

Лекция 6

ДЕРЕВЬЯ

(продолжение)

1. Представления и реализации бинарных деревьев (см. учебное пособие «ДСД», п. 3.5)
2. Примеры функций на бинарных деревьях
3. БД с размеченными листьями

Ссылочная реализация бинарного дерева в связанной памяти

Базовый тип узлов *Elem*.

BT (Elem) представляется рекурсивными типами *BinT* и *Node*

type

BinT = \wedge *Node*; {представление бинарного
дерева}

Node = **record** {узел: }

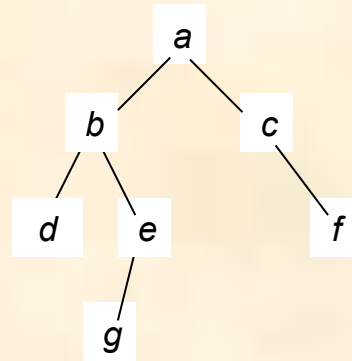
Info: *Elem*; {– содержимое}

LSub: *BinT*; {– левое поддерево}

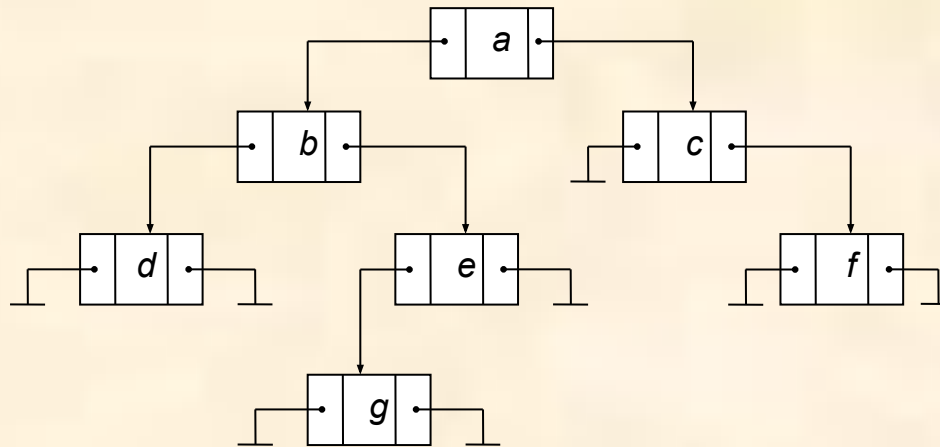
RSub: *BinT* {– правое поддерево}

end {*Node*}

Пример: бинарное дерево (а) и его представление в ссылочной реализации (б)



а



б

Набор основных функций для работы с бинарным деревом на основе ссылочной реализации

CreateBT: BinT;

NullBT (t: BinT): Boolean;

RootBT (t: BinT): Elem;

LeftBT (t: BinT): BinT;

RightBT (t: BinT): BinT;

ConsBT (e: Elem; LS, RS: BinT): BinT;

DestroyBT (var b: BinT);

Otkaz (n: Byte);

Функция *CreateBT* формально специфицируется соотношениями

CreateBT: $\rightarrow BT$; *Null (CreateBT)* = true.

Otkaz вызывается при попытке некорректного применения основных функций

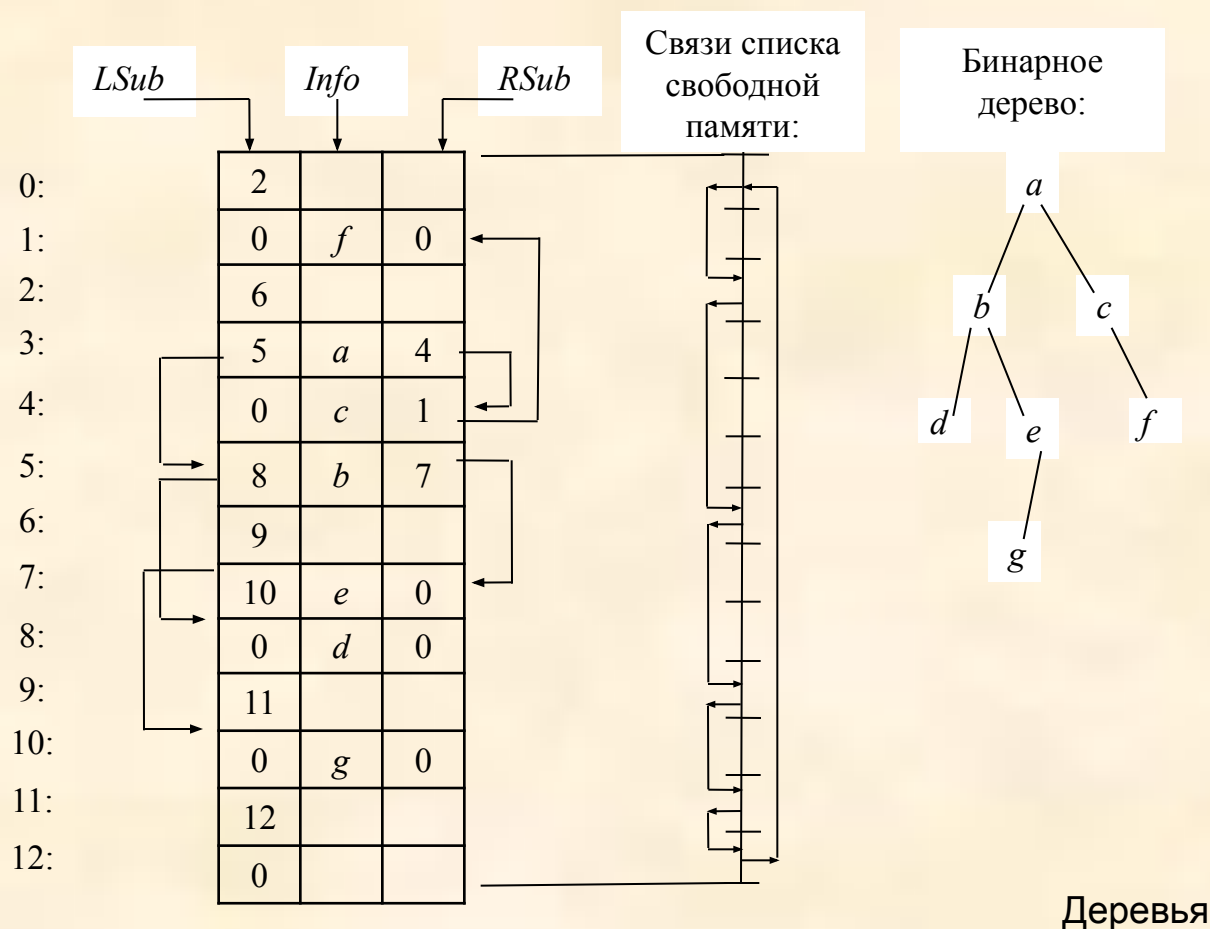
В процедурно-модульной парадигме интерфейс АТД "Бинарное дерево" представлен в файле Btree.h, реализация основных функций для работы с АТД "Бинарное дерево" - в файле bt_implementation.cpp, пример работы с АТД "Бинарное дерево" - в файле work_bt.cpp, где для ввода ВТ из файла используется его КЛП-представление, а для вывода его на экран порядок КЛП, ЛКП и ЛПК. Программа также подсчитывает высоту и количество узлов ВТ.

Ссылочная реализация ограниченного бинарного дерева на базе вектора

```
type Adr = 0 .. MaxAdr;           {диапазон «адресов» в векторе Mem}  
  
    BinT = Adr;                     {представление бинарного дерева}  
  
    Node = record                   {узел: }  
        Info: Elem;                {– содержимое}  
        LSub: BinT;                 {– левое поддерево}  
        RSub: BinT                  {– правое поддерево}  
  
    end {Node};  
  
    Mem = array [Adr] of Node   {вектор для хранения дерева}
```

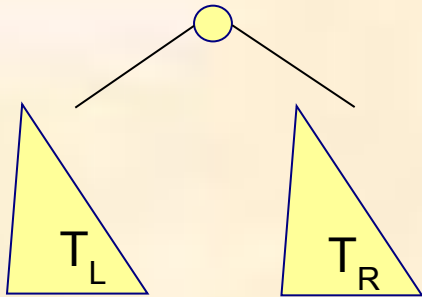
Пример ссылочного представления бинарного дерева на базе вектора

Дерево представляется переменной b : Bin T, значение $b = 3$ - номер элемента массива, в котором хранится корень.



Примеры функций на бинарных деревьях

T:



Число узлов БД:

0, при $T = \Lambda$

$Nv(T) =$

$Nv(T_L) + Nv(T_R) + 1$, при $T \neq \Lambda$

```
Nat0 Nv (BinT t)
```

```
{
```

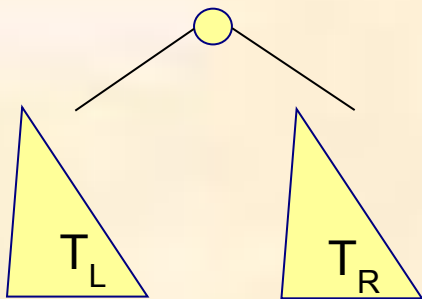
```
  if (Null(t)) return 0;
```

```
  else return (Nv (LeftBT(t)) + Nv (RightBT(t)) + 1);
```

```
}
```


Примеры функций на бинарных деревьях

T:



Число листьев БД:

$$\text{NLeaf}(T) = \begin{cases} 0, & \text{при } T = \Lambda \\ 1, & \text{при } (T_L = \Lambda) \& (T_R = \Lambda) \\ \text{NLeaf}(T_L) + \text{NLeaf}(T_R), & \text{иначе} \end{cases}$$

Nat0 NLeaf (BinT t):

{

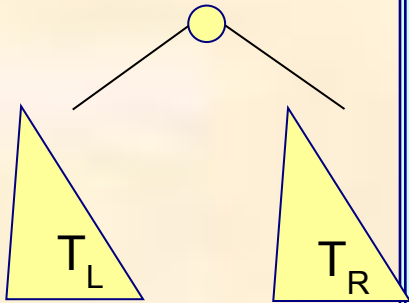
if (Null(t)) return 0;

else if (Null(LeftBT(t)) && Null(RightBT(t))) return 1;

else return (NLeaf (LeftBT(t)) + NLeaf (RightBT(t)));

}

T:



Высота БД:

0, при $T = \Lambda$

$H(T) =$

$\max(H(T_L), H(T_R)) + 1$, при $T \neq \Lambda$

```
Nat0 H ( BinT t)
```

```
{
```

```
  if (Null(t)) return 0;
```

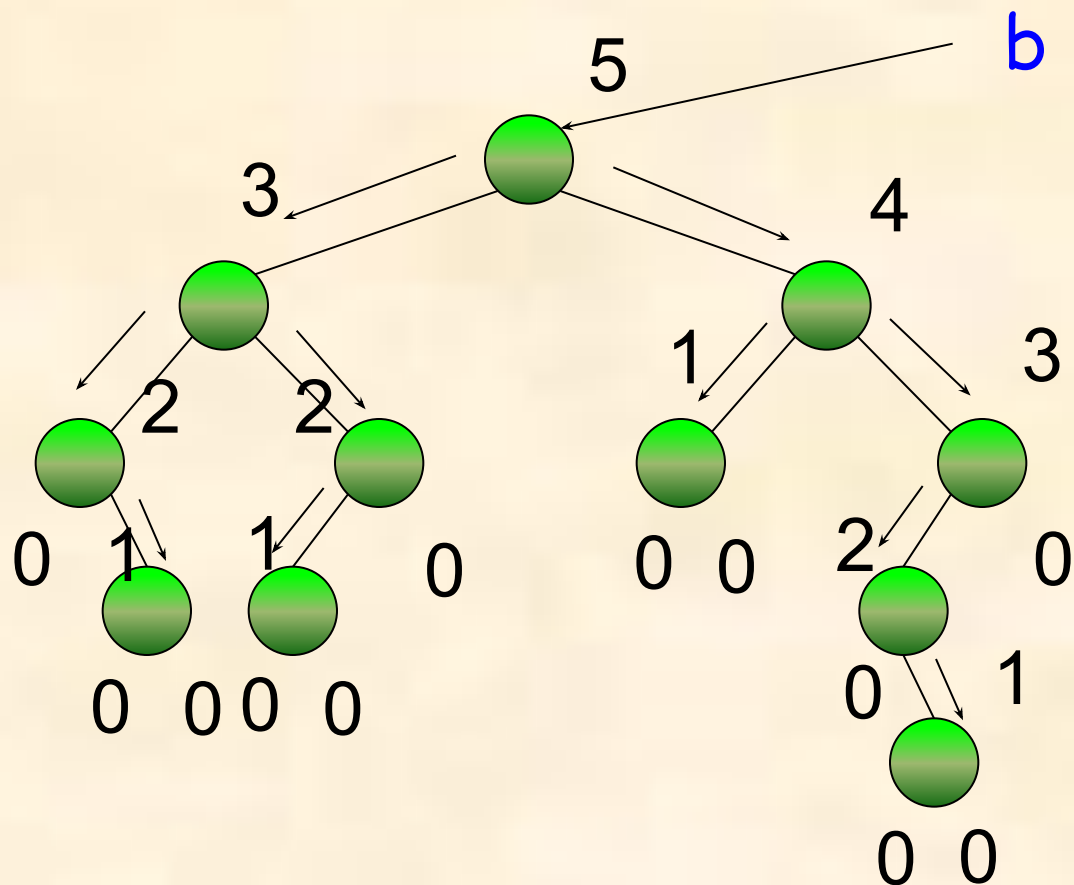
```
  else return (max (H(LeftBT(t)), H(RightBT(t))) +1);
```

```
}
```

Вычисление $H(b)$

$$H(\Lambda)=0$$

$$H(\text{●})=1$$



Проверить свойство дерева:
для каждого узла БД имеем $H(T_L) - H(T_R) = 1$

```
Bool HF (BinT t)
{  if (Null(t)) return true;
  else
  {
    HL = H(LeftBT(t));
    HR = H(RightBT(t));
    return (HF(LeftBT(t)) && HF(RightBT(t))
      && (HL - HR) == 1);
  }
}
```

!Пояснить неэффективность такой реализации функции HF
!Самостоятельно написать хороший вариант

Бинарные деревья с размеченными листьями (комбинации)

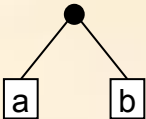
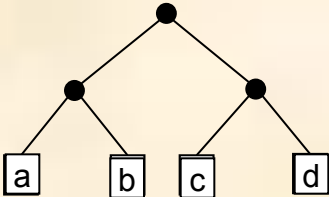
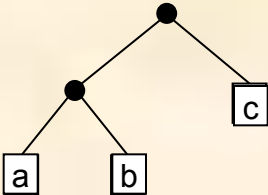
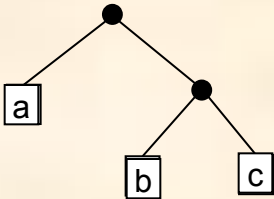
Бинарное дерево с размеченными листьями - это либо знак («атом», атомарное дерево), либо (упорядоченная) пара бинарных деревьев с размеченными листьями.

$$\langle comb(\alpha) \rangle ::= \langle atomic(\alpha) \rangle \mid \langle left(\alpha) \rangle \langle right(\alpha) \rangle$$
$$\langle atomic(\alpha) \rangle ::= \langle \alpha \rangle$$
$$\langle left(\alpha) \rangle ::= \langle comb(\alpha) \rangle$$
$$\langle right(\alpha) \rangle ::= \langle comb(\alpha) \rangle$$

Можно ввести понятие «пара» (pair):

$$\langle comb(\alpha) \rangle ::= \langle atomic(\alpha) \rangle \mid \langle pair(\alpha) \rangle$$
$$\langle pair(\alpha) \rangle ::= \langle comb(\alpha) \rangle \langle comb(\alpha) \rangle$$

Примеры скобочной записи и графического изображения комбинаций:

$(a.b)$	 <pre>graph TD; Root(()) --- a[a]; Root --- b[b];</pre>
$((a.b).(c.d.))$	 <pre>graph TD; Root(()) --- L(()); Root --- R(()); L --- a[a]; L --- b[b]; R --- c[c]; R --- d[d];</pre>
$((a.b).c)$	 <pre>graph TD; Root(()) --- L(()); Root --- c[c]; L --- a[a]; L --- b[b];</pre>
$(a.(b.c))$	 <pre>graph TD; Root(()) --- a[a]; Root --- L(()); L --- b[b]; L --- c[c];</pre>

Смешанное бинарное дерево (СБД)

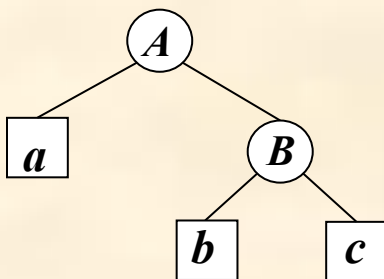
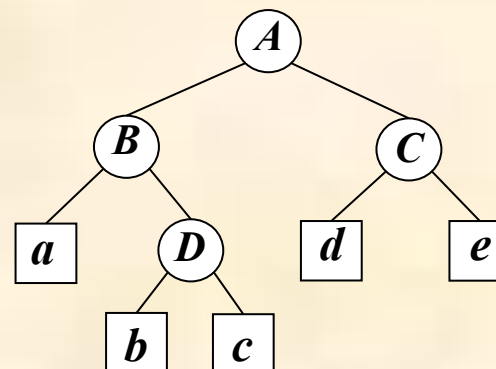
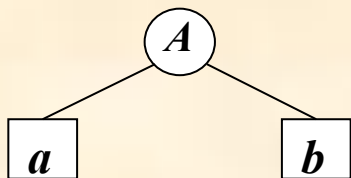
Можно ввести «гибрид» бинарных деревьев и комбинаций.

Определим *смешанное (расширенное, декорированное) бинарное дерево (СБД)* над базовыми типами α (внутренние узлы) и β (внешние узлы - листья):

$$\langle \text{СБД}(\alpha, \beta) \rangle ::= \langle \text{atomic}(\beta) \rangle \mid \langle \text{root}(\alpha) \rangle \langle \text{left}(\alpha, \beta) \rangle \langle \text{right}(\alpha, \beta) \rangle,$$
$$\langle \text{atomic}(\beta) \rangle ::= \langle \beta \rangle,$$
$$\langle \text{root}(\alpha) \rangle ::= \langle \alpha \rangle,$$
$$\langle \text{left}(\alpha, \beta) \rangle ::= \langle \text{СБД}(\alpha, \beta) \rangle,$$
$$\langle \text{right}(\alpha, \beta) \rangle ::= \langle \text{СБД}(\alpha, \beta) \rangle.$$

Примеры СБД

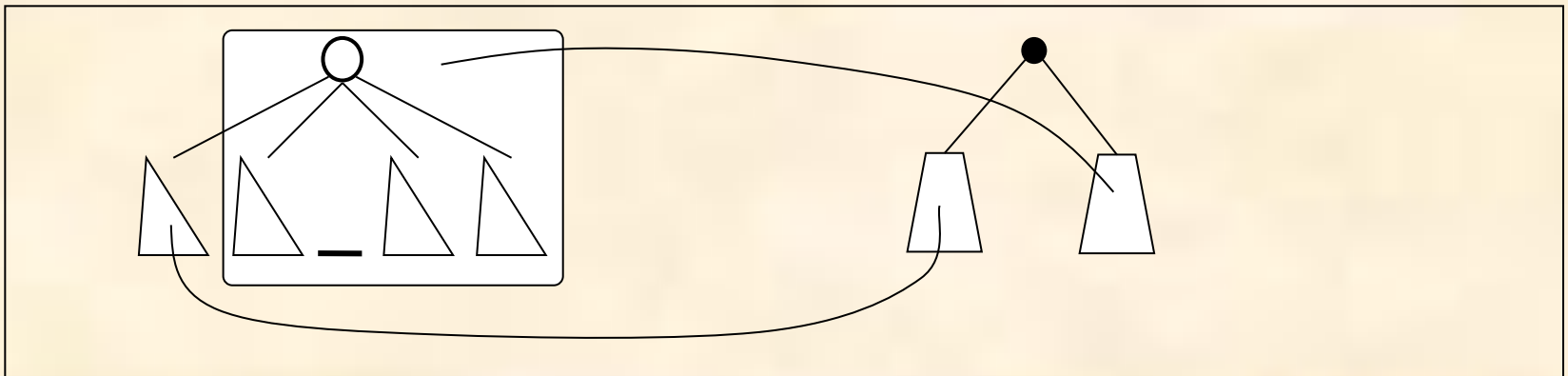
$$\alpha = \{A, B, C, \dots\}; \beta = \{a, b, c, \dots\}$$



Если α - пусто, то получим *комбинации* над типом β , а если β - пусто (пустое дерево), то получим *бинарные деревья* над типом α .

Соответствие между деревьями (Т) и комбинациями (С)

- дерево с нулевым лесом поддеревьев (с пустым *листингом*) соответствует атомарной комбинации;
- дерево с ненулевым лесом поддеревьев (с непустым *листингом*) преобразуется в комбинацию так, что *первое* дерево леса соответствует *левой* части комбинации, а оставшееся дерево, состоящее из корня и остальных деревьев леса, соответствует *правой* части комбинации.



Формально соответствие «дерево \Rightarrow комбинация» может быть описано функцией

```
C(T)  $\equiv$  if Null(Listing(T)) then Root(T)
        else ConsComb ( C(Head(Listing(T))), C(
            ConsTree(Root(T), Tail(Listing(T))))
```

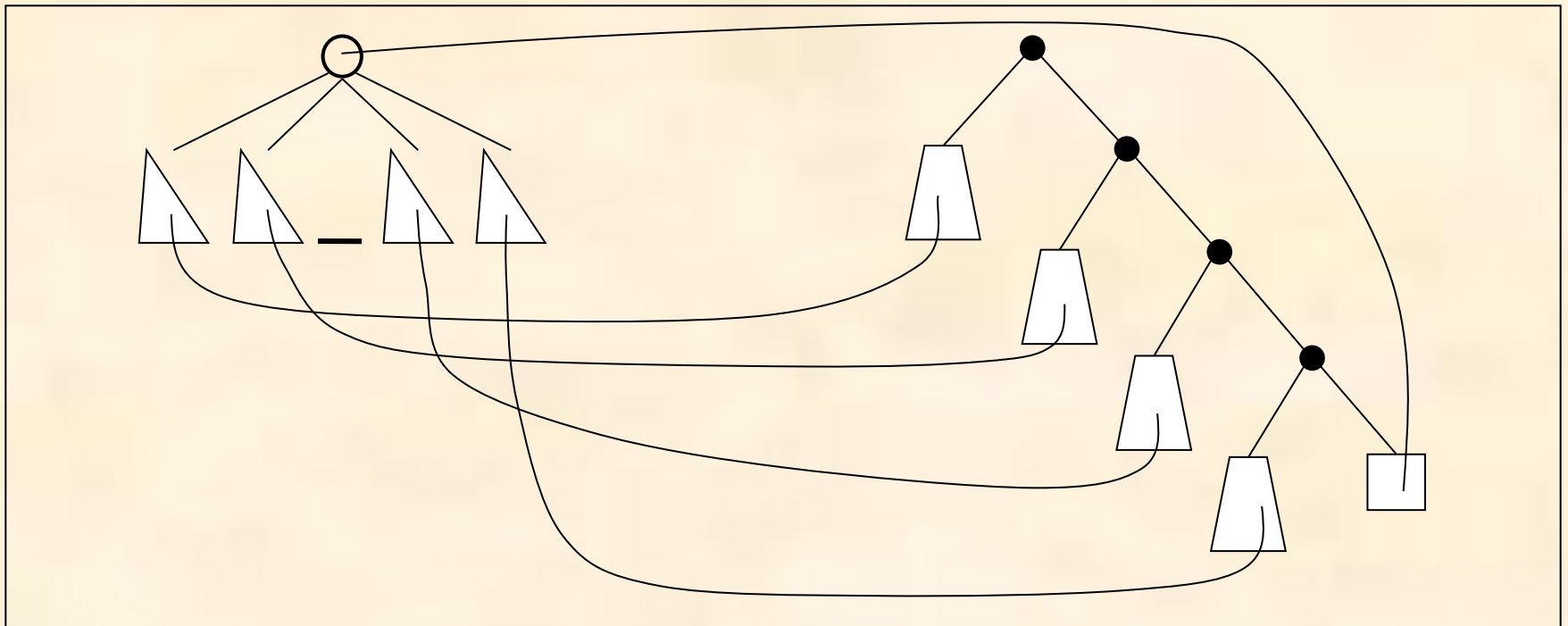
Listing(T) – лес поддеревьев исходного дерева,

Head(Listing(T)) – первое дерево этого леса,

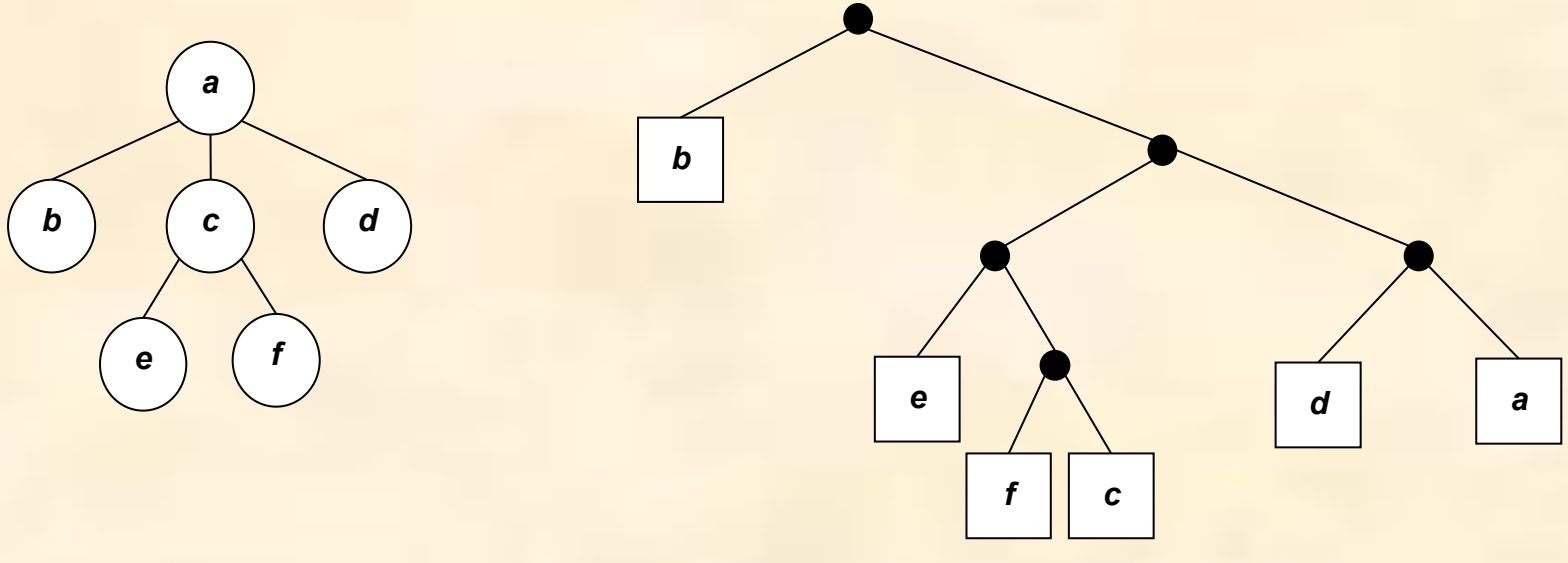
Tail(Listing(T)) – лес остальных поддеревьев (т.е. за исключением первого),

ConsTree(Root(T), Tail(Listing(T))) – дерево, состоящее из корня исходного дерева и остальных деревьев леса его поддеревьев.

*Преобразование на предыдущем слайде можно
развернуть по последовательности поддеревьев:*



Пример преобразования «дерево \Rightarrow комбинация»

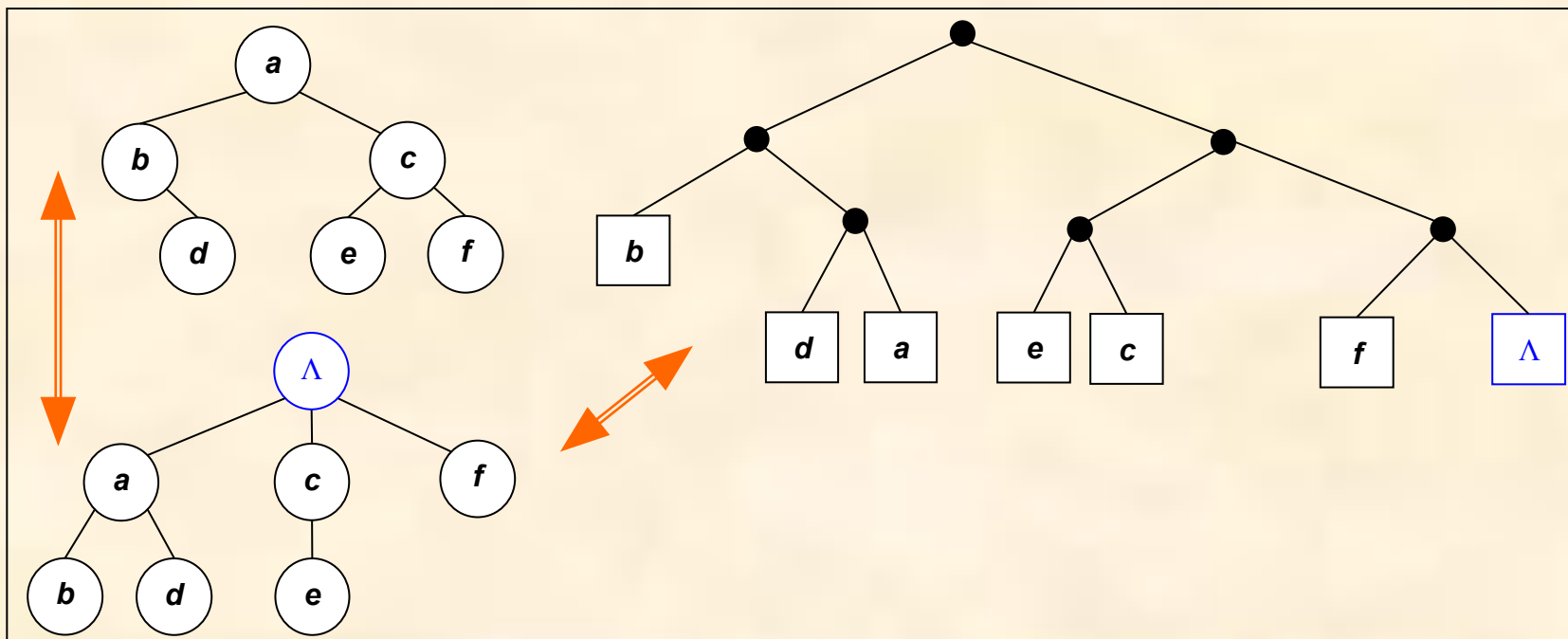


Обратное преобразование из комбинации в дерево получается обращением стрелок на рисунках слайдов 17, 19 и описывается функцией

```
 $T(C) \equiv$  if Atom(C) then ConsTree(Val(C), nil)
else ConsTree(Root(T(Right(C))), Cons(T(Left(C)),
Listing(T(Right(C)))))
```

Преобразования «бинарное дерево \Rightarrow комбинация»



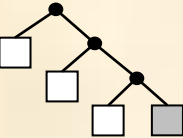



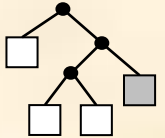



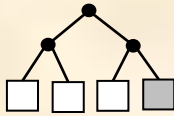



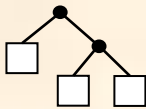



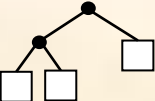

1. бинарное дерево \Rightarrow лес,
2. лес \Rightarrow дерево (добавляется фиктивный корень),
3. дерево \Rightarrow комбинация



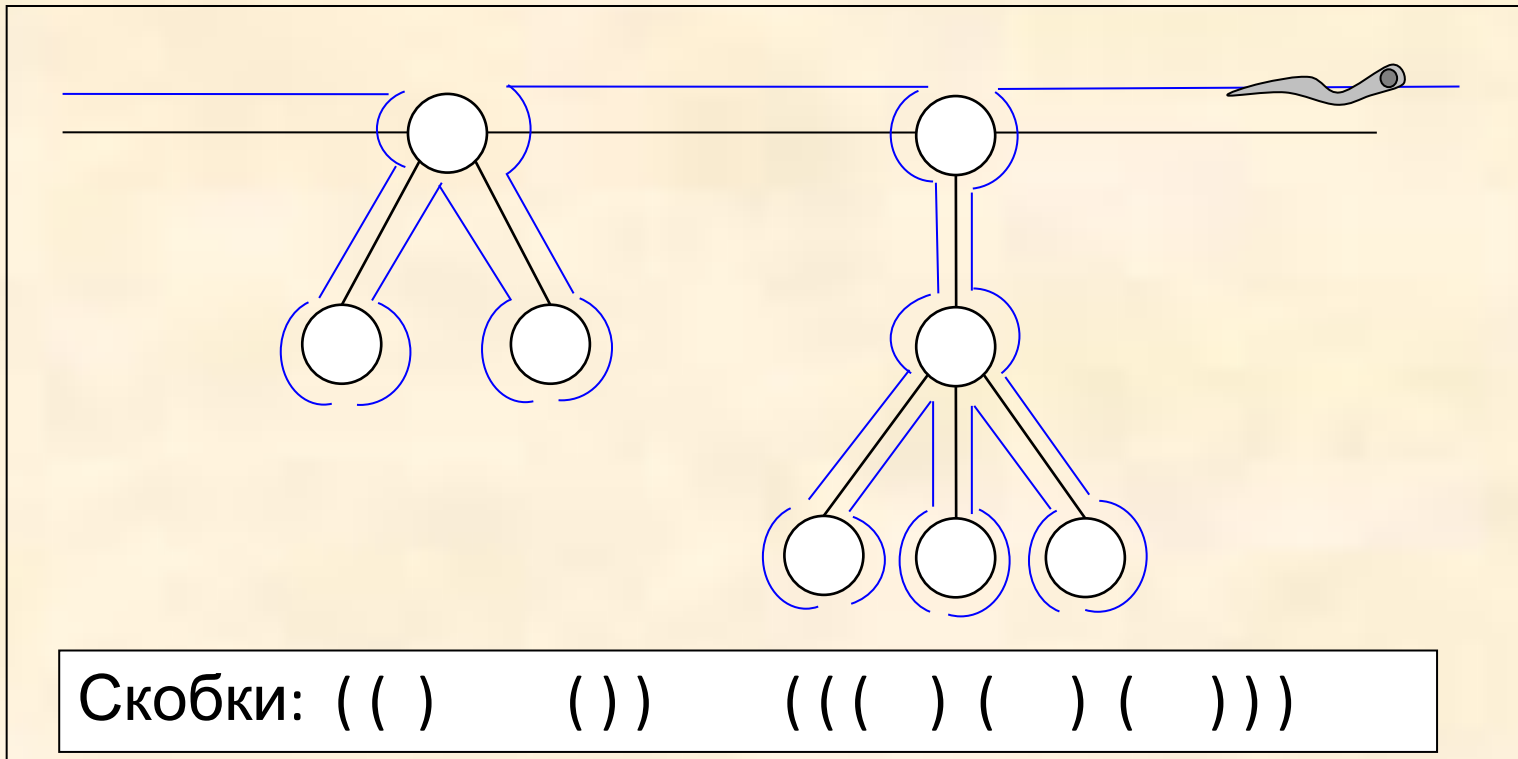
Примеры соответствия комбинаторных объектов (3 узла)

Задание. Представить аналогичную таблицу для случая «Число узлов =4».

Дональд Э. Кнут, Искусство программирования. Том 4. Выпуск 4. Генерация всех деревьев.

№	Лес	Бинарное дерево	Комбинация	Скобки	Рукопожатия
1				$()()()$	
2				$()(())$	
3				$((()))()$	
4				$((())())$	
5				$(((())))$	

Ползущий червь



КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ