Логарифмические неравенства -

неравенства, содержащие логарифмические функции.

Неравенство вида

$$\log_a f(x) < g(x),$$

где $a > 0; a \neq 1$.

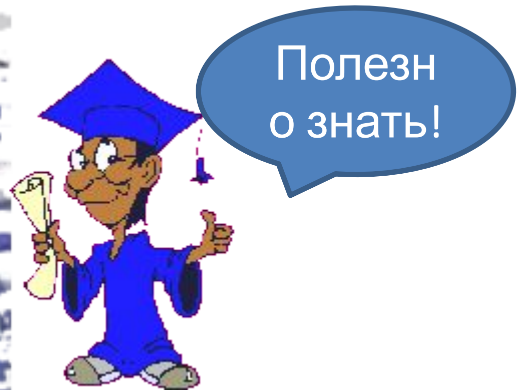
равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < a^{g(x)}, \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{при } a > 1$$

или неравенству

$$f(x) > a^{g(x)}, \text{ при } 0 < a < 1$$

Логарифмические неравенства -



- Если основание логарифма больше 1, то знак неравенства сохраняется, если основание логарифма меньше 1, то знак неравенства меняется.
- Если выражение, стоящее под логарифмом, **<u>больше</u>** положительного выражения, то **<u>ОДЗ</u>** для этого выражения **<u>проверять не нужно</u>**.

Логарифмические неравенства -

неравенства, содержащие логарифмические функции.

Неравенство вида

$$\log_a f(x) < \log_a g(x),$$

где $a > 0; a \neq 1.$

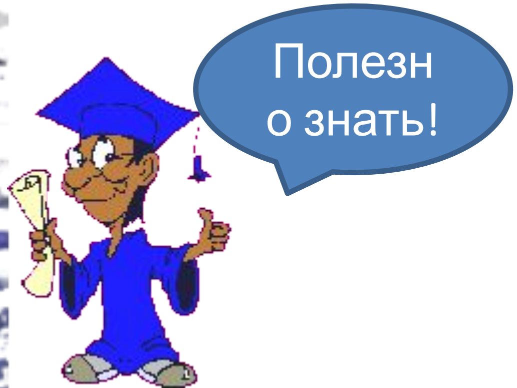
равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{при } a > 1$$

или системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}, \text{при } 0 < a < 1$$

Логарифмические неравенства -



- ОДЗ логарифмического выражения достаточно проверить только для <u>**меньшего**</u> из двух логарифмических выражений.

Пример 1

Решить неравенство $\log_{0,6}(8-x) > \log_{0,6}\frac{x+4}{2x-3}$

Решение:

$$\log_{0,6}(8-x) > \log_{0,6}\frac{x+4}{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x < \dfrac{x+4}{2x-3}, \\ 8-x > 0, \end{cases}$$

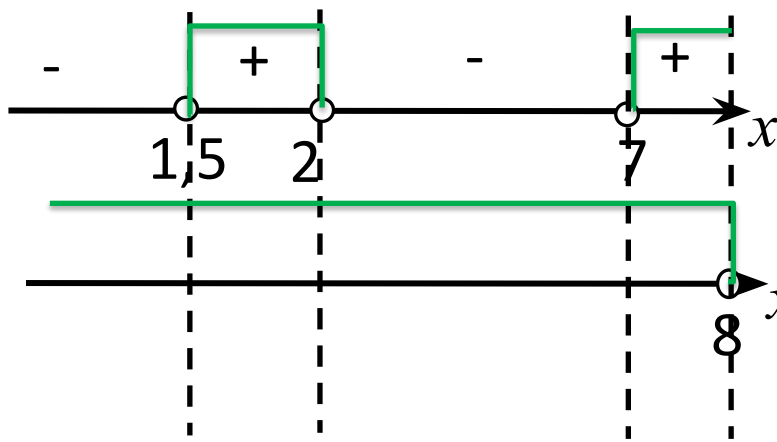
$$\begin{cases} 8-x-\dfrac{x+4}{2x-3} < 0, \\ x < 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(8-x)\cdot(2x-3)-x-4}{2x-3} < 0, \\ x < 8, \end{cases} \Leftrightarrow$$

Пример 1

Решить неравенство $\log_{0,6}(8-x) > \log_{0,6}\dfrac{x+4}{2x-3}$

$$\begin{cases} \dfrac{16x-24-2x^2+3x-x-4}{2x-3} < 0, \\ x < 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x^2+18x-28}{2x-3} < 0, \\ x < 8, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-9x+14}{x-1,5} > 0, \\ x < 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-7)}{x-1,5} > 0, \\ x < 8, \end{cases}$$



Ответ:

$x \in (1,5;\,2) \cup (7;\,8)$

Пример 2

Решить неравенство $0,5^{\log_3\left(x^2+6x-7\right)} \geq 0,25$

Решение:

$$\left(0,5\right)^{\log_3\left(x^2+6x-7\right)} \geq 0,25 \Leftrightarrow \left(0,5\right)^{\log_3\left(x^2+6x-7\right)} \geq 0,5^2 \Leftrightarrow$$

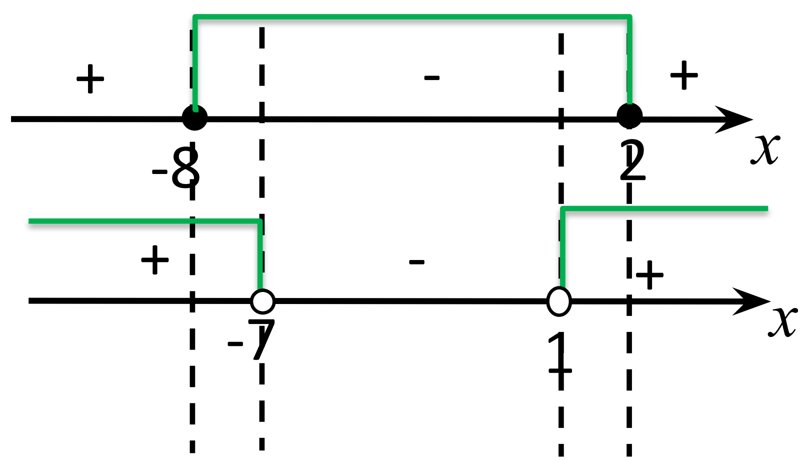
$$\log_3\left(x^2+6x-7\right) \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x-7 \leq 3^2, \\ x^2+6x-7 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+6x-16 \leq 0, \\ x^2+6x-7 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+8\right)\left(x-2\right) \leq 0, \\ \left(x+7\right)\left(x-1\right) > 0. \end{cases}$$

Пример 2

Решить неравенство $0,5^{\log_3\left(x^2+6x-7\right)} \geq 0,25$

$$\begin{cases} (x+8)(x-2) \leq 0, \\ (x+7)(x-1) > 0. \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-8; -7) \cup (1; 2]$

Неравенство вида

$$\log_{f(x)} g(x) \le h(x) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < g(x) \le f(x)^{h(x)}; \\ f(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge f(x)^{h(x)}; \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} ОДЗ; \\ \left(f(x)-1\right)\left(g(x)-f(x)^{h(x)}\right) \le 0 \end{cases}$$

Обобщим

Неравенство вида

$$\log_{f(x)} g(x) \vee h(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ОДЗ; \\ \left(f(x)-1\right)\left(g(x)-f(x)^{h(x)}\right) \vee 0 \end{cases}$$

Где $\vee$ - любой из знаков неравенства:

<; >; ≤; ≥.

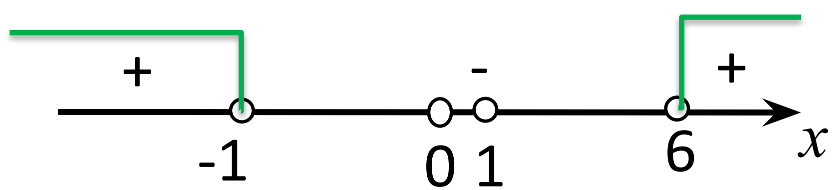
Пример 3

Решить неравенство $\log_{x^2}\left(x^2-5x-6\right)<1$

Решение:

Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-5x-6>0, \\ x^2>0, \\ x^2\neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x+1)>0, \\ x\neq 0, \\ x\neq \pm 1. \end{cases}$$



$x\in(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$

Пример 3

Решить неравенство $\log_{x^2}\left(x^2-5x-6\right)<1$

Теперь запишем систему вида

$$\begin{cases} ОДЗ; \\ \left(f(x)-1\right)\left(g(x)-f(x)^{h(x)}\right)\vee 0 \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(6;+\infty), \\ \left(x^2-1\right)\left(x^2-5x-6-\left(x^2\right)^1\right)<0. \end{cases}$$

Далее решим второе неравенство полученной системы:

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2-5x-6-\left(x^2\right)^1\right)<0$$

Пример 3

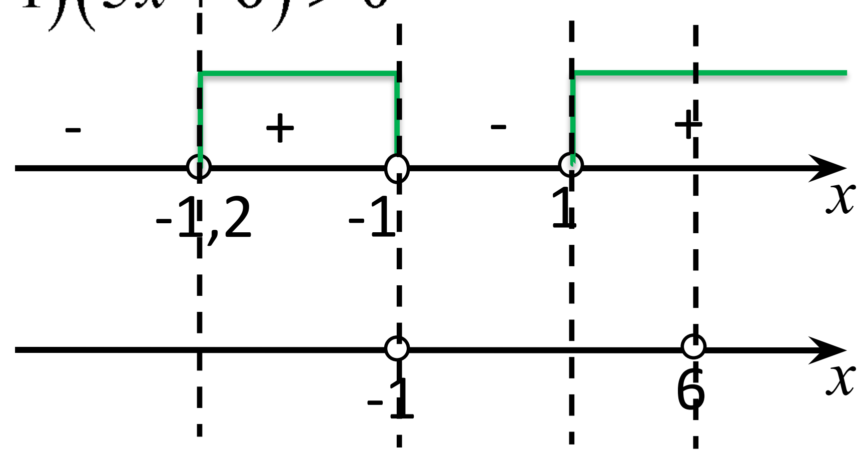
Решить неравенство $\log_{x^2}\left(x^2-5x-6\right)<1$

Итак,

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2-5x-6-\left(x^2\right)^1\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2-5x-6-x^2\right)<0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(-5x-6\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(5x+6\right)>0$$



Ответ: $x \in (-1{,}2; -1) \cup (6; +\infty)$

Обобщим

- Неравенство вида

$$\log_{f(x)} g(x) \vee \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ОДЗ; \\ \left(f(x)-1\right)\left(g(x)-h(x)\right) \vee 0 \end{cases}$$

Где $\vee$ - любой из знаков неравенства:

<; >; ≤; ≥.

Неравенство вида

$$\log_{f(x)} h(x) \vee \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ОДЗ; \\ \left(f(x)-1\right)\left(g(x)-1\right)\left(h(x)-1\right)\left(g(x)-f(x)\right) \vee 0 \end{cases}$$

Где $\vee$ - любой из знаков неравенства:

$<; >; \leq; \geq.$

Пример 4 **(ЦТ 2008 В9)**

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \le \log_{\frac{x}{3}-3} 121$$ на промежутке [0;21].

Решение:

Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-5>0, \\ \frac{x}{3}-3>0, \\ \frac{x}{3}-5\neq 1, \\ \frac{x}{3}-3\neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3}>5, \\ \frac{x}{3}>3, \\ \frac{x}{3}\neq 6, \\ \frac{x}{3}\neq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>15, \\ x>9, \\ x\neq 18, \\ x\neq 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>15, \\ x\neq 18. \end{cases}$$

$$x \in (15; 18) \cup (18; +\infty)$$

Пример 4 (ЦТ 2008 В9)

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \le \log_{\frac{x}{3}-3} 121$$ на промежутке [0;21].

Заметим, что $121=11^2$ и преобразуем неравенство

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \le \log_{\frac{x}{3}-3} 121 \Leftrightarrow \log_{\frac{x}{3}-5} 11 \le 2\log_{\frac{x}{3}-3} 11 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \le \log_{\frac{x}{3}-3} 11 \Leftrightarrow \log_{\left(\frac{x}{3}-5\right)^2} 11 \le \log_{\frac{x}{3}-3} 11.$$

Получили неравенство вида

$$\log_{f(x)} h(x) \le \log_{g(x)} h(x)$$, где $f(x) = \left(\frac{x}{3} - 5\right)^2$;

$$g(x) = \frac{x}{3} - 3;$$

$$h(x) = 11.$$

Пример 4 (ЦТ 2008 В9)

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \le \log_{\frac{x}{3}-3} 121$$ на промежутке [0;21].

Воспользуемся правилом

$$\log_{f(x)} h(x) \vee \log_{g(x)} h(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ОДЗ; \\ \left(f(x)-1\right)\left(g(x)-1\right)\left(h(x)-1\right)\left(g(x)-f(x)\right) \vee 0 \end{cases}$$

В нашем случае

$$\begin{cases} x \in (15;18) \cup (18;+\infty); \\ \left(\left(\frac{x}{3}-5\right)^2-1\right)\left(\left(\frac{x}{3}-3\right)-1\right)(11-1)\left(\left(\frac{x}{3}-3\right)-\left(\frac{x}{3}-5\right)^2\right) \le 0 \end{cases}$$

Пример 4 **(ЦТ 2008 В9)**

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \le \log_{\frac{x}{3}-3} 121$$ на промежутке [0;21].

Решим второе неравенство системы

$$\left(\left(\frac{x}{3}-5\right)^2-1\right)\left(\left(\frac{x}{3}-3\right)-1\right)(11-1)\left(\left(\frac{x}{3}-3\right)-\left(\frac{x}{3}-5\right)^2\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{3}-5-1\right)\left(\frac{x}{3}-5+1\right)\left(\frac{x}{3}-4\right)\left(\frac{x}{3}-3-\frac{x^2}{9}+\frac{10}{3}x-25\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{3}-6\right)\left(\frac{x}{3}-4\right)\left(\frac{x}{3}-4\right)\left(-\frac{x^2}{9}+\frac{11}{3}x-28\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-18)(x-12)^2\left(x^2-33x+28\cdot 9\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$

Пример 4 **(ЦТ 2008 В9)**

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \le \log_{\frac{x}{3}-3} 121$$ на промежутке [0;21].

Найдём дискриминант выражения $x^2 - 33x + 28 \cdot 9$:

$$D = 33^2 - 4 \cdot 28 \cdot 9 = 9 \cdot (11^2 - 4 \cdot 28) = 9 \cdot (121 - 112) =$$
$$= 9 \cdot 9$$

Тогда корни этого выражения

$$x = \frac{33 \pm 9}{2} = \left[\begin{array}{l} 21, \\ 12 \end{array}\right.$$

А значит неравенство примет вид

$$(x-18)(x-12)^2(x-21)(x-12) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-18)(x-12)^3(x-21) \ge 0$$

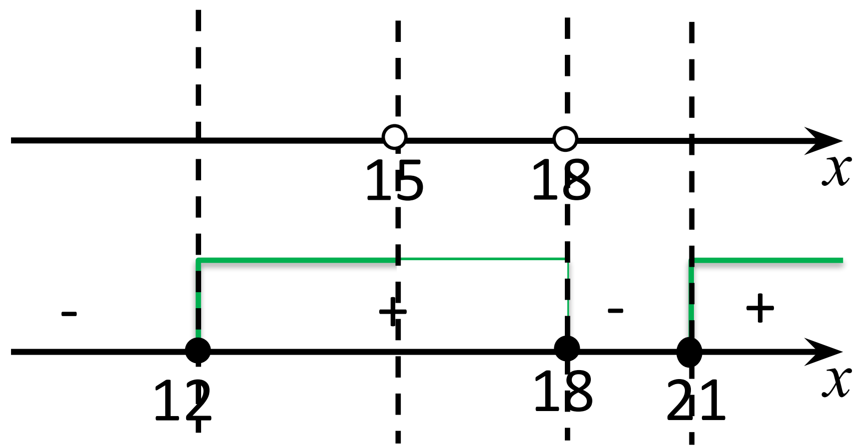
Пример 4 (ЦТ 2008 В9)

Найдите сумму целых решений неравенства

$$\log_{\frac{x}{3}-5} 11 \le \log_{\frac{x}{3}-3} 121$$ на промежутке [0;21].

В итоге получаем систему

$$\begin{cases} x \in (15;18) \cup (18;+\infty), \\ (x-18)(x-12)^3(x-21) \ge 0. \end{cases}$$



Ответ: $x \in (15;18) \cup [21;+\infty)$, целыми решениями на промежутке [0;21] являются числа 16; 17 и 21. Их сумма равна 54.

Для всех других неравенств перед их решением ОБЯЗАТЕЛЬНО нужно указать ОДЗ переменной:

- Основание логарифма больше 0 и не равно 1;
- Выражение, стоящее под логарифмом, больше 0.

Если необходимо логарифмировать обе части неравенства, то

- При логарифмировании по основанию, большему 1, знак неравенства сохраняется;
- При логарифмировании по основанию, меньшему 1, знак неравенства меняется.