



Логарифмические неравенства -

неравенства, содержащие логарифмические функции.

Неравенство вида

$$\log_a f(x) < g(x),$$

где $a > 0; a \neq 1$.

равносильно системе

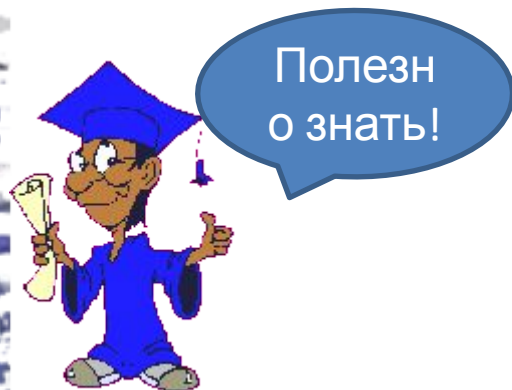
$$\begin{cases} f(x) < a^{g(x)}, \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ при } a > 1$$

или неравенству

$$f(x) > a^{g(x)}, \text{ при } 0 < a < 1$$



Логарифмические неравенства -



- Если основание логарифма больше 1, то знак неравенства сохраняется, если основание логарифма меньше 1, то знак неравенства меняется.
- Если выражение, стоящее под логарифмом, **больше** положительного выражения, то **ОДЗ** для этого выражения **проверять не нужно**.



Логарифмические

неравенства -

неравенства, содержащие логарифмические функции.

Неравенство вида

$$\log_a f(x) < \log_a g(x),$$

где $a > 0; a \neq 1$.

равносильно системе

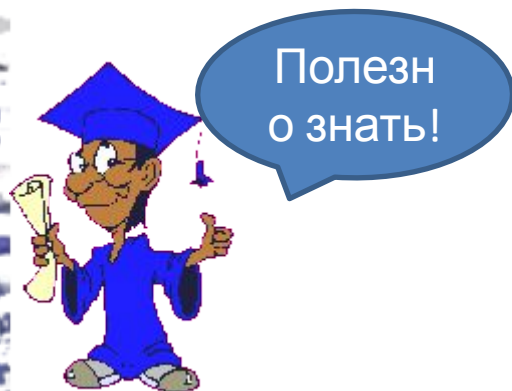
$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ при } a > 1$$

или системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}, \text{ при } 0 < a < 1$$



Логарифмические неравенства -



- ОДЗ логарифмического выражения достаточно проверить только для **меньшего** из двух логарифмических выражений.



Пример

1 Решить неравенство $\log_{0,6}(8-x) > \log_{0,6} \frac{x+4}{2x-3}$

Решение:

$$\log_{0,6}(8-x) > \log_{0,6} \frac{x+4}{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x < \frac{x+4}{2x-3}, \\ 8-x > 0, \end{cases}$$

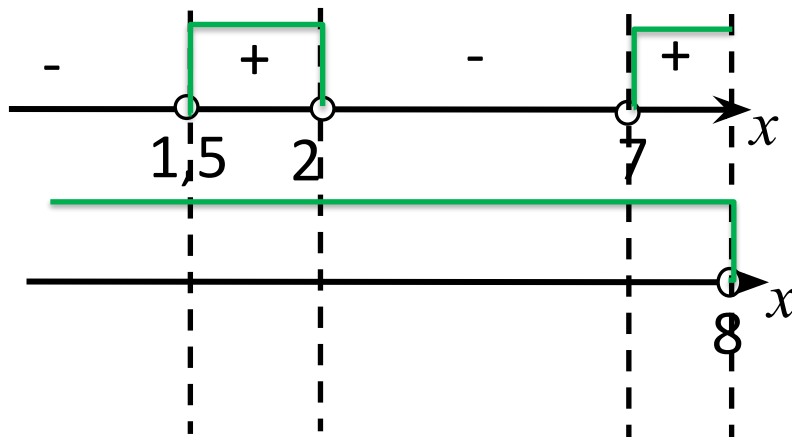
$$\begin{cases} 8-x - \frac{x+4}{2x-3} < 0, \\ x < 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(8-x) \cdot (2x-3) - x - 4}{2x-3} < 0, \\ x < 8, \end{cases} \Leftrightarrow$$

Пример

1 Решить неравенство $\log_{0,6}(8-x) > \log_{0,6} \frac{x+4}{2x-3}$

$$\begin{cases} \frac{16x - 24 - 2x^2 + 3x - x - 4}{2x - 3} < 0, \\ x < 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2x^2 + 18x - 28}{2x - 3} < 0, \\ x < 8, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 9x + 14}{x - 1,5} > 0, \\ x < 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x - 2)(x - 7)}{x - 1,5} > 0, \\ x < 8, \end{cases}$$



Ответ:

$$x \in (1,5; 2) \cup (7; 8)$$



Пример

Решить неравенство $0,5^{\log_3(x^2+6x-7)} \geq 0,25$

Решение:

$$(0,5)^{\log_3(x^2+6x-7)} \geq 0,25 \Leftrightarrow (0,5)^{\log_3(x^2+6x-7)} \geq 0,5^2 \Leftrightarrow$$

$$\log_3(x^2 + 6x - 7) \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x - 7 \leq 3^2, \\ x^2 + 6x - 7 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

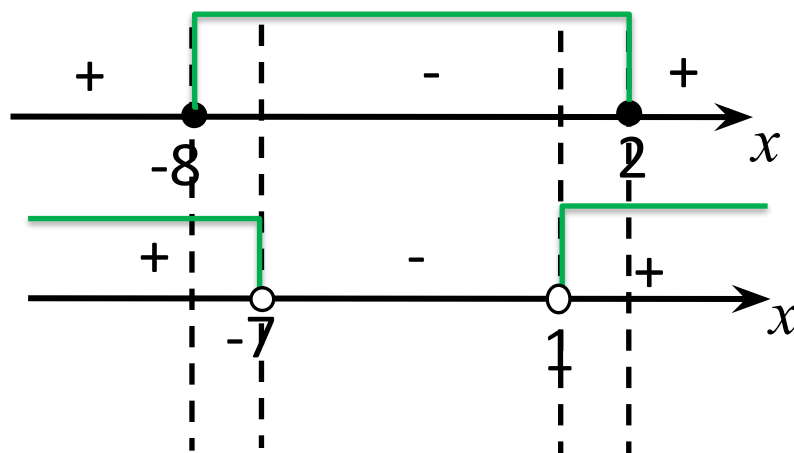
$$\begin{cases} x^2 + 6x - 16 \leq 0, \\ x^2 + 6x - 7 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 8)(x - 2) \leq 0, \\ (x + 7)(x - 1) > 0. \end{cases}$$



Пример

Решить неравенство $0,5^{\log_3(x^2+6x-7)} \geq 0,25$

$$\begin{cases} (x+8)(x-2) \leq 0, \\ (x+7)(x-1) > 0. \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-8; -7) \cup (1; 2]$



Неравенство вида

$$\log_{f(x)} g(x) \leq h(x) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 0 < g(x) \leq f(x)^{h(x)}; \\ f(x) > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq f(x)^{h(x)}; \\ 0 < f(x) < 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ОДЗ;} \\ (f(x) - 1)(g(x) - f(x)^{h(x)}) \leq 0 \end{array} \right.$$



Обобщим

Неравенство вида

$$\log_{f(x)} g(x) \vee h(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ОДЗ;} \\ \left((f(x) - 1) \left(g(x) - f(x)^{h(x)} \right) \right) \vee 0 \end{cases}$$

Где \vee - любой из знаков неравенства:

$<$; $>$; \leq ; \geq .



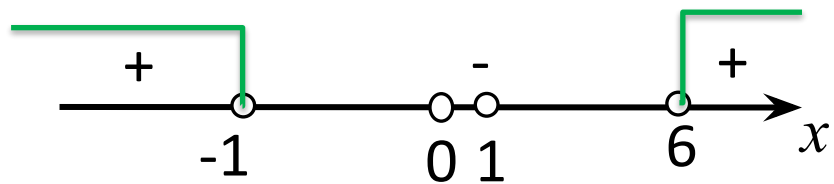
Пример

3 Решить неравенство $\log_{x^2} (x^2 - 5x - 6) < 1$

Решение:

Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 6)(x + 1) > 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$$

Пример

3 Решить неравенство $\log_{x^2} (x^2 - 5x - 6) < 1$

Теперь запишем систему вида

$$\begin{cases} \text{ОДЗ;} \\ (f(x) - 1)(g(x) - f(x)^{h(x)}) < 0 \end{cases}$$

В нашем случае $\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty), \\ (x^2 - 1)(x^2 - 5x - 6 - (x^2)^1) < 0. \end{cases}$

Далее решим второе неравенство полученной системы:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 5x - 6 - (x^2)^1) < 0$$



Пример

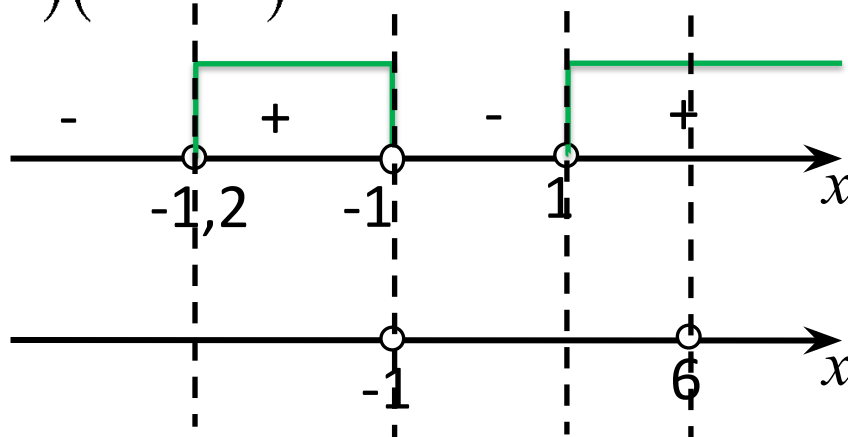
3 Решить неравенство $\log_{x^2} (x^2 - 5x - 6) < 1$

Итак,

$$(x^2 - 1) \left(x^2 - 5x - 6 - (x^2)^1 \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 1) (x^2 - 5x - 6 - x^2) < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(-5x - 6) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)(x + 1)(5x + 6) > 0$$



Ответ: $x \in (-1, 2; -1) \cup (6; +\infty)$



Обобщим

Неравенство вида

$$\log_{f(x)} g(x) \vee \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ОДЗ;} \\ ((f(x) - 1)(g(x) - h(x))) \vee 0 \end{cases}$$

Где \vee - любой из знаков неравенства:

$<$; $>$; \leq ; \geq .



Неравенство вида

$$\log_{f(x)} h(x) \vee \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ОДЗ;} \\ ((f(x)-1)(g(x)-1)(h(x)-1)(g(x)-f(x))) \vee 0 \end{cases}$$

Где \vee - любой из знаков неравенства:

$<$; $>$; \leq ; \geq .



Пример 4 (ЦТ 2008)

B9)

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \leq \log_{\frac{x}{3}-3} 121 \quad \text{на промежутке } [0; 21].$$

Решение:

Найдём ОДЗ

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - 5 > 0, \\ \frac{x}{3} - 3 > 0, \\ \frac{x}{3} - 5 \neq 1, \\ \frac{x}{3} - 3 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} > 5, \\ \frac{x}{3} > 3, \\ \frac{x}{3} \neq 6, \\ \frac{x}{3} \neq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 15, \\ x > 9, \\ x \neq 18, \\ x \neq 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 15, \\ x \neq 18. \end{cases}$$

$$x \in (15; 18) \cup (18; +\infty)$$

Пример 4 (ЦТ 2008)

В9)

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x-5}{3}} 11 \leq \log_{\frac{x-3}{3}} 121 \quad \text{на промежутке } [0;21].$$

Заметим, что $121=11^2$ и преобразуем неравенство

$$\log_{\frac{x-5}{3}} 11 \leq \log_{\frac{x-3}{3}} 121 \Leftrightarrow \log_{\frac{x-5}{3}} 11 \leq 2 \log_{\frac{x-3}{3}} 11 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{x-5}{3}} 11 \leq \log_{\frac{x-3}{3}} 11 \Leftrightarrow \log_{\left(\frac{x-5}{3}\right)^2} 11 \leq \log_{\frac{x-3}{3}} 11.$$

Получили неравенство вида

$$\log_{f(x)} h(x) \leq \log_{g(x)} h(x), \quad \text{где } f(x) = \left(\frac{x}{3} - 5\right)^2;$$
$$g(x) = \frac{x}{3} - 3;$$
$$h(x) = 11.$$

Пример 4 (ЦТ 2008)

В9)

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \leq \log_{\frac{x}{3}-3} 121 \quad \text{на промежутке } [0;21].$$

Воспользуемся правилом

$$\log_{f(x)} h(x) \vee \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ОДЗ;} \\ (f(x)-1)(g(x)-1)(h(x)-1)(g(x)-f(x)) \vee 0 \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} x \in (15;18) \boxtimes (18;+\infty); \\ \left(\left(\frac{x}{3}-5 \right)^2 - 1 \right) \left(\left(\frac{x}{3}-3 \right) - 1 \right) (11-1) \left(\left(\frac{x}{3}-3 \right) - \left(\frac{x}{3}-5 \right)^2 \right) \leq 0 \end{cases}$$



Пример 4 (ЦТ 2008)

B9)

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x-5}{3}} 11 \leq \log_{\frac{x-3}{3}} 121 \quad \text{на промежутке } [0;21].$$

Решим второе неравенство системы

$$\left(\left(\frac{x}{3} - 5 \right)^2 - 1 \right) \left(\left(\frac{x}{3} - 3 \right) - 1 \right) (11 - 1) \left(\left(\frac{x}{3} - 3 \right) - \left(\frac{x}{3} - 5 \right)^2 \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{3} - 5 - 1 \right) \left(\frac{x}{3} - 5 + 1 \right) \left(\frac{x}{3} - 4 \right) \left(\frac{x}{3} - 3 - \frac{x^2}{9} + \frac{10}{3}x - 25 \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{3} - 6 \right) \left(\frac{x}{3} - 4 \right) \left(\frac{x}{3} - 4 \right) \left(-\frac{x^2}{9} + \frac{11}{3}x - 28 \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 18)(x - 12)^2 (x^2 - 33x + 28 \cdot 9) \geq 0 \Leftrightarrow$$



Пример 4 (ЦТ 2008)

B9)

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \leq \log_{\frac{x}{3}-3} 121 \quad \text{на промежутке } [0;21].$$

Найдём дискриминант выражения $x^2 - 33x + 28 \cdot 9$:

$$\begin{aligned} D &= 33^2 - 4 \cdot 28 \cdot 9 = 9 \cdot (11^2 - 4 \cdot 28) = 9 \cdot (121 - 112) = \\ &= 9 \cdot 9 \end{aligned}$$

Тогда корни этого выражения

$$x = \frac{33 \pm 9}{2} = \begin{cases} 21, \\ 12 \end{cases}$$

А значит неравенство примет вид

$$(x-18)(x-12)^2(x-21)(x-12) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-18)(x-12)^3(x-21) \geq 0$$



Пример 4 (ЦТ 2008)

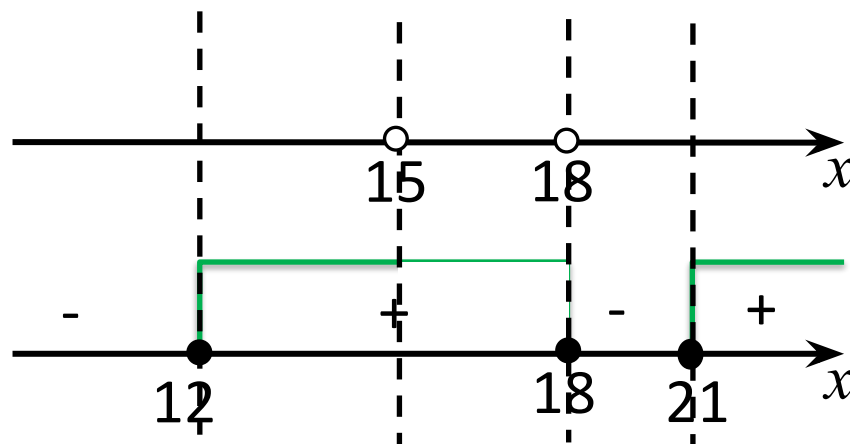
В9)

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \leq \log_{\frac{x}{3}-3} 121 \quad \text{на промежутке } [0;21].$$

В итоге получаем систему

$$\begin{cases} x \in (15;18) \cup (18;+\infty), \\ (x-18)(x-12)^3(x-21) \geq 0. \end{cases}$$



Ответ: $x \in (15; 18) \cup [21; +\infty)$, целыми решениями на промежутке $[0;21]$ являются числа 16; 17 и 21. Их сумма равна 54.



Для всех других неравенств перед их решением **ОБЯЗАТЕЛЬНО** нужно указать ОДЗ переменной:

- Основание логарифма больше 0 и не равно 1;
- Выражение, стоящее под логарифмом, больше 0.



Если необходимо логарифмировать обе части неравенства, то

- При логарифмировании по основанию, большему 1, знак неравенства сохраняется;
- При логарифмировании по основанию, меньшему 1, знак неравенства меняется.