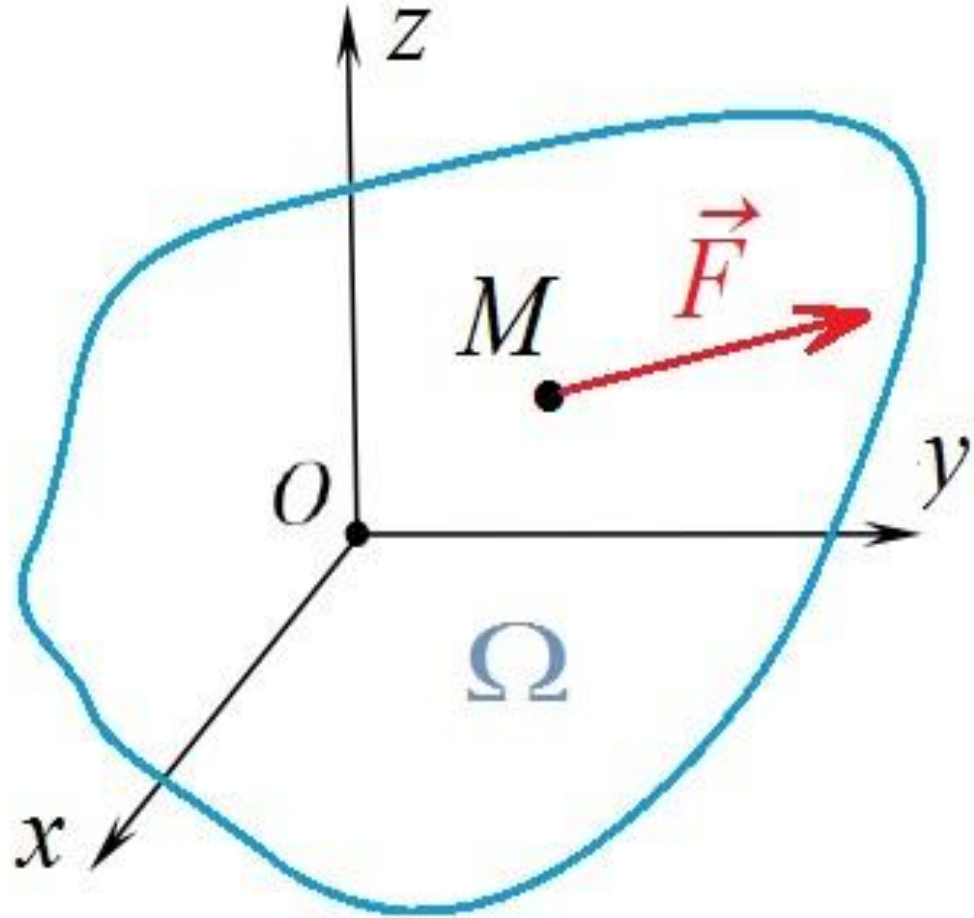
1. Силовое поле. Потенциальная энергия.

Пусть S – инерциальная ДСО в абсолютном пространстве E^3, Ω – область в E^3, неподвижная относительно S. Материальная точка M движется в области Ω под действием силы $\vec{F}$, причем $\vec{F}$ зависит от координат точки M и, возможно, от времени:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t),$$

где (x, y, z) – координаты точки M в ДСО S, t – время.

Тогда говорят, что *на области* Ω *задано* ***силовое поле*** $\vec{F}(x, y, z, t)$.


z
M
$\vec{F}$
O
y
Ω
x

Пусть $\widehat{\Omega}$ – область в пространстве $\mathbb{R}^3$, соответствующая

$$\Omega \subset E^3: \qquad M(x,y,z) \in \Omega \Leftrightarrow r_{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \widehat{\Omega}$$

(r_{OM} – координатный вектор точки M в ДСО S).

Пусть $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ – ***стационарное*** (не зависящее от времени) силовое поле. Рассмотрим $F = \left(F_x,\, F_y,\, F_z\right)^T$ – координатное представление вектора $\vec{F}$ в ДСО S. Таким образом, на области $\widehat{\Omega}$ определена вектор-функция $F(x,y,z),\; F: \widehat{\Omega} \to \mathbb{R}^3$.

Если существует функция $U(x, y, z)$, заданная на области $\widehat{\Omega}$, такая, что на $\widehat{\Omega}$

$$grad\,U = -F \quad (\text{то есть} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -F_x,\ \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y,\ \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z),$$

то функция $U(x, y, z)$ называется ***потенциальной энергией*** *точки M в поле силы* $\vec{F}$ (или *потенциальной энергией силы* $\vec{F}$), а само силовое поле $\vec{F}$ называется ***потенциальным.***

Заметим, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого.

2. Полная механическая энергия. Закон сохранения энергии. Пусть точка M движется в потенциальном силовом поле $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$,

$r = r_{OM}$ – координатный вектор точки $M(x, y, z)$ в ДСО S,

$U = U(x, y, z)$ – потенциальная энергия силы $\vec{F}$,

m – масса точки M,

$T = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m}{2} < \dot{r}, \dot{r} >$ – ***кинетическая энергия*** точки M.

Величина $E = U + T$ называется ***полной механической энергией*** точки M.

Теорема (закон сохранения энергии). В стационарном силовом поле полная механическая энергия материальной точки постоянна (не зависит от времени).

Доказательство. Докажем, что $\frac{dE}{dt}=0$. Для этого рассмотрим производные по времени от кинетической и потенциальной энергий:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}<\dot{r},\dot{r}>\right)=\frac{m}{2}(<\ddot{r},\dot{r}>+<\dot{r},\ddot{r}>)=m<\ddot{r},\dot{r}>=$$

$$=<m\ddot{r},\dot{r}>=<F,\dot{r}>$$

(с учетом второго закона Ньютона: $F=m\ddot{r}$),

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}=(-F_x)\dot{x}+(-F_y)\dot{y}+(-F_z)\dot{z}=-<F,\dot{r}>.$$

Следовательно, $\dfrac{dE}{dt} = < F, \dot{r} > - < F, \dot{r} > = 0 \;\Rightarrow\; E = const.$

Теорема доказана.

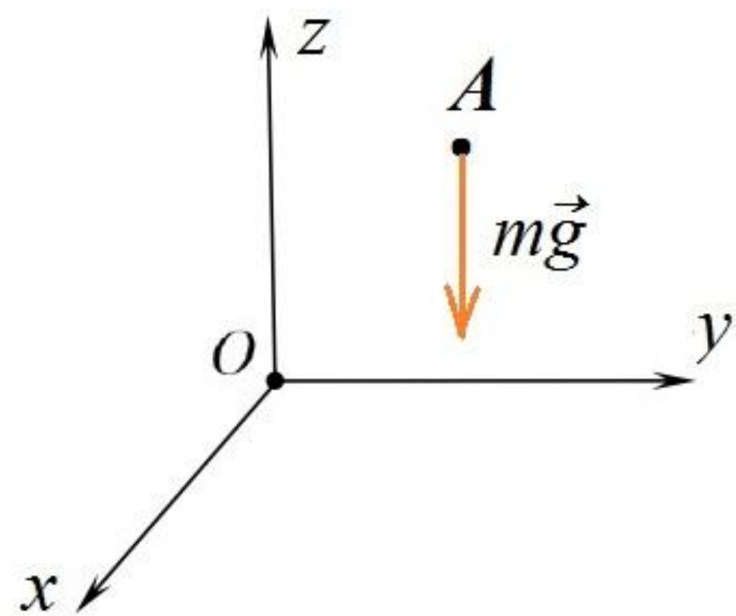
3. Примеры потенциальных силовых полей

Пример 1. Поле силы тяжести.

Область Ω достаточно мала, чтобы считать силу тяжести $\vec{F}_T$ постоянной, а поверхность земли – плоской. Координатное представление вектора силы тяжести: $F_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

(оси Ox и Oy параллельны поверхности земли).

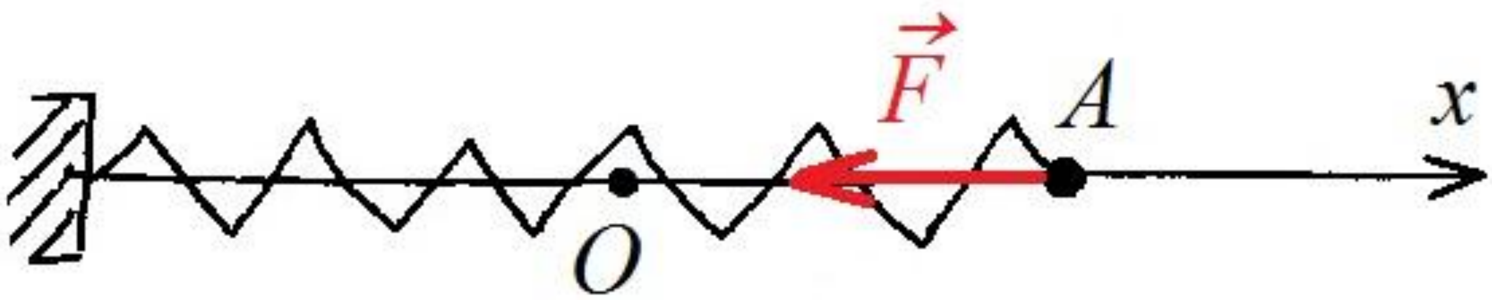
Тогда $U = mgz$ – потенциальная энергия силы $\vec{F}_T$ на области Ω (U зависит только от высоты).



Пример 2. Силовое поле упругой пружины.

При $x = 0$ пружина не деформирована. Материальная точка A движется по оси Ox под действием упругой силы $\vec{F}$.

При малых отклонениях пружины от положения равновесия можно считать, что $F_x = -kx$ $(F_y = F_z = 0)$. Тогда $U = \dfrac{kx^2}{2}$ – потенциальная энергия силы $\vec{F}$.



Пример 3. Гравитационное поле.

Пусть точка O (начало ДСО S) находится в центре притягивающего тела (например, Солнца).

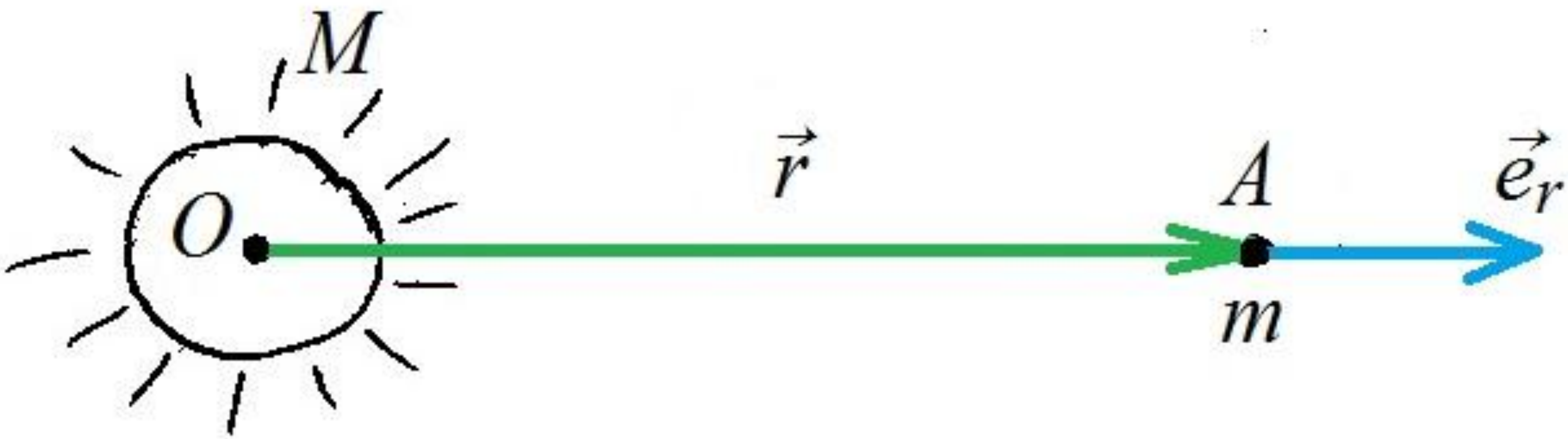
Закон всемирного тяготения: $\vec{F} = -G\dfrac{Mm}{\rho^2}\cdot \vec{e}_r$,

где G – гравитационная постоянная,

M – масса притягивающего тела,

m – масса точки A (небесного тела), к которой приложена

сила $\vec{F}$, $\quad \vec{r} = \overrightarrow{OA}$, $\quad \rho = |OA|$, $\quad \vec{e}_r = \dfrac{1}{|r|}\cdot \vec{r} = \dfrac{1}{\rho}\cdot \vec{r}$, $\quad \vec{e}_r \uparrow\uparrow \vec{r}$.


M
O
$\vec{r}$
A
m
$\vec{e}_r$

Рассмотрим функцию $f(\xi) = -G\frac{Mm}{\xi^2} = -\frac{k}{\xi^2}$, где $k = GMm$.

Тогда $\widetilde{V}(\xi) = \frac{k}{\xi}$ – первообразная функции $f(\xi)$.

Рассмотрим также функцию

$$U(x,y,z) = -\widetilde{V}(|r|) = -\widetilde{V}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Частные производные от функции U имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} = kx|r|^{-3}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = ky|r|^{-3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = kz|r|^{-3},$$

Частные производные от функции U имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = kx\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} = kx\,|\,r\,|^{-3}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = k\,y\,|\,r\,|^{-3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = k\,z\,|\,r\,|^{-3},$$

следовательно, $grad\,U = k|\,r\,|^{-3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k|\,r\,|^{-3}\,r.$

Заметим, что в координатах ДСО S

$$F = -G\frac{Mm}{|r|^3}\cdot r = -\frac{k}{|r|^3}\cdot r = -grad\,U\,.$$

Следовательно, $U(x,y,z) = -\dfrac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ – потенциальная энергия силы $\vec{F}$ (U зависит только от расстояния $\rho = |r|$ (для данной точки A массы m)).