

# Элементы теории пределов

Любое значение  $\epsilon$  найдёт точку  $a$ , отличающуюся от  $a$  на величину  $\epsilon$ .

Примеры пределов:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$ .

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182846...$  — это фундаментальная константа. Его часто называют «числом Эйлера» в честь швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1783), который внес огромный вклад в теорию пределов, теории функций и теории чисел.

$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = ?$

**СВОЙСТВА**

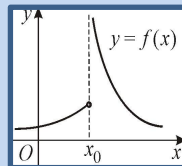
1. Если  $\lim_{x \rightarrow a} x = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (x + y) = A + B$ .

2. Если  $\lim_{x \rightarrow a} x = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (x - y) = A - B$ .

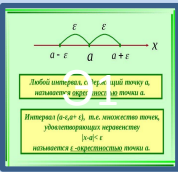
3. Если  $\lim_{x \rightarrow a} x = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (x \cdot y) = A \cdot B$ .

4. Если  $\lim_{x \rightarrow a} x = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{y} = \frac{A}{B}$ , если  $B \neq 0$ .

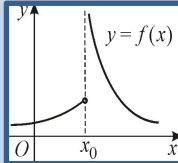
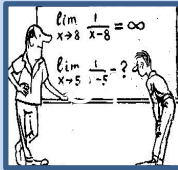
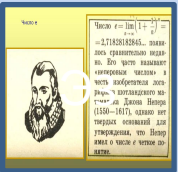
5. Если  $\lim_{x \rightarrow a} x = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot x) = k \cdot A$ .



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



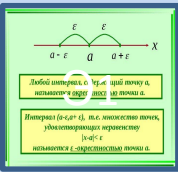
## Окрестность точки

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

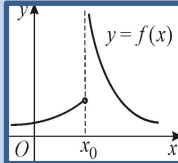
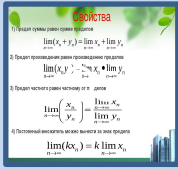
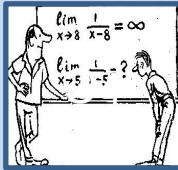
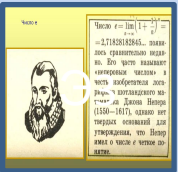
$U_\varepsilon(\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right)$	$x \in U_\varepsilon(\infty) \Leftrightarrow  x  > \frac{1}{\varepsilon}$
$U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right)$	$x \in U_\varepsilon(+\infty) \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$
$U_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$x \in U_\varepsilon(-\infty) \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon}$

$$x \in \tilde{U}_\varepsilon(a) \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \varepsilon$$

# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## 2. Предел числовой последовательности

**Задача 1.** Записать последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  в развернутом виде (списком элементов), изобразить на числовой прямой или на плоскости. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Описать предельное поведение последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  разными способами: Дать формальное и словесное описание предельного поведения последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  (формальное описание = на языке мат. символов, запись (1)).

1.  $\left\{ \frac{(-1)^n}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

4.  $\left\{ (-1)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$

7.  $\left\{ \frac{n}{n-1} \right\}_{n=2}^{\infty}$

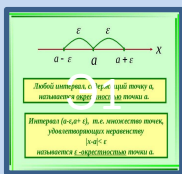
2.  $\left\{ (-3)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$

5.  $\left\{ \operatorname{arctg} n \right\}_{n=1}^{\infty}$

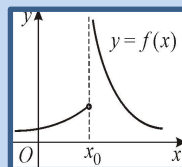
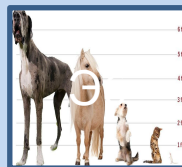
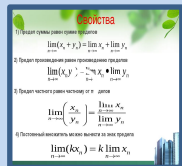
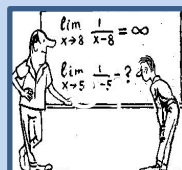
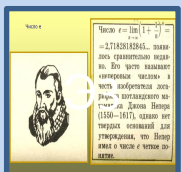
3.  $\left\{ \ln n \right\}_{n=1}^{\infty}$

6.  $\left\{ \frac{(-1)^n + 1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$

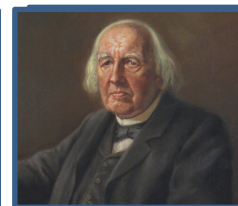


## Свойства числовых последовательностей

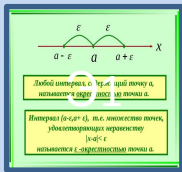
Определение

Лемма

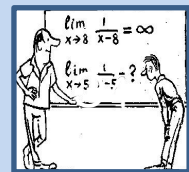
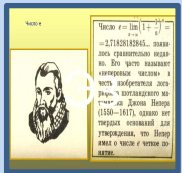
Теорема  
Вейерштрасса



# Элементы теории пределов

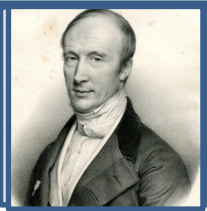


$$x_n = \frac{1}{n}$$



Определение  
(по Коши)

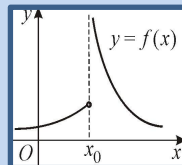
»



Иллюстрации  
и

Лемма 2.2.

(связь  
двустор. и  
одностор.  
пределов)



# Элементы теории пределов

## Локальные характеристики функций.

определение

Лемма 2.7  
(ограниченность и  
отделенность от нуля)

Задача

## Свойства пределов числовых последовательностей и функций

Лемма 3.1  
(свойства  
б.м. и б.б.)

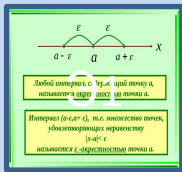
Лемма 3.2  
(свойства  
конечных  
пределов)

Задача

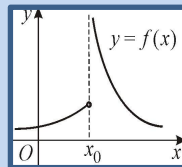
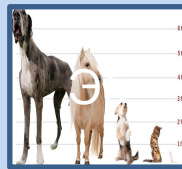
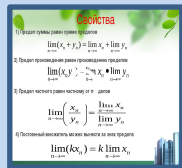
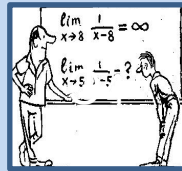
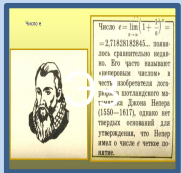
Неопределенности

Лемма 3.3  
(предельный  
переход в  
неравенствах)

Теорема  
(замечательные  
пределы)



$$x_n = \frac{1}{n}$$



# Элементы теории пределов

## Сравнение бесконечно малых (больших) величин

Для сравнения двух бесконечно малых (больших) функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x_0$  находят предел их отношения в этой точке.

Эквивалентные б.м. (б.б.)

Порядок (Степенная шкала)

Определение

Определение

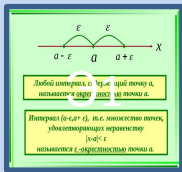
тема (сокращение дробей)

Таблица

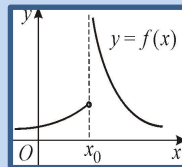
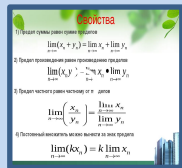
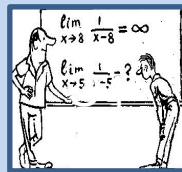
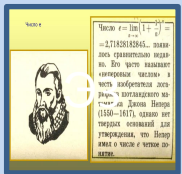
Лемма (отношение эквивалентности)

Задача

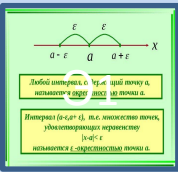
Задача



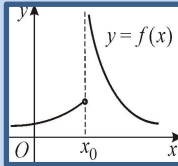
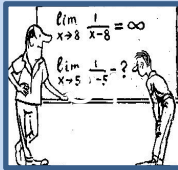
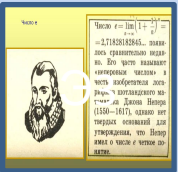
$$x_n = \frac{1}{n}$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Определение непрерывности. Классификация разрывов

Определение  
(непрерывность в  
точке)

Леммы  
5.2 и 5.3

Определ  
ение  
(Непрерывн  
ость на  
промежутке)

Леммы о  
непрерывно  
сти  
элементарн  
ых функций

Классиф  
икация  
разрывов

Задач  
а

## Свойства непрерывных функций на замкнутом промежутке

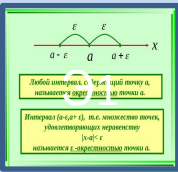
Теорема  
Больцано -  
Коши

Теорема  
Вейерштрас  
са

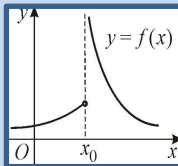
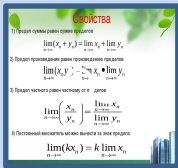
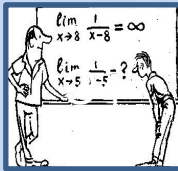
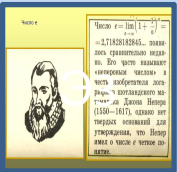
Теорема о  
непрерывнос  
ти обратной  
функции



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Определение 1.3 (характеристики числовых последовательностей)

[в квадратных скобках указаны подходящие примеры из задачи 1]

Числовая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

*возрастает* (строго), если  $x_n \leq x_{n+1}$  ( $x_n < x_{n+1}$ )  $\forall n$ ; [3,5]

*убывает* (строго), если  $x_n \geq x_{n+1}$  ( $x_n > x_{n+1}$ )  $\forall n$ ; [7]

*монотонная*, если она является либо возрастающей, либо убывающей; [3,5,7]

*ограниченная*, если  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \leq x_n \leq \beta \forall n$  или  $\exists c > 0 : |x_n| \leq c \forall n$ ; [1,4,5,6,7]

*сходится*, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ , т. е. существует конечный предел; [1,5,6,7]

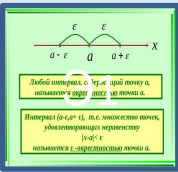
*расходится*, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не существует; [2,3,4]

*бесконечно малая*, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ; [1,6]

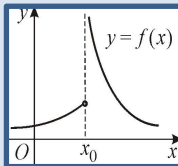
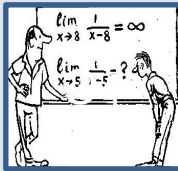
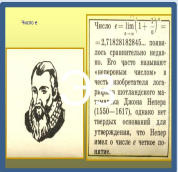
*бесконечно большая*, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . [2,3]



# Элементы теории пределов



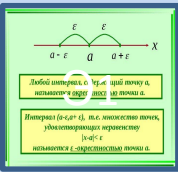
$$x_n = \frac{1}{n}$$



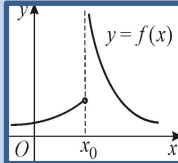
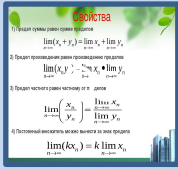
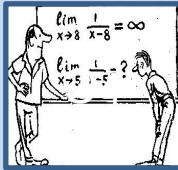
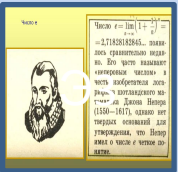
**Лемма 1.4 (об ограниченности сходящейся последовательности)**  
Если последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится, то она ограничена.



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$

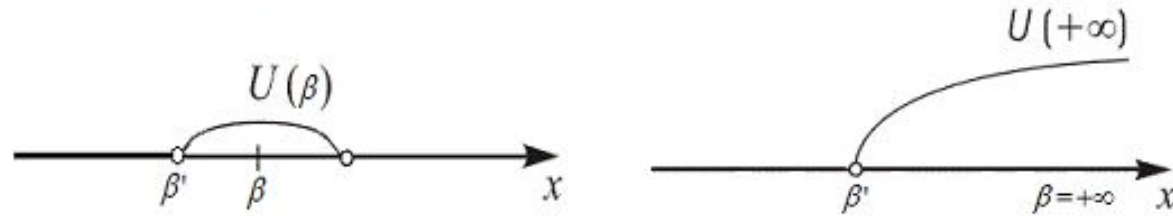


**Доказательство.**

▷ Проведем доказательство первой части теоремы.

Пусть последовательность возрастает и  $\beta = \sup \{x_n\}$ ,  $\beta \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Рассмотрим произвольную окрестность  $U(\beta)$  и обозначим символом  $\beta'$  её левый конец. На рисунках изображена окрестность точки  $\beta$  в конечном и в бесконечном случае.



Определение супремума можно записать в следующем виде:

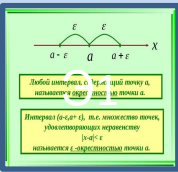
$$\sup \{x_n\} = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \leq \beta & \forall n \\ \forall \beta' < \beta \exists n_0 : x_{n_0} > \beta' \end{cases}$$

Так как последовательность возрастает, то  $x_n > \beta'$  при  $n \geq n_0$ , то есть  $x_n \in (\beta'; \beta] \subset U(\beta)$ , начиная с номера  $n_0$ . По определению предела это и означает, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \beta$ .

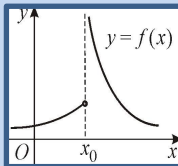
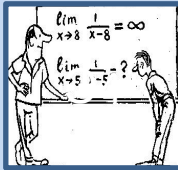
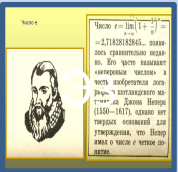
Вторая часть теоремы доказывается аналогичным образом. ◁



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс

(1815—1897)

— выдающийся немецкий математик, «отец современного математического анализа».

*Цитаты: Нельзя быть настоящим математиком, не будучи немного поэтом.*

В 1834 году окончил с отличием гимназию и по настоянию отца, поступил на юридический факультет Боннского университета. Прочувшись 4 года, в течение которых вместо юриспруденции Вейерштрасс усиленно занимался математикой, он бросил университет и поступил в университет Мюнстера

**1842:** по окончании Академии получает место учителя в провинциальной католической прогимназии, где проработал 14 лет. Навыки учителя в дальнейшем помогли Вейерштрассу стать лучшим преподавателем Германии, а редкое свободное время (чаще всего ночное) он использовал для математических исследований. **1856.** Берлинскому университету он отдал 40 лет жизни.

С конца 1850-х годов международная известность Вейерштрасса быстро растёт. Этим он обязан великолепному качеству своих лекций.

Здоровье Вейерштрасса оставляет желать лучшего — сказывается постоянное переутомление в молодые годы. В **1861** году во время выступления у него начался сильный приступ головокружения — пришлось прервать лекцию. Больше Вейерштрасс никогда не читал лекции стоя — он неизменно сидел, а один из лучших студентов писал за него на доске.

**1870:** знакомится с двадцатилетней Софьей Ковалевской, приехавшей в Берлин для подготовки диссертации. Нежное чувство к своей Sonja Вейерштрасс пронёс сквозь всю жизнь (он так и не женился). Вейерштрасс помогает Ковалевской выбрать тему диссертации и метод подхода к решению, в дальнейшем регулярно консультирует. После защиты диссертации Ковалевская уехала, на письма учителя отвечала редко и неохотно.

**1883:** после самоубийства мужа Ковалевская, оставшаяся без средств с пятилетней дочерью, приезжает в Берлин и останавливается у Вейерштрасса. Ценой огромных усилий, используя весь свой авторитет и связи, Вейерштрассу удаётся выхлопотать ей место профессора в Стокгольмском университете.

**1889:** Вейерштрасс сильно заболел. **1891:** неожиданно умирает Софья Ковалевская.

**1897:** после продолжительной болезни Вейерштрасс скончался от осложнений после гриппа.

В его честь был назван кратер Вейерштрасс на Луне. Имя Вейерштрасса носит математический институт в Берлине (WIAS).

# Элементы теории пределов

Любое число  $\epsilon > 0$  найдут такое  $\delta$ , что если  $x$  принадлежит интервалу  $(a - \delta, a + \delta)$ , то  $f(x)$  принадлежит интервалу  $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ .

Пример:  $f(x) = x^2$ . Пусть  $L = 4$ . Тогда  $f(x) = 4$  при  $x = 2$ . Если  $\epsilon = 1$ , то  $L - \epsilon = 3$  и  $L + \epsilon = 5$ . Тогда  $f(x) \in (3, 5)$  при  $x \in (1, 3)$ .

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459045...$  — это фундаментальная константа. Его часто называют «числом Эйлера» в честь швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1809), который внес огромный вклад в математику, в том числе в теорию пределов.

$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = ?$

**Свойства**

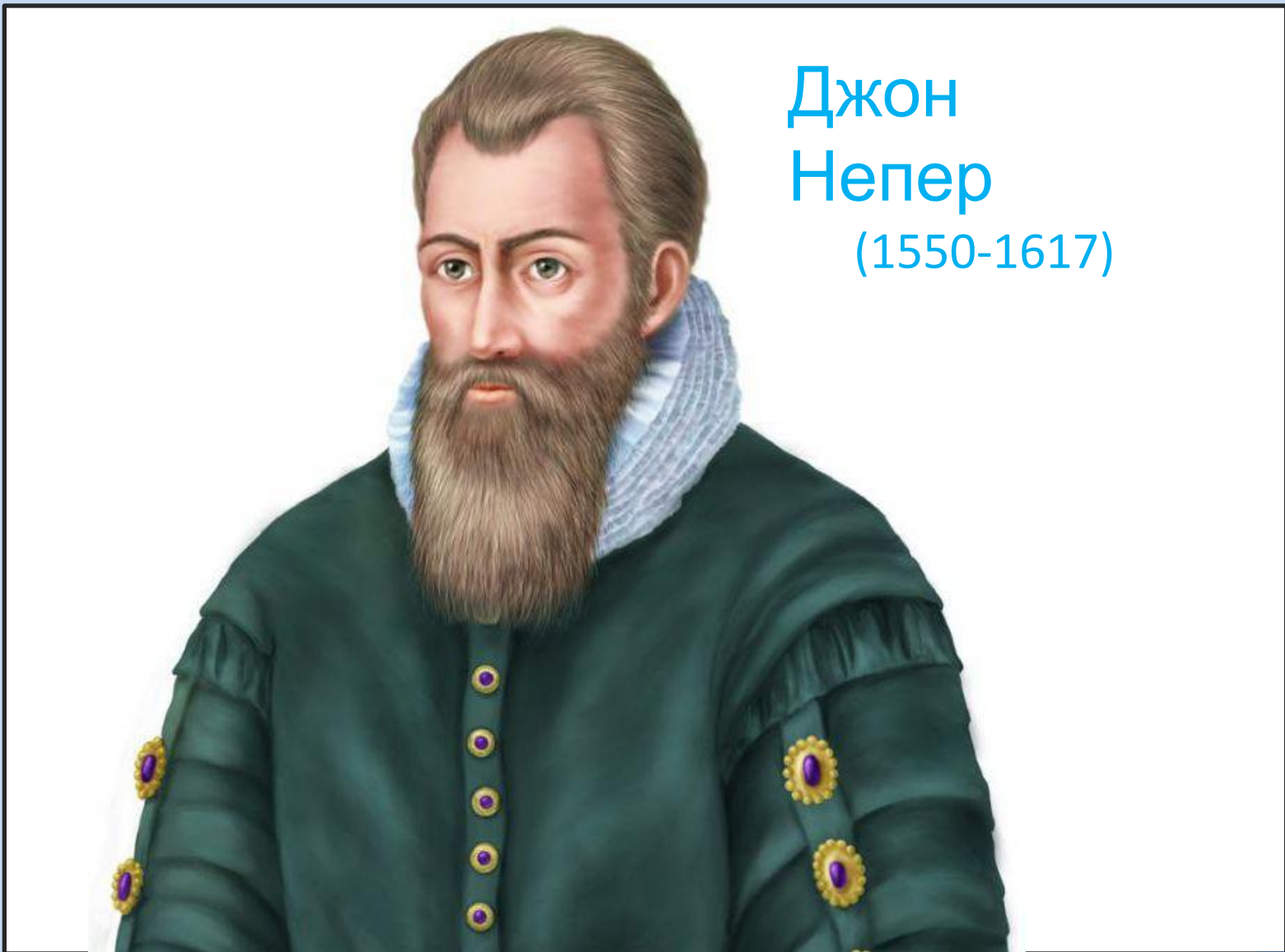
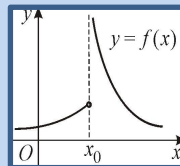
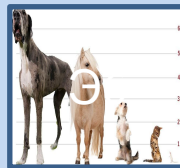
1. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$ .

2. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$ .

3. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$ .

4. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$  при  $M \neq 0$ .

5. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$ .



Джон Непер  
(1550-1617)



# Элементы теории пределов

Любое число  $\epsilon > 0$  найдут такое  $\delta$ , что для любого  $x$  принадлежащего интервалу  $(a-\delta, a+\delta)$  выполняется неравенство  $|x-a| < \epsilon$ .

Пример:  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$ . Известно, что  $|x^2 - 4| = |x-2| \cdot |x+2|$ . Если  $|x-2| < \delta$  и  $|x+2| < M$ , то  $|x^2 - 4| < \delta \cdot M$ . Выбираем  $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ .

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459045...$  является фундаментальной константой. Его часто называют «числом Эйлера» в честь швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1783), который внес огромный вклад в математику, физику и астрономию.

$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = ?$

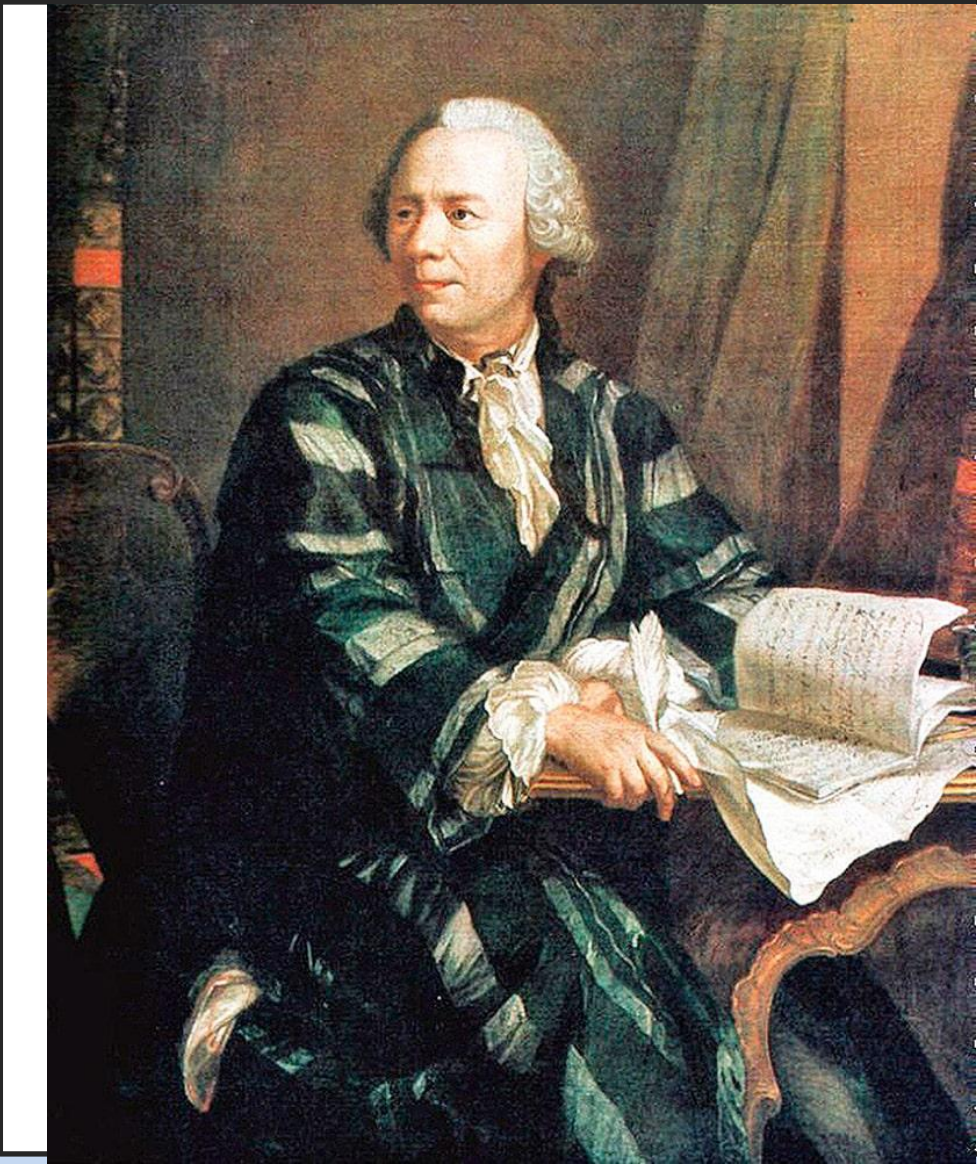
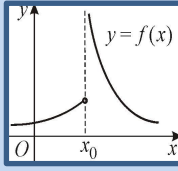
**Свойства**

1. Если  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (x + y) = a + b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (x - y) = a - b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} (kx) = k \lim_{x \rightarrow a} x$ .

2. Если  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (xy) = a \cdot b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a}{b}$  при  $b \neq 0$ .

3. Если  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (x^k) = a^k$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a}$ .

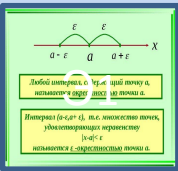
4. Если  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} y = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (kx) = k \lim_{x \rightarrow a} x$ .



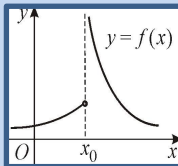
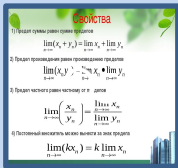
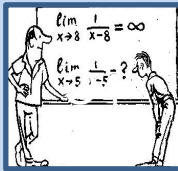
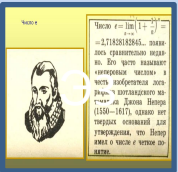
Леонард Эйлер  
(1797-1783)



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## История числа e

Число появилось сравнительно недавно. Его иногда называют "неперовым числом" в честь изобретателя логарифмов шотландского математика Джона Непера (1550-1617), однако необоснованно, так как нет твёрдых оснований для утверждения, что Непер имел о числе  $e$  чёткое представление".

Впервые обозначение " $e$ " ввёл Леонард Эйлер (1707-1783). Он также вычислил точные 23 десятичных знака этого числа

### Способы определения

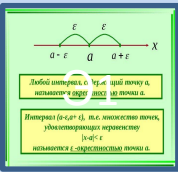
- Через предел (второй замечательный предел): 
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
- Как сумма ряда: 
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{или} \quad \frac{1}{e} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$
- Как единственное число  $a$ , для которого выполняется 
$$\int_1^a \frac{dt}{t} = 1.$$
- Как единственное положительное число  $a$ , для которого верно 
$$\frac{d}{dt} a^t = a^t.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Впервые константа негласно присутствует в приложении к переводу на английский язык вышеупомянутой работы Непера, опубликованному в 1618 году. Саму же константу впервые вычислил швейцарский математик Бернулли при анализе следующего предела:

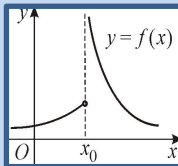
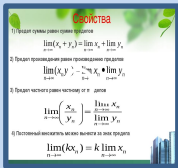
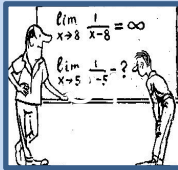
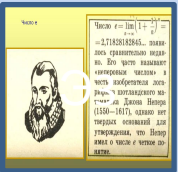
Букву  $e$  начал использовать Эйлер в 1727 году. Соответственно,  $e$  обычно называют *числом Эйлера*. Почему была выбрана именно буква  $e$ , точно неизвестно. Возможно, это связано с тем, что с неё начинается слово *exponential* ("показательный", "экспоненциальный"). Другое предположение заключается в том, что буквы  $a, b, c$  и  $d$  уже довольно широко использовались в иных целях, и  $e$  была первой "свободной" буквой. Неправдоподобно предположение, что Эйлер выбрал  $e$  как первую букву в своей фамилии (нем. *Euler*).



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



Пример применения теоремы 1.5 – определение числа  $e$ .

Рассмотрим последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  такого вида:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

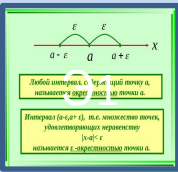
Выпишем несколько первых членов последовательности:

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \approx 2,25, \quad x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,37, \\ x_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \approx 2,44, \quad x_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125} \approx 2,49, \quad x_6 = \left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 = \frac{117649}{46656} \approx 2,52 \dots$$

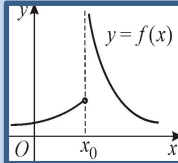
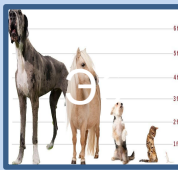
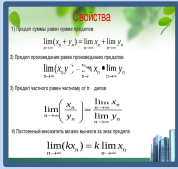
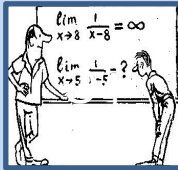
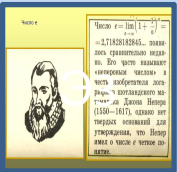




# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



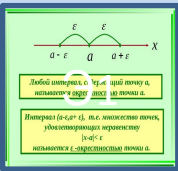
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{k! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k)} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k! \cdot n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$



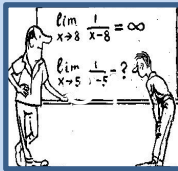
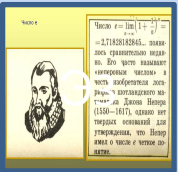
# Элементы теории пределов



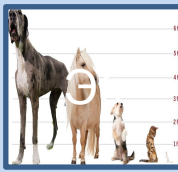
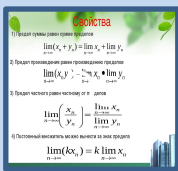
$$x_n = \frac{1}{n}$$

Оценим сверху значения  $x_n$ :

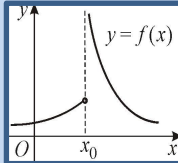
$$x_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} <$$



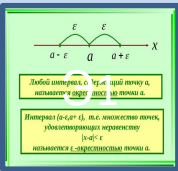
$$< 1 + \underbrace{\left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right)}_{\text{геометрическая прогрессия}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) < 1 + 2 = 3.$$



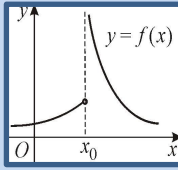
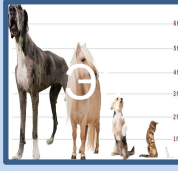
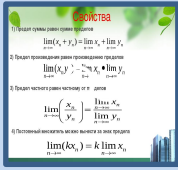
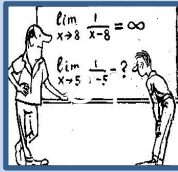
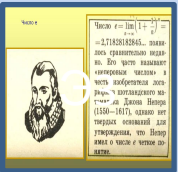
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$

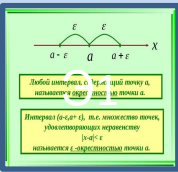


## 3. Предел числовой функции

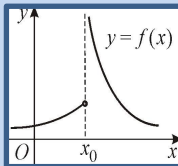
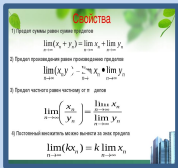
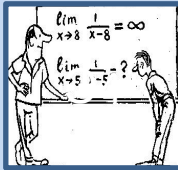
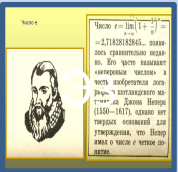
Обозначается	Читается
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$	предел $f(x)$ в точке $x_0$ (при стремлении $x$ к $x_0$ ) равен $a$
$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$	$f(x)$ стремится к $a$ , когда $x$ стремится к $x_0$
$f(x) \rightarrow a$ при $x \rightarrow x_0$	



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## 3. Предел числовой функции

I. В зависимости от значения предела:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$  – конечный предел;

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, +\infty, -\infty$  – бесконечный предел;

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  не существует.

II. В зависимости от точки  $x_0$ :

$x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  – двусторонний предел в точке  $x_0$ ;

$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$  – односторонний (правосторонний) предел в точке  $x_0$  ( $x \rightarrow x_0$  и  $x > x_0$ );

$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  – левосторонний предел в точке  $x_0$  ( $x \rightarrow x_0$  и  $x < x_0$ );

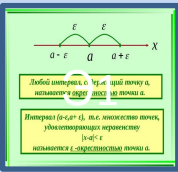
$x_0 = \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  – двусторонний предел в бесконечно удаленной точке;

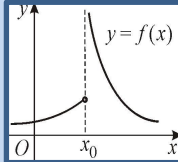
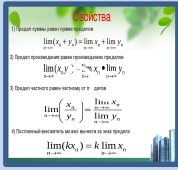
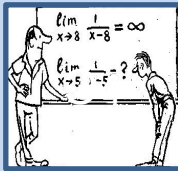
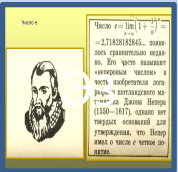
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  – односторонние пределы в бесконечно удаленной точке.



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## 3. Предел числовой функции

### Определение 2.1 (двусторонний предел)

Пусть  $x_0, a \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , включающем некоторую проколотую окрестность точки  $x_0$  (т. е. в самой точке  $x_0$  функция может быть не определена).

Значение  $a$  называется *пределом* функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любой окрестности  $U(a)$  существует проколотая окрестность  $\overset{\circ}{U}(x_0)$ , образ которой принадлежит  $U(a)$ .

На формальном языке математических символов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

### Определение 2.1' (односторонние пределы)

Пусть  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Формальные записи определений *правостороннего* и *левостороннего* пределов в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  и в бесконечно удаленной точке выглядят следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in U_\delta(x_0), x > x_0 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a);$$

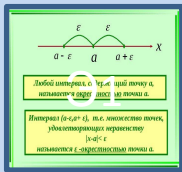
$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in U_\delta(x_0), x < x_0 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in U_\delta(+\infty) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a);$$

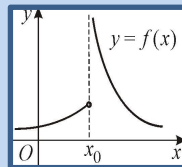
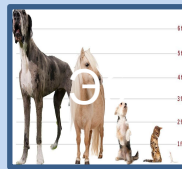
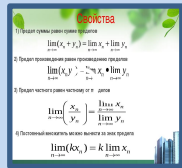
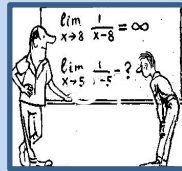
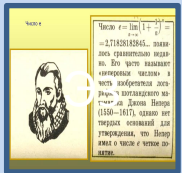
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in U_\delta(-\infty) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a).$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Огюстен Луи Коши

(21.08.1789- 23.05.1857)

— французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Родился в семье чиновника, глубоко верующего монархиста. По окончании школы стал инженером путей сообщения в Шербуре. Здесь он начал самостоятельные математические исследования.

В 1811—1812 годах Коши представил Парижской академии несколько работ.

1818: женился на Алоизе де Бюр. У них родились две дочери.

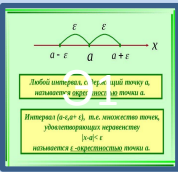
Коши написал свыше 800 работ, полное собрание его сочинений содержит 27 томов. Его работы относятся к различным областям математики (преимущественно к математическому анализу) и математической физики.

Коши впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда и т. д. Ему также принадлежат исследования по геометрии (о многогранниках), по теории чисел, алгебре и другим областям математики.

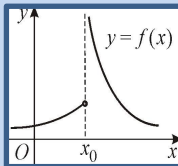
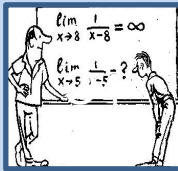
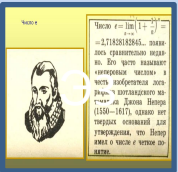
В 1935 году Международный астрономический союз присвоил имя О. Л. Коши кратеру на видимой стороне Луны.



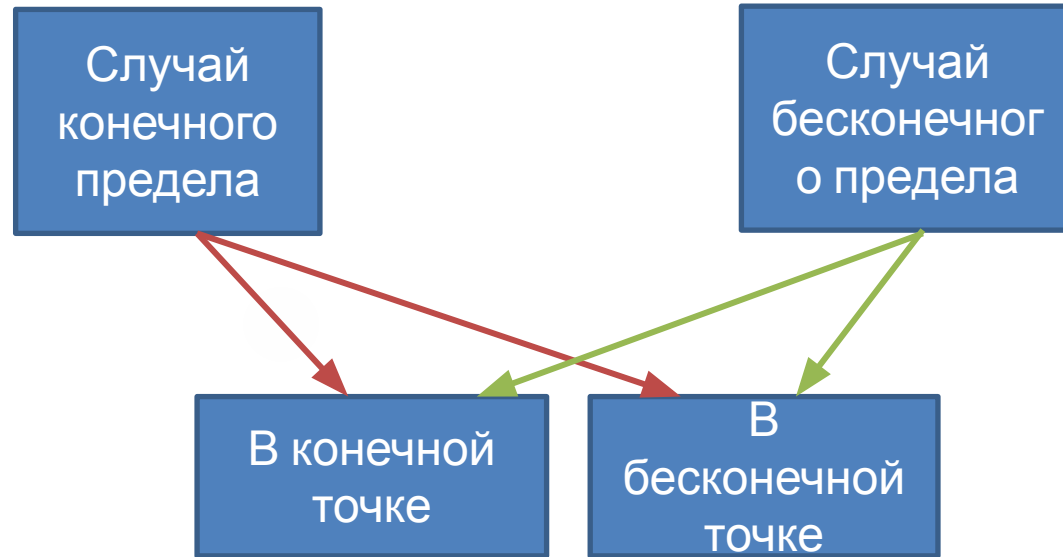
# Элементы теории пределов



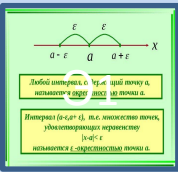
$$x_n = \frac{1}{n}$$



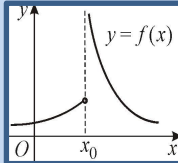
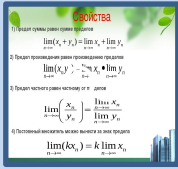
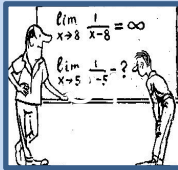
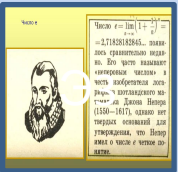
## 3. Предел числовой функции



# Элементы теории пределов

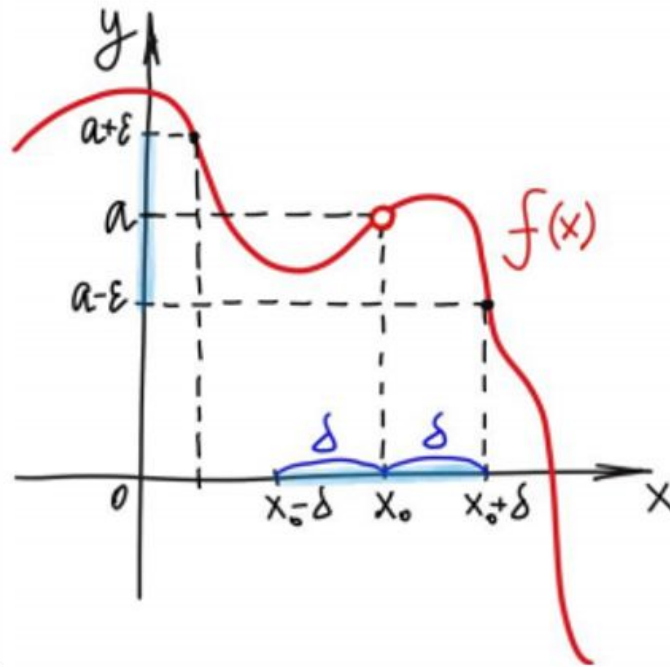


$$x_n = \frac{1}{n}$$



1. Случаи конечного предела в конечной точке:  $x_0, a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

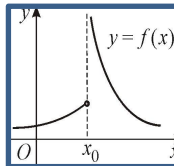
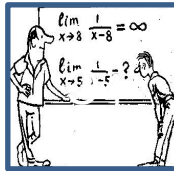
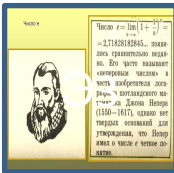
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$





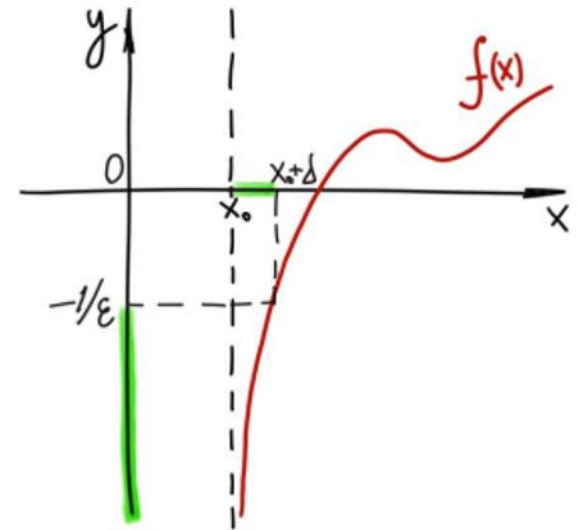
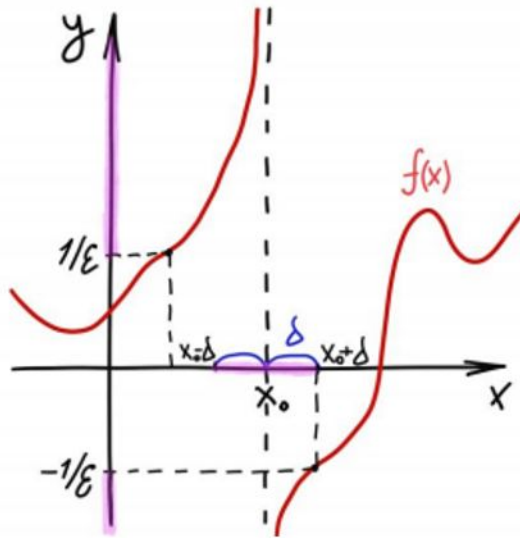
# Элементы теории пределов

$$x_n = \frac{1}{n}$$



## 2. Случай бесконечного предела в конечной точке: $x_0 \in \mathbb{R}$

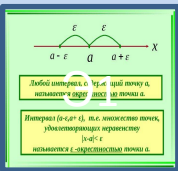
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$$



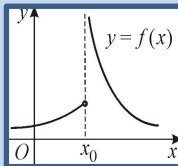
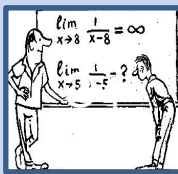
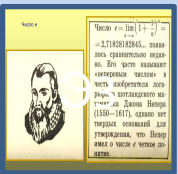
$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$



# Элементы теории пределов

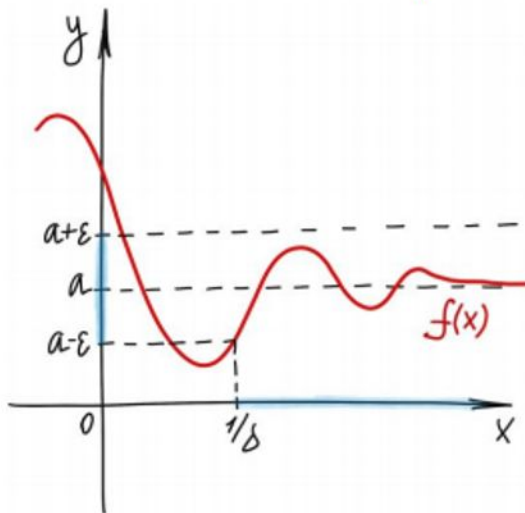


$$x_n = \frac{1}{n}$$

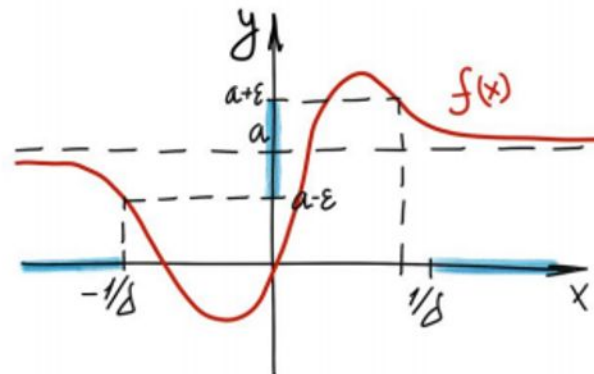


## 3. Случай конечного предела в бесконечно удаленной точке: $a \in \mathbb{R}$

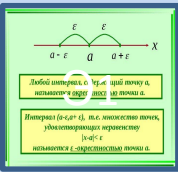
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$



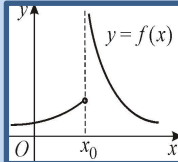
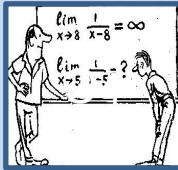
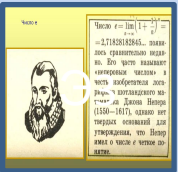
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$



# Элементы теории пределов

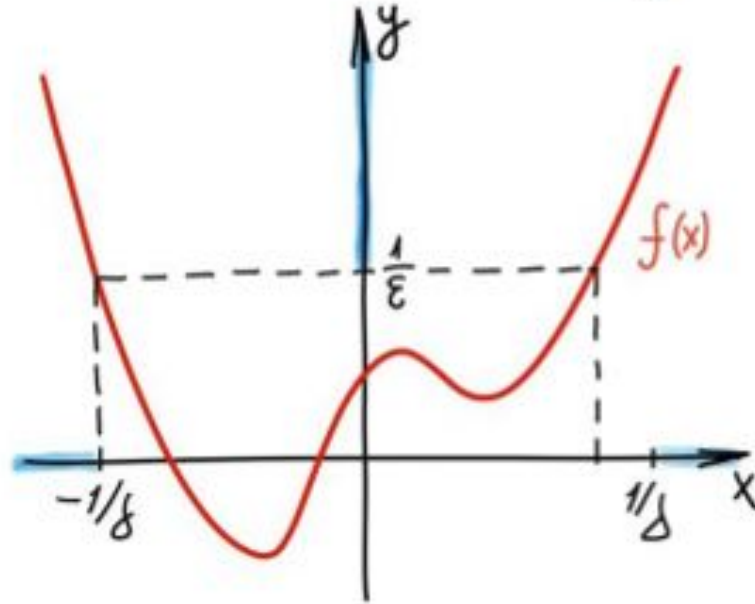


$$x_n = \frac{1}{n}$$



4. Случай бесконечного предела в бесконечно удаленной точке:

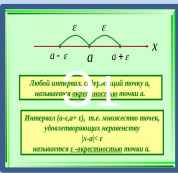
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$



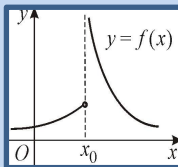
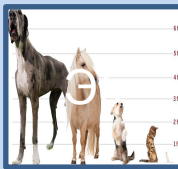
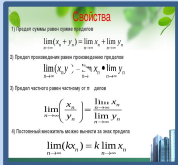
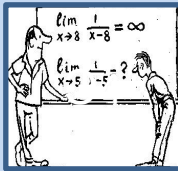
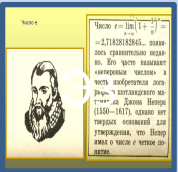
**Упражнение.** Расшифровать и проиллюстрировать формальные записи предела в оставшихся ситуациях:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  и т.д..



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Лемма 2.2 (связь двустороннего и односторонних пределов)

Пусть  $x_0, a \in \mathbb{R}$ . Двусторонний предел функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  существует и равен  $a$  тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела и оба равны  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a.$$

### Доказательство.

▷ Докажем эту лемму для случая  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Напомним определения двустороннего и односторонних пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a). \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0: x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0), x > x_0 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a); \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0: x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0), x < x_0 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a). \quad (4)$$

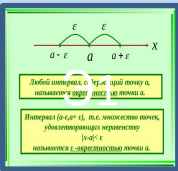
Если выполнено (2), то (3) и (4) также верны, так как в них можно взять  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ .

Если выполнены (3) и (4), то (2) также верно, так как в нем можно взять  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ .

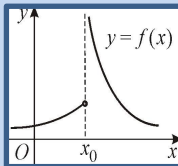
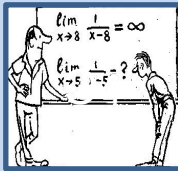
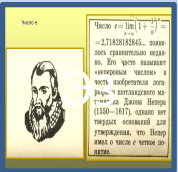
Случай  $x_0 = \infty$  обрабатывается аналогичным образом.



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$

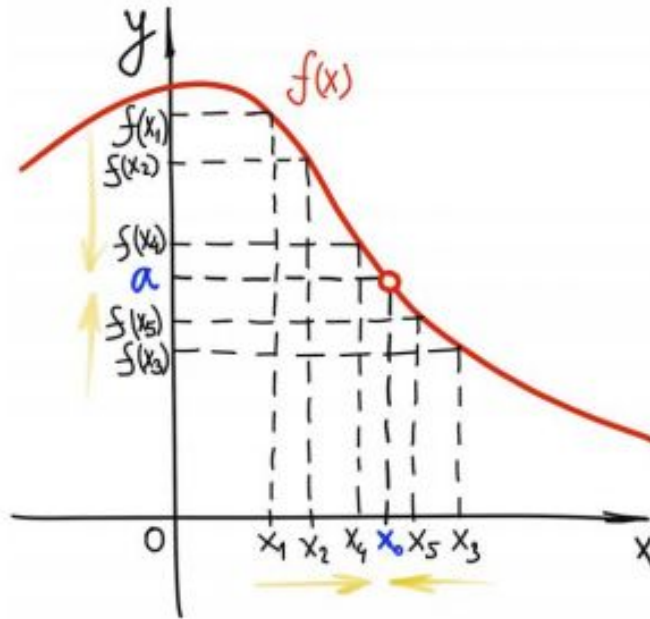


## Определение 2.3 (двусторонний предел)

Пусть  $x_0, a \in \mathbb{R}$ .

Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , включающем некоторую проколотую окрестность точки  $x_0$ . Тогда

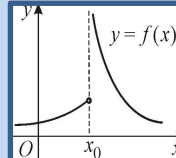
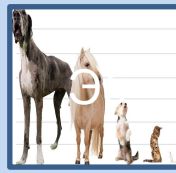
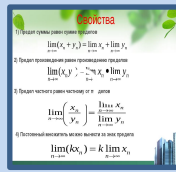
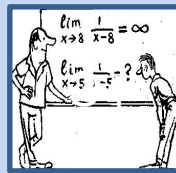
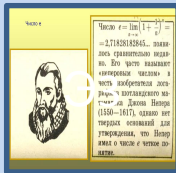
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \quad x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow a.$$



# Элементы теории пределов

## Биография

$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Генрих Эдуард Гейне

(1921-1881)

-немецкий математик, профессор. Ученик Дирихле.

Изучал математику в Гёттингенском университете, Берлинском университете и в Альбертине в Кёнигсберге.

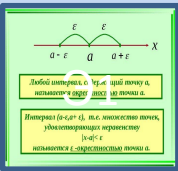
Был профессором математики в Бонне и в Галле.

Работая в Галле, он занимался преимущественно теорией потенциала, теорией функций и дифференциальными уравнениями

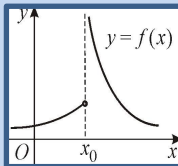
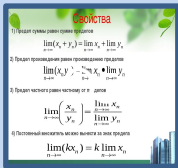
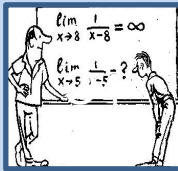
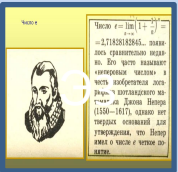
Его именем названы теорема Кантора — Гейне, теорема Гейне — Бореля, определение предела функции по Гейне.



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Теорема 2.4

Определения предела функции 2.1 (по Коши) и 2.3 (по Гейне) равносильны.

### Доказательство.

Есть два подхода к доказательству утверждений типа  $A \Leftrightarrow B$ : доказать импликации  $A \Rightarrow B$  и  $B \Rightarrow A$  либо доказать импликации  $A \Rightarrow B$  и  $\neg A \Rightarrow \neg B$ . Будем использовать второй подход.



1. Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  (по Коши). Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a). \quad (5)$$

Докажем, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  (по Гейне). Рассмотрим произвольную последовательность

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ , такую что  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$ , и покажем, что (5) гарантирует  $f(x_n) \rightarrow a$ .

Напомним, что согласно определению 1.1 предела последовательности

$$f(x_n) \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(a). \quad (6)$$

Зафиксируем произвольное значение  $\varepsilon > 0$  и соответствующее ему значение  $\delta > 0$  из (5).

Из определения 1.1 и (5) вытекает следующее:

$$x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0 \Rightarrow \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \stackrel{(5)}{\Rightarrow} f(x_n) \in U_\varepsilon(a).$$

Ввиду произвольности выбора  $\varepsilon > 0$  получаем (6).



# Элементы теории пределов

II. Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq a$  (по Коши). Это значит, что

$$\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0 \exists x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0): f(x) \notin U_\varepsilon(a). \quad (7)$$

Докажем, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq a$  (по Гейне). Это значит, что

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X: x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0 \text{ и } f(x_n) \not\rightarrow a. \quad (8)$$

Возьмем значение  $\varepsilon$ , наличие которого гарантирует (7), и рассмотрим для него разные значения  $\delta$ :

$$\delta = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in \overset{\circ}{U}_1(x_0): f(x_1) \notin U_\varepsilon(a);$$

$$\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x_2 \in \overset{\circ}{U}_{1/2}(x_0): f(x_2) \notin U_\varepsilon(a);$$

$$\delta = \frac{1}{3} \Rightarrow \exists x_3 \in \overset{\circ}{U}_{1/3}(x_0): f(x_3) \notin U_\varepsilon(a);$$

...

$$\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x_n \in \overset{\circ}{U}_{1/n}(x_0): f(x_n) \notin U_\varepsilon(a).$$

Таким образом, на основе (7) построена последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , такая что  $x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$  и  $f(x_n) \not\rightarrow a$  (рис. 2.8, 2.9).

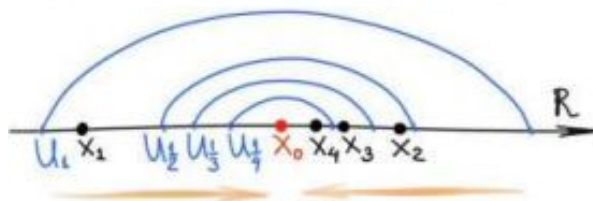


Рис. 2.8

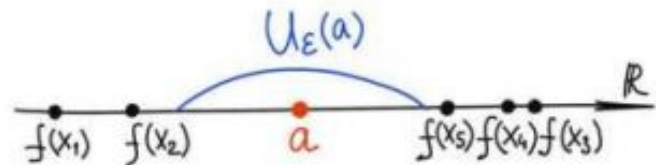
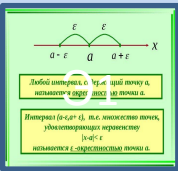
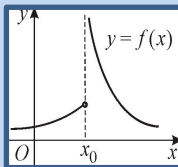
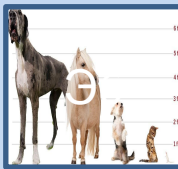
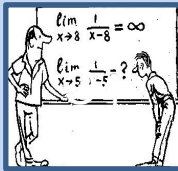
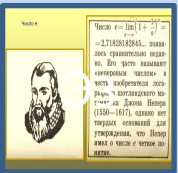


Рис. 2.9

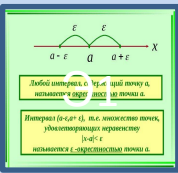


$$x_n = \frac{1}{n}$$

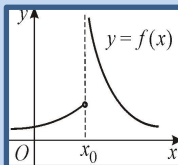
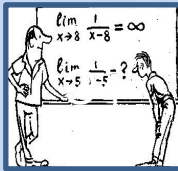
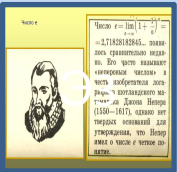




# Элементы теории пределов



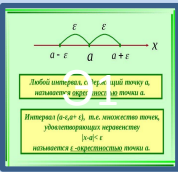
$$x_n = \frac{1}{n}$$



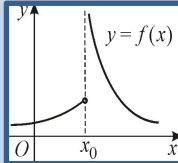
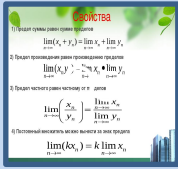
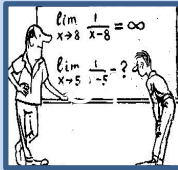
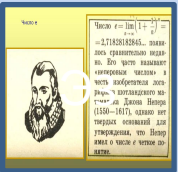
**Следствие 2.5 (единственность предела функции)**  
Если предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  существует, то он единственный.



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Определение 2.6 (локальные характеристики функции)

Пусть  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ . Функция  $f(x)$ , называется

*бесконечно малой в точке  $x_0$* , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ;

*бесконечно большой в точке  $x_0$* , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ;

*ограниченной (локально ограниченной) в точке  $x_0$* , если она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ :

$$\exists \dot{U}(x_0) \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \leq f(x) \leq \beta \quad \forall x \in \dot{U}(x_0)$$

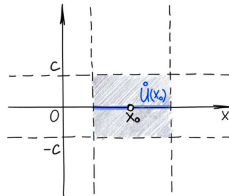
или

$$\exists \dot{U}(x_0) \exists c > 0 : |f(x)| \leq c \quad \forall x \in \dot{U}(x_0); \tag{A}$$

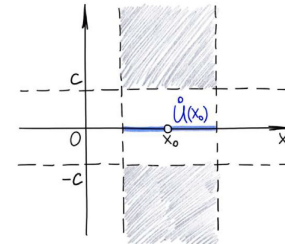
*отделенной от нуля в точке  $x_0$* , если она отделена от нуля в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ :

$$\exists \dot{U}(x_0) \exists c > 0 : |f(x)| \geq c \quad \forall x \in \dot{U}(x_0). \tag{B}$$

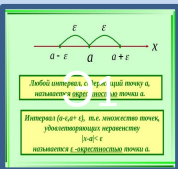
A



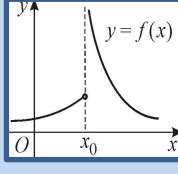
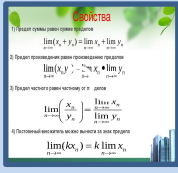
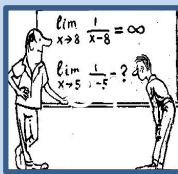
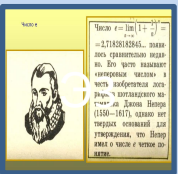
B



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



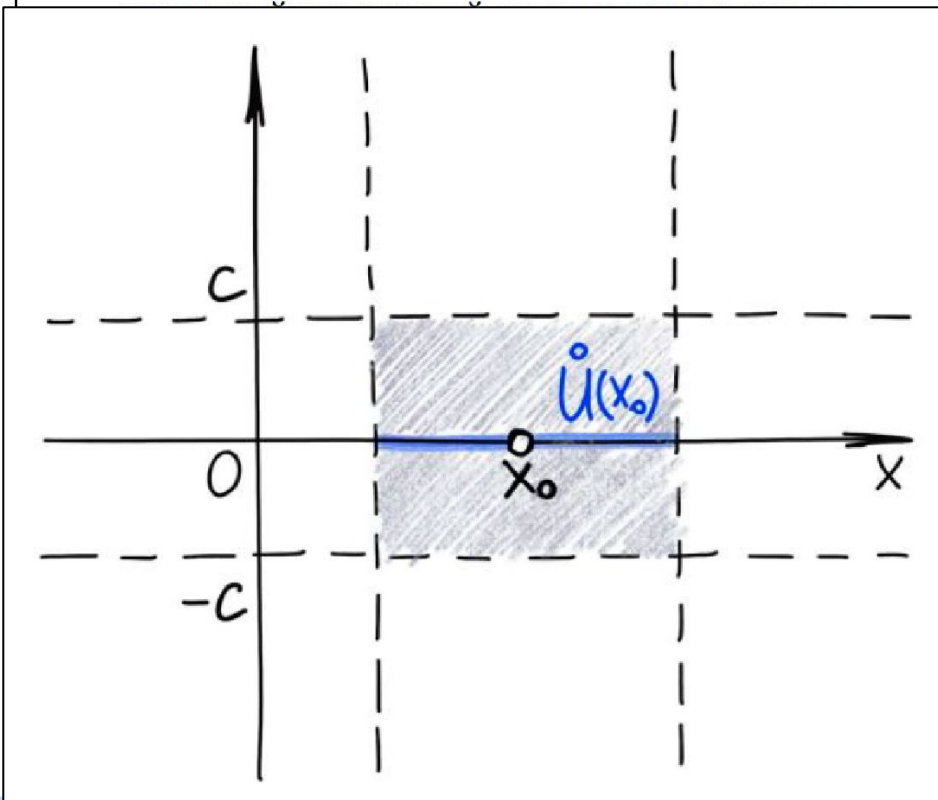
## Определение 2.6 (локальные характеристики функции)

Пусть  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ . Функция  $f(x)$ , называется

*бесконечно малой в точке  $x_0$* , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ;

*бесконечно большой в точке  $x_0$* , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ;

*ограниченной (локально ограниченной) в точке  $x_0$* , если она ограничена в

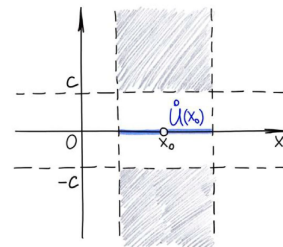


$$\leq \beta \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$$

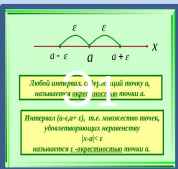
$$\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0); \tag{A}$$

от нуля в некоторой проколотой

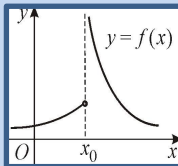
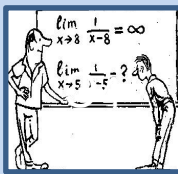
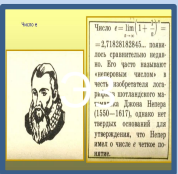
$$\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0). \tag{B}$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Определение 2.6 (локальные характеристики функции)

Пусть  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ . Функция  $f(x)$ , называется

бесконечно малой в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ;

бесконечно большой в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ;

ограниченной (локально ограниченной) в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  :

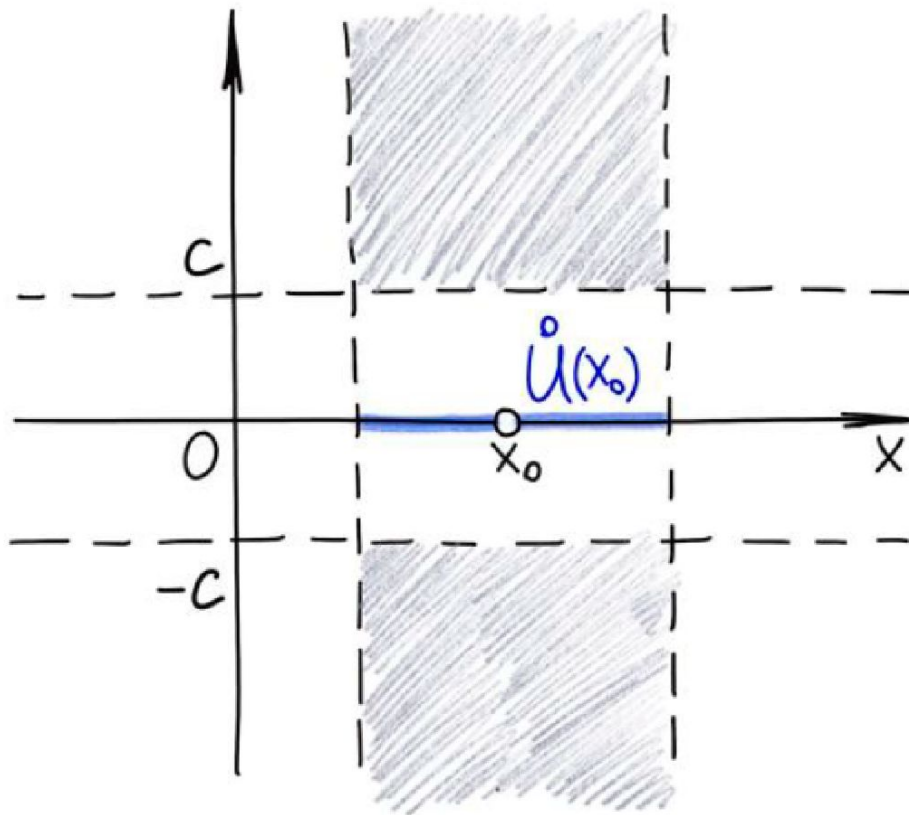
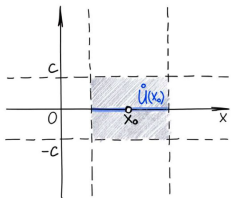
$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0)$$

$$\exists \overset{\circ}{U}(c)$$

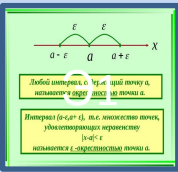
отделенной от нуля в точке  $x_0$  :

$$\exists \overset{\circ}{U}(0)$$

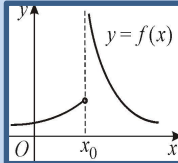
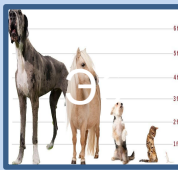
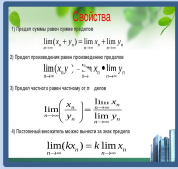
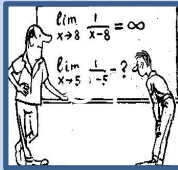
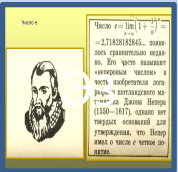
A



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Лемма 2.7

Пусть  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  и функция  $f(x)$  имеет предел в точке  $x_0$ . Тогда верно следующее:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \infty \Rightarrow f(x) \text{ ограничена в точке } x_0;$$

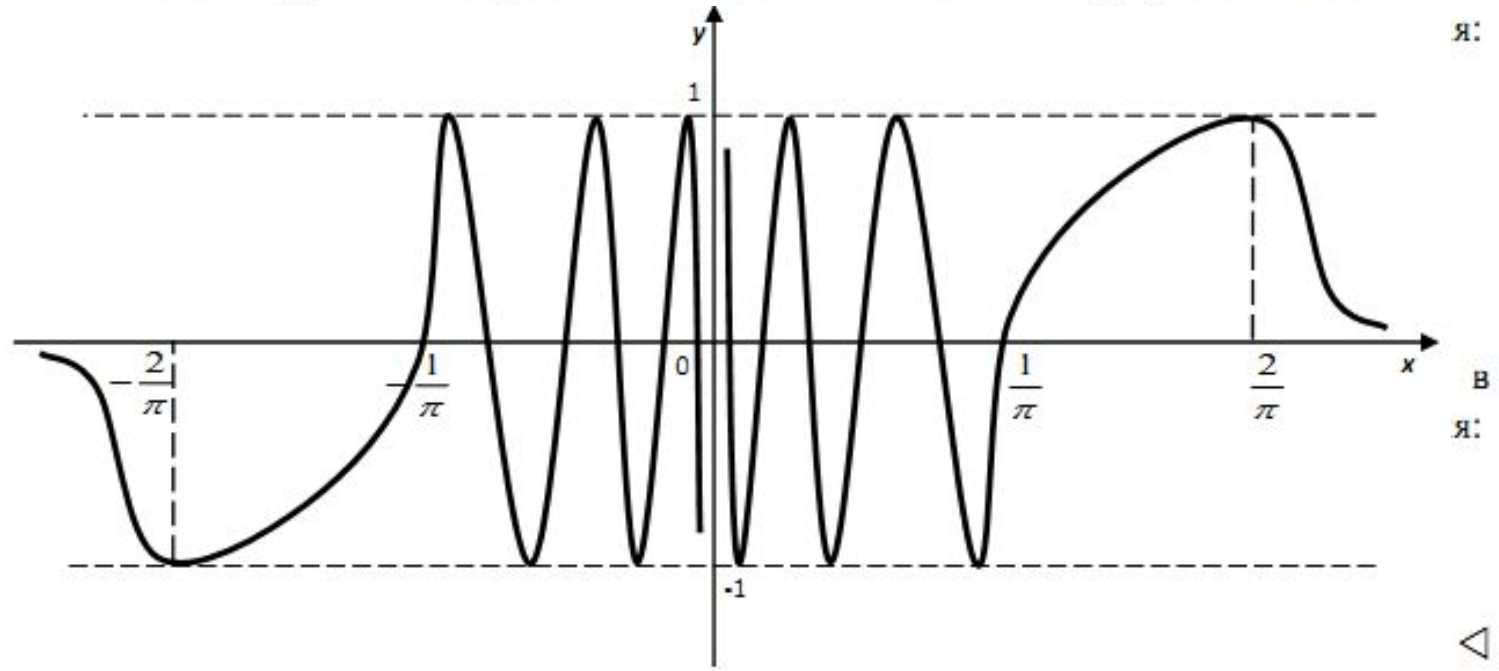
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \text{ отделена от нуля в точке } x_0.$$

### Доказательство 1

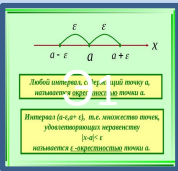
### Доказательство 2

### Замечание

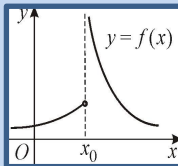
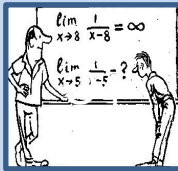
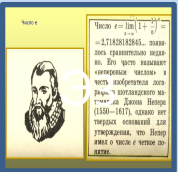
Пусть  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . Выберем любое значение  $0 < \varepsilon < |a|$ . Тогда из (9) следует, что в



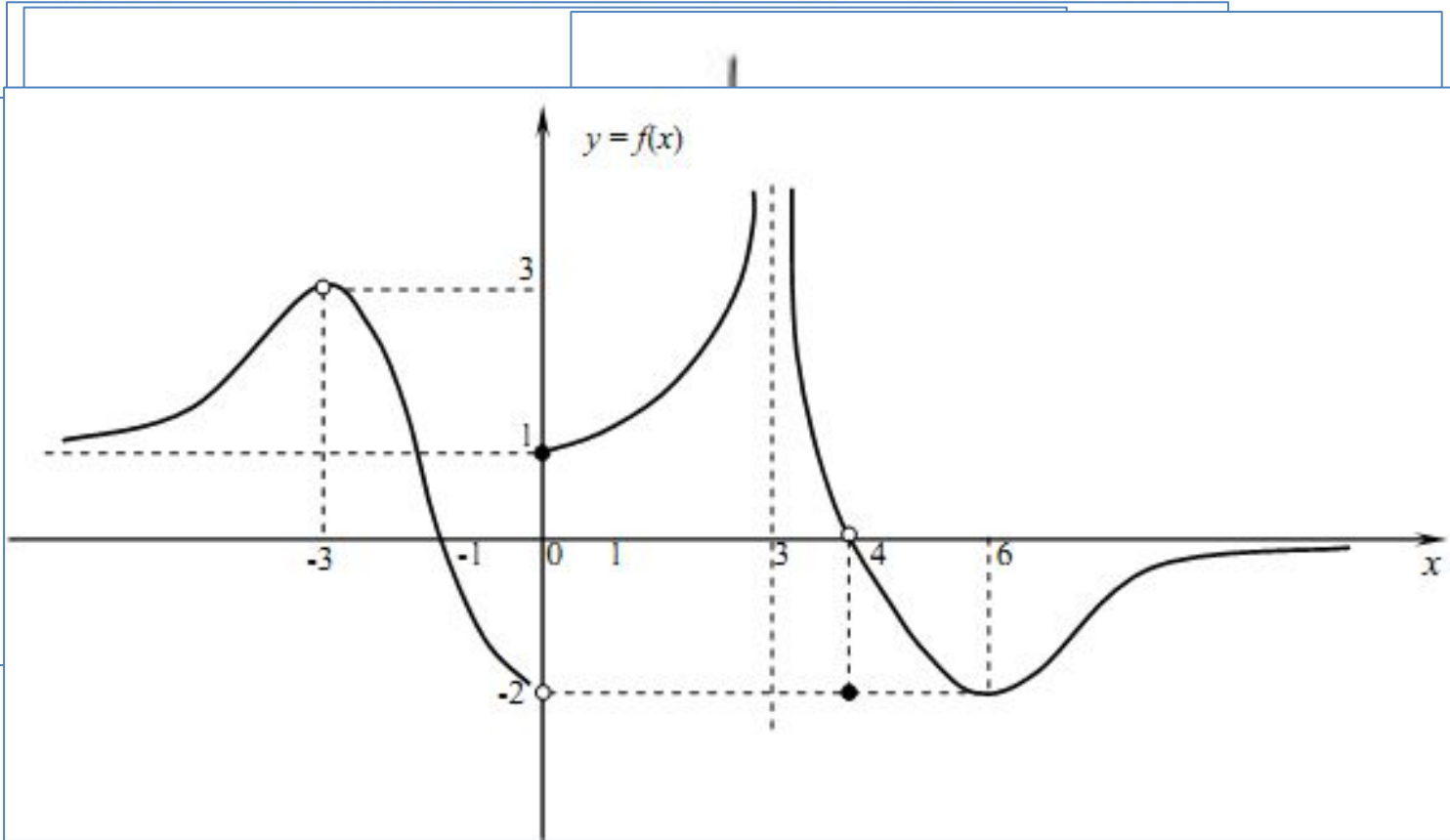
# Элементы теории пределов



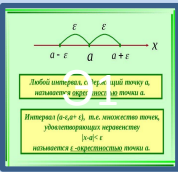
$$x_n = \frac{1}{n}$$



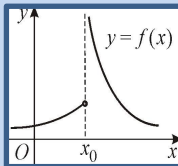
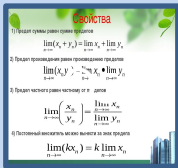
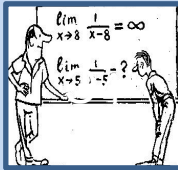
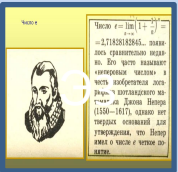
**Задача.** Найти пределы функции  $f(x)$  в нескольких точках, используя ее график в декартовой системе координат. Указать локальные характеристики функции.



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



Лемма 3.1' (свойства бесконечно больших величин)

Пункт 2

Функция  $f(x)$  бесконечно мала в точке  $x_0$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . Это означает, что

$$\forall \varepsilon \exists \delta: x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon; \quad (1)$$

Функция  $g(x)$  ограничена в точке  $x_0$ . Это означает, что

$$\exists \delta_0 > 0 \exists c > 0: x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow |g(x)| \leq c. \quad (2)$$

Покажем, что функция  $f(x)g(x)$  бесконечно мала в точке  $x_0$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ :

$$\forall \varepsilon' \exists \delta': x \in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) \Rightarrow |f(x)g(x)| < \varepsilon'. \quad (3)$$

Зафиксируем произвольное значение  $\varepsilon' > 0$ . Рассмотрим  $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{c}$  в (1) и соответствующее значение  $\delta$ . Тогда (3) выполняется, так как в нем можно взять  $\delta' = \min\{\delta, \delta_0\}$ :

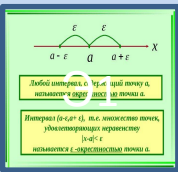
$$x \in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) = \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon'}{c}c = \varepsilon'.$$

Кроме того, функция  $f(x) + g(x)$  ограничена в проколотой  $\delta'$ - окрестности точки  $x_0$ :

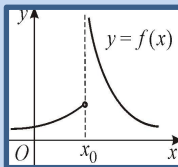
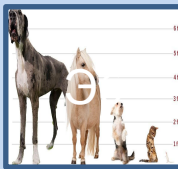
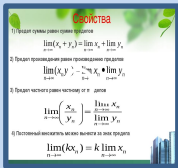
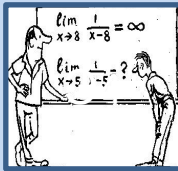
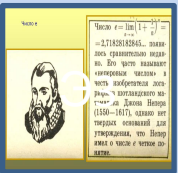
$$x \in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) = \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon + c = C.$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Пункт 5

Докажем сначала вспомогательное утверждение:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{1 + \alpha(x)} = 1.$$

Действительно, расшифруем обе части этого утверждения по определению предела 2.1:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists \delta: x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon. \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{1 + \alpha(x)} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon' \exists \delta': x \in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) \Rightarrow \left| \frac{1}{1 + \alpha(x)} - 1 \right| < \varepsilon'. \quad (13)$$

Зафиксируем произвольное значение  $\varepsilon' > 0$ . Рассмотрим  $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'}$  в (12) и соответствующее значение  $\delta$ . Тогда (13) выполняется, так как в нем можно взять  $\delta' = \delta$ :

$$x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{1 + \alpha(x)} \right| < \frac{1}{1 - \varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{1 + \alpha(x)} - 1 \right| = \left| \frac{\alpha(x)}{1 + \alpha(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \varepsilon'.$$

Согласно пункту 4 для доказательства пункта 5 достаточно убедиться, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0.$$

Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Воспользуемся пунктами 1, 3 этой леммы и только что доказанным вспомогательным утверждением:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{a + \alpha(x)} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{1 + \underbrace{\left( \frac{\alpha(x)}{a} \right)}_{\text{беск. мал.}}} = \frac{1}{a}.$$

гда, когда ее  
ия в точке  $x_0$ .

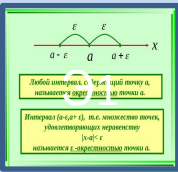
$x)g(x) = ab$ .

$\alpha(x)\beta(x)$ , о  
онечно малая  
произведение

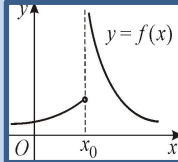
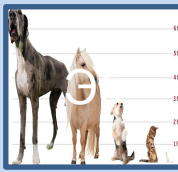
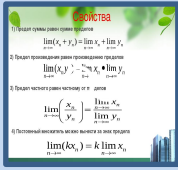
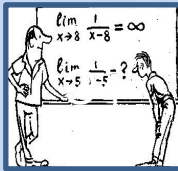
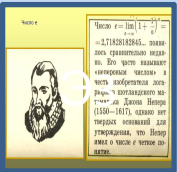




# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



$$7. f(x) = 2^{2x+1}, x_0 = 0$$

По свойству 3 бесконечно малых величин (лемма 3.1):

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \infty.$$

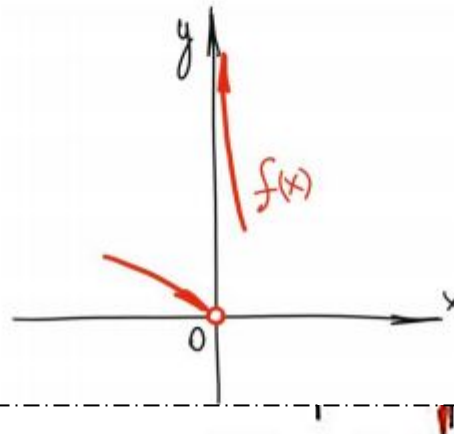
Введем новую переменную  $t = \frac{1}{x}$ . Поскольку у функции  $2^t$  разное предельное поведение на  $+\infty$  и на  $-\infty$ , то рассмотрим сначала односторонние пределы в бесконечно удаленной точке:

$$x \rightarrow +0 \Rightarrow t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 2^t = +\infty;$$

$$x \rightarrow -0 \Rightarrow t = \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} 2^t = 0.$$

Так как функция имеет разные односторонние пределы в точке  $x_0 = 0$ , то двустороннего предела в этой точке нет:  $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$  не существует.

Графическое описание:

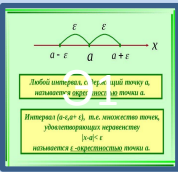


свойства  
численное и

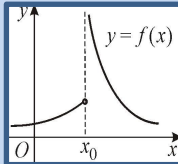
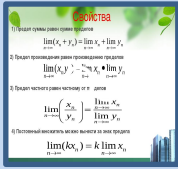
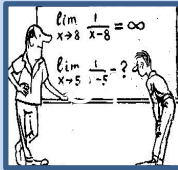
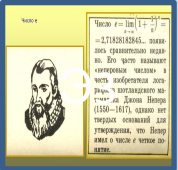
= 0.



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$

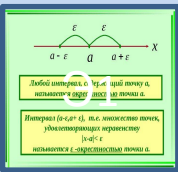


## Неопределенность и

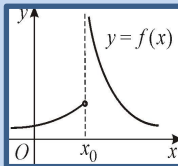
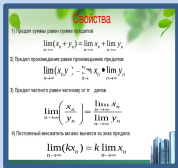
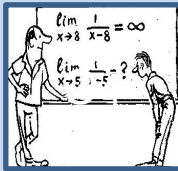
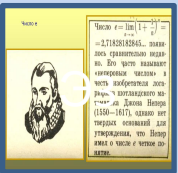
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = [0 \cdot \infty]$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( f(x) \right)^{g(x)} = [1^\infty]$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right]$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = [\infty - \infty]$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( f(x) \right)^{g(x)} = [0^0]$
		$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( f(x) \right)^{g(x)} = [\infty^0]$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Лемма 3.3

Пусть  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  и  $f(x) \leq g(x)$  в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ . Тогда если существуют пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x_0$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

## Доказательство.

▷ Пусть  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ .

Используем метод рассуждений от противного. Предположим, что  $a > b$ .

У двух различных точек  $a$  и  $b$  координатной прямой (возможно, расширенной) всегда можно указать непересекающиеся  $\varepsilon$ -окрестности:

$$\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset.$$

Рассмотрим именно для такого  $\varepsilon$  значения  $\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)$ . Положим  $\delta' = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$ .

Тогда  $\overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) = \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0)$  и в  $\delta'$ -окрестности точки  $x_0$  получаем два противоречащих друг другу вывода:

$$x \in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a), g(x) \in U_\varepsilon(b) \Rightarrow f(x) > g(x);$$

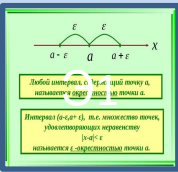
$$x \in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) \Rightarrow f(x) \leq g(x) \quad (\text{по условию леммы}).$$

Полученное противоречие означает, что предположение  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  было

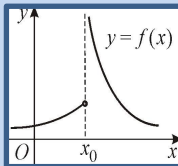
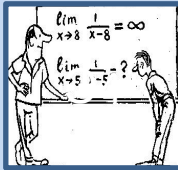
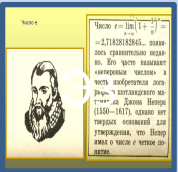
неверным. Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



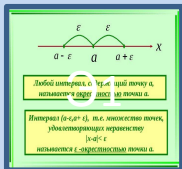
## Теорема 3.4

I.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  – первый замечательный предел;

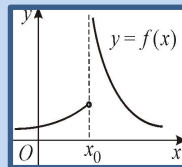
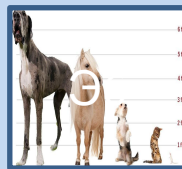
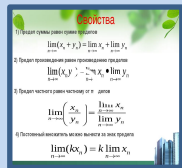
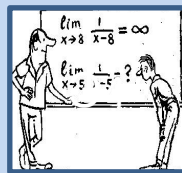
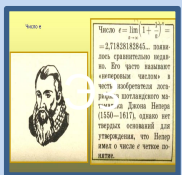
II.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  – второй замечательный предел.



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$

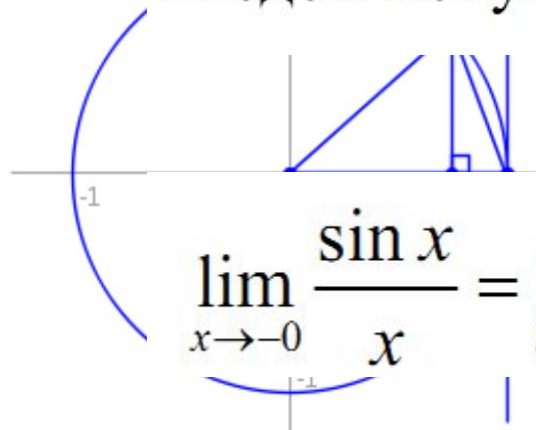


Доказательство

$$\triangleright \text{I. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x}$$

Введем новую переменную  $t = -x \rightarrow +0$ :  $\frac{\sin x}{2}$ ,



$$S_2 = \frac{\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

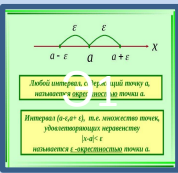
$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1 = \frac{\text{tg} x}{2}$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg} x}{2} \Rightarrow \frac{1}{\text{tg} x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

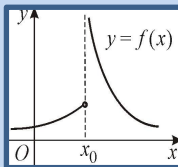
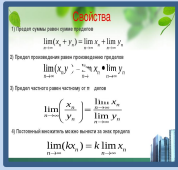
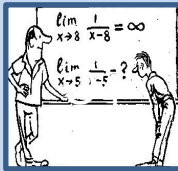
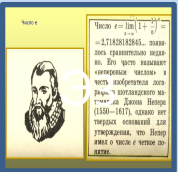
$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow +0} \cos x}_{=1} \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq \underbrace{\lim_{x \rightarrow +0} 1}_{=1} \Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



$$\text{II. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство

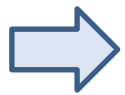
$n = [x]$  – целая часть числа  $x$ ,

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow$$

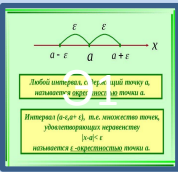
$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

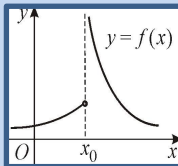
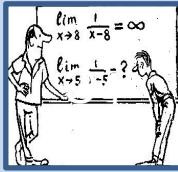
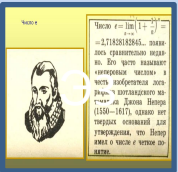
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



при  $x \rightarrow +\infty$   $n = [x] \rightarrow +\infty$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$e \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

При  $x \rightarrow -\infty$   $t = -x \rightarrow +\infty$

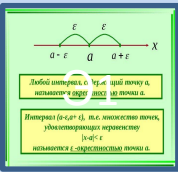
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right):$$

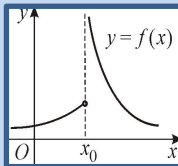
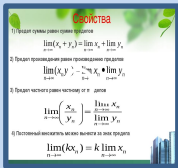
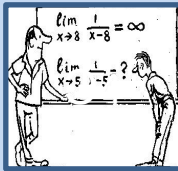
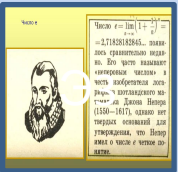
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Определение 4.1

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – бесконечно малые функции в точке  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , то пишут  $f(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ . Говорят, что  $f(x)$  – бесконечно малая *более высокого порядка*, чем  $g(x)$  в точке  $x_0$ . Это значит, что  $f(x) \rightarrow 0$  на порядок быстрее, чем  $g(x) \rightarrow 0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , то говорят, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют *одинаковый порядок малости* в точке  $x_0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке  $x_0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , то пишут  $f(x) = o(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ . Говорят, что  $g(x)$  – бесконечно большая *более высокого порядка*, чем  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Это означает, что  $g(x) \rightarrow \infty$  на порядок быстрее, чем  $f(x) \rightarrow \infty$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , то говорят, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют *одинаковый порядок роста* в точке  $x_0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке  $x_0$ .





# Элементы теории пределов

$\varepsilon$   $\delta$   
 $a-\varepsilon$   $a$   $a+\varepsilon$   $x$


Любой интервал  $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$  найдёт точку  $x$ , принадлежащую этому интервалу.

Примеры функций  $f(x)$ , не имеющих предела, рассматриваемых в курсе:  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  и дробно-рациональные функции.

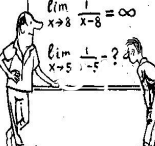
$$x_n = \frac{1}{n}$$

Число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459...$  — это фундаментальная константа. Его часто называют «математическим числом». В честь него введена единица измерения — вольт.

Этот символ  $e$  ввел Леонард Эйлер (1707–1783), который внес огромный вклад в математику, физику и астрономию.



$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = ?$



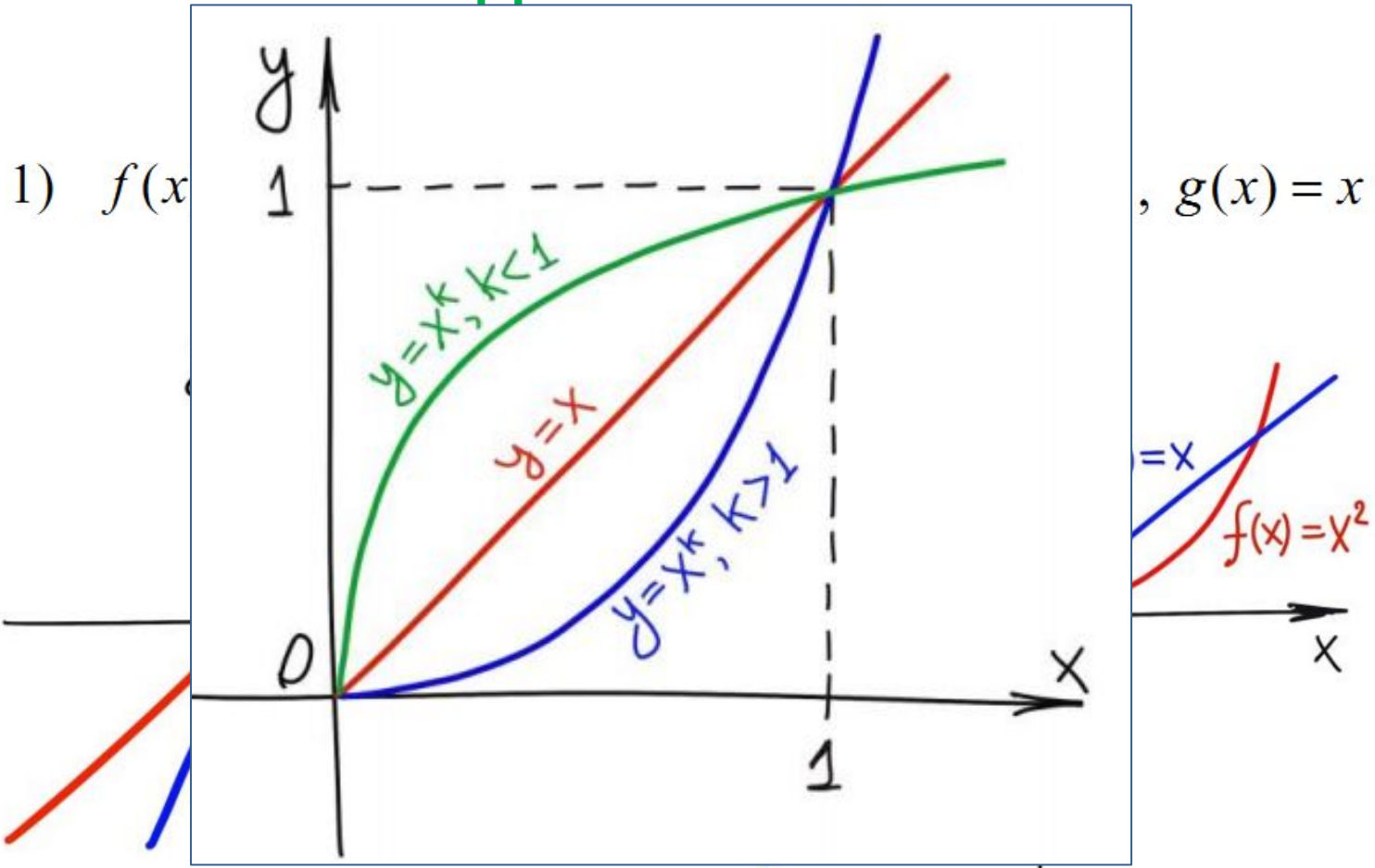
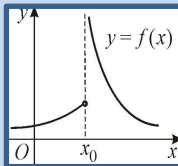
**Свойства**

1) Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ .

2) Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ .

3) Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ , если  $B \neq 0$ .

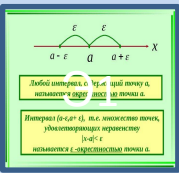
4) Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot A$ .



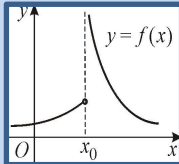
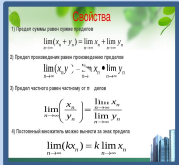
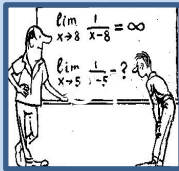
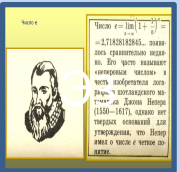
Общий вывод



# Элементы теории пределов



$$x_n \approx \frac{1}{n}$$



**Задача 1.** Сравнить порядки бесконечно малых функций  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  и  $g(x) = 1 - 2\sqrt{x} + x$  в точке  $x_0 = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{1-2\sqrt{x}+x} = o\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \text{ при } x \rightarrow 1 \frac{x^2}{(1-\sqrt{x})^2} = \infty$$

**Задача 2.** Сравнить порядки двух бесконечно больших функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x_0$ .

1.  $f(x) = \sqrt{x^4 + x} - 1 + x$ ,  $g(x) = x^2 \ln x$ ,  $x_0 = +\infty$

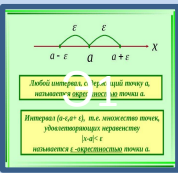
$$\sqrt{x^4 + x} - 1 + x = o(x^2 \ln x) \text{ при } x \rightarrow +\infty \frac{-1, \text{orp.}}{-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$$

$f(x)$  и  $g(x)$  имеют одинаковый порядок роста в точке  $x_0$

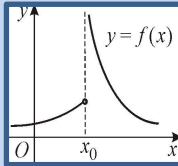
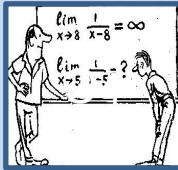
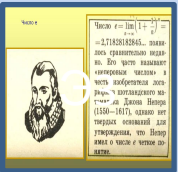
$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1-x}{1-x^2} : \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x^3} = 2$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



**Задача 1.** Сравнить порядки бесконечно малых функций

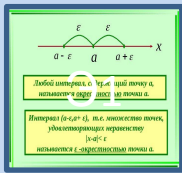
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \text{ и } g(x) = 1 - 2\sqrt{x} + x \text{ в точке } x_0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(1+x)(1-2\sqrt{x}+x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+x)(1-\sqrt{x})^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{1+\sqrt{x}}^{\rightarrow 2}}{\underbrace{(1+x)}_{\rightarrow 2} \underbrace{(1-\sqrt{x})}_{\rightarrow 0}} = \infty$$

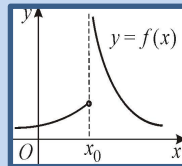
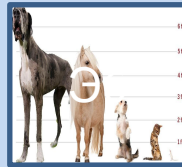
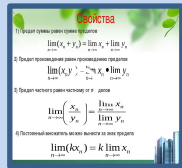
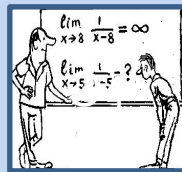
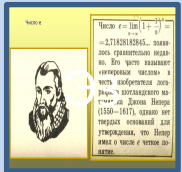
$$1 - 2\sqrt{x} + x = o\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \text{ при } x \rightarrow 1$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



**Лемма 4.2** [без доказательства]

Пусть  $k > 0$ ,  $a > 1$ . Тогда при  $x \rightarrow +\infty$

$$\log_a x = o(x^k), \quad x^k = o(a^x), \quad a^x = o(x^x), \quad x^x = o([x]!).^2$$

$\log_a x$	$x^k$	$a^x$	$x^x$	$n! = [x]!$
------------	-------	-------	-------	-------------



# Элементы теории пределов

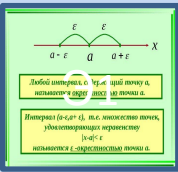
## Эквивалентные бесконечно малые (большие) величины

### Определение 4.3

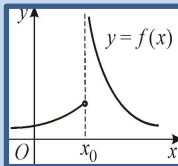
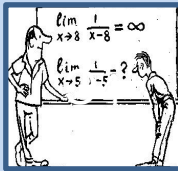
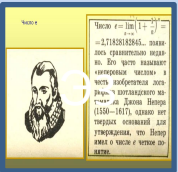
Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – две бесконечно малые (большие) функции в точке  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , то функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются *эквивалентными* в точке  $x_0$ .

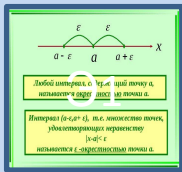
Обозначение:  $f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Эквивалентные бесконечно малые (большие) функции с одинаковой скоростью стремятся к нулю (к бесконечности) при  $x \rightarrow x_0$ .



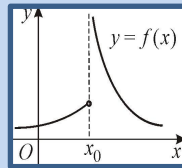
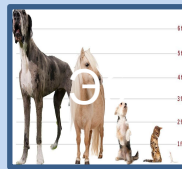
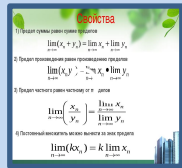
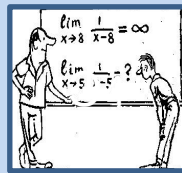
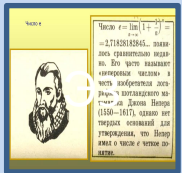
$$x_n \approx \frac{1}{n}$$



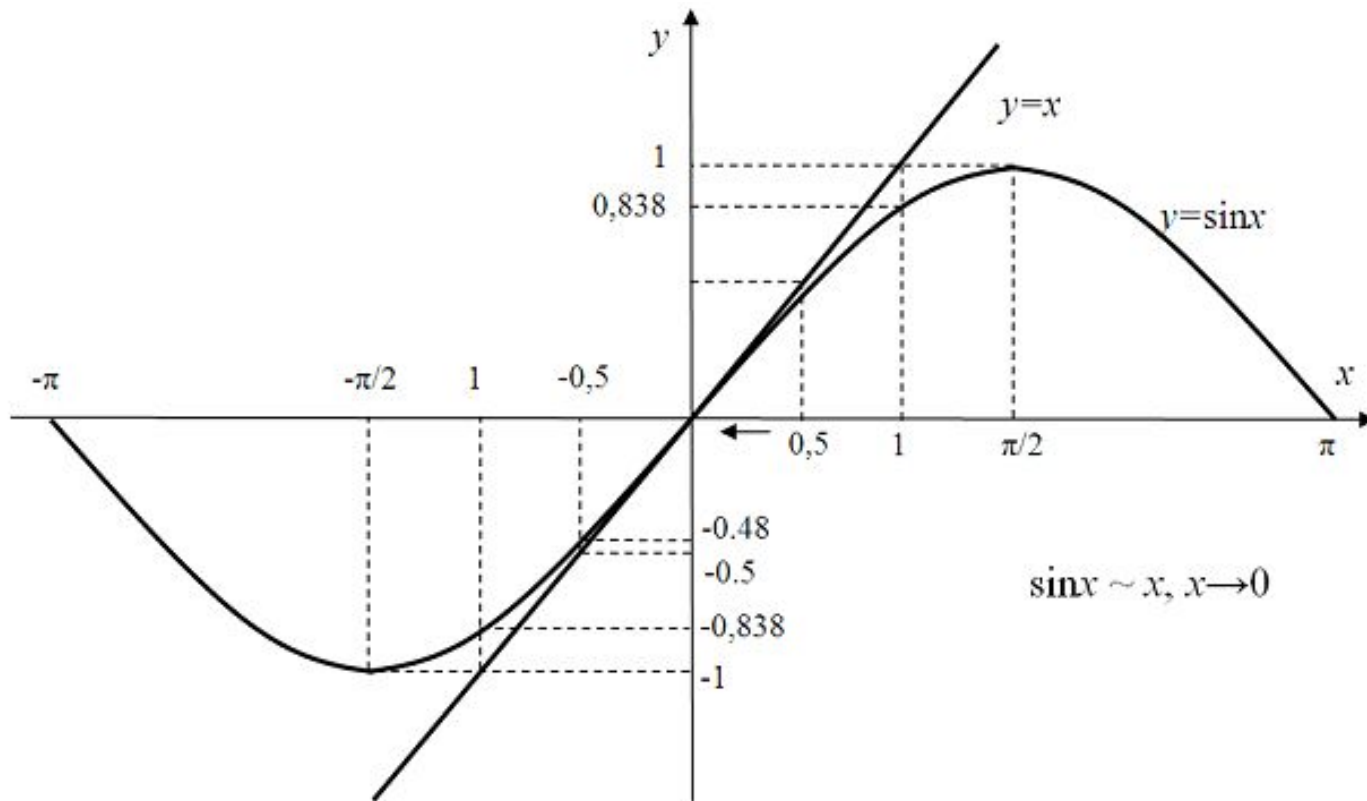
# Элементы теории пределов



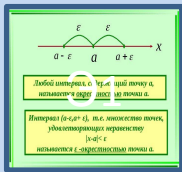
$$x_n = \frac{1}{n}$$



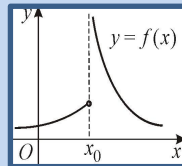
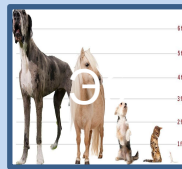
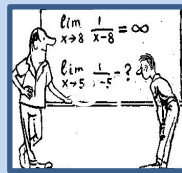
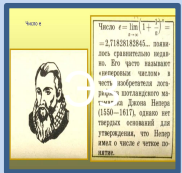
$$f(x) = \sin x \text{ и } g(x) = x$$



# Элементы теории пределов



$$x_n \approx \frac{1}{n}$$



## Теорема 4.4 (список основных отношений эквивалентности)

Доказательство (выборочно).

Для доказательства используем первый и второй замечательные пределы (теорема 3.4) и свойства конечных пределов (лемма 3.2).

Соотношение  $\sin x \sim x$  – прямое следствие первого замечательного предела.

Следующие отношения эквивалентности также опираются на первый замечательный предел:

$$\operatorname{tg} x \sim x \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1;$$

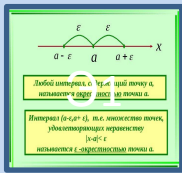
Следующие отношения эквивалентности выводятся при помощи второго замечательного предела:

$$\ln(1+x) \sim x \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1;$$

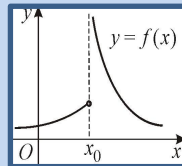
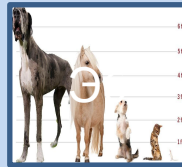
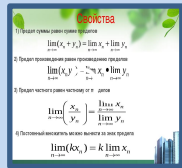
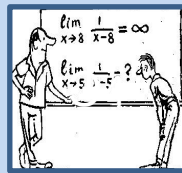
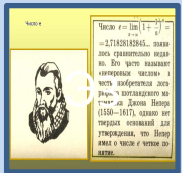
$$e^x - 1 \sim x \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1 \text{ (следует из предыдущего соотношения).}$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



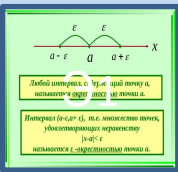
Лемма 4.5 (формула Стирлинга для факториала) [без доказательства]

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ при } n \rightarrow \infty$$

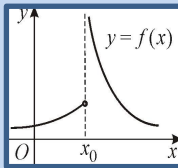
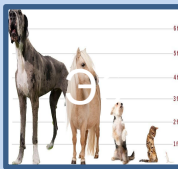
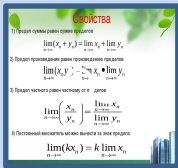
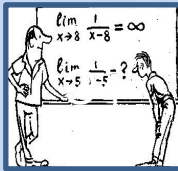
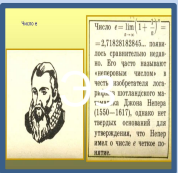




# Элементы теории пределов



$$x_n \doteq \frac{1}{n}$$



## Лемма 4.6 (свойства отношения эквивалентности)

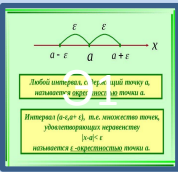
Пусть  $f(x), g(x), h(x)$  – три бесконечно малые (большие) функции в точке  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ . Тогда

1.  $f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (рефлексивность);
2.  $f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow g(x) \sim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (симметричность);
3.  $f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x), g(x) \sim_{x \rightarrow x_0} h(x) \Rightarrow f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} h(x)$  (транзитивность);
4.  $f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow f(x)h(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x)$ ;
5.  $f_0(x) \rightarrow_{x \rightarrow x_0} a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \Rightarrow f_0(x)f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} af(x)$ ;
6. 
$$\begin{cases} f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \varphi(f(x)) - \text{беск. малая (больш.) в } x_0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(f(x)) \sim_{x \rightarrow x_0} \varphi(g(x));$$
7. 
$$\begin{cases} f(x) \sim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \psi(t) \rightarrow_{t \rightarrow t_0} x_0 \end{cases} \Rightarrow f(\psi(t)) \sim_{t \rightarrow t_0} g(\psi(t)).$$

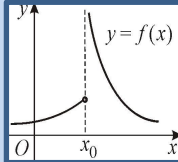
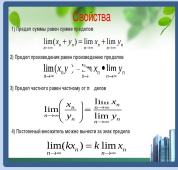
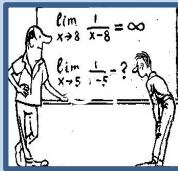
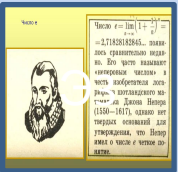
Применение  
леммы



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



Свойство 3

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin x \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(1 + \sin x) \sim \sin x \sim x$$

Свойство 4

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x \sim x \Rightarrow x \operatorname{tg} x \sim x^2$$

Свойство 5

Чтобы заменить бесконечно малую (большую) в точке  $x_0$  функцию на эквивалентную, надо выделить в ней бесконечно малый (большой) множитель так, чтобы все остальные множители имели конечный ненулевой предел в точке  $x_0$ , после чего заменить их на значение этого предела.

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow x^2 + 3x = \underset{\substack{\text{б.б.} \\ \rightarrow 1}}{x^2} \left(1 + \frac{3}{x}\right) \sim x^2; \quad \text{проверка: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right) = 1;$$

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow x^2 + 3x = \underset{\substack{\text{б.м.} \\ \rightarrow 3}}{x} (x + 3) \sim 3x; \quad \text{проверка: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{3x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{3} + 1\right) = 1.$$

Свойство 6  $x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin x \sim x \Rightarrow \sin^2 x \sim x^2, \frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$

$$x \rightarrow +0 \Rightarrow \sqrt{x} \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \sqrt{x} \sim \sqrt{x};$$

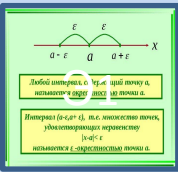
Свойство 7

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow e^{1/x} - 1 \sim \frac{1}{x};$$

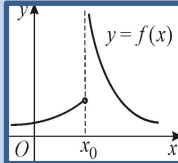
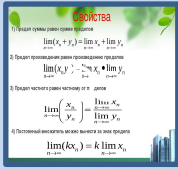
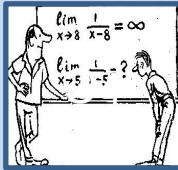
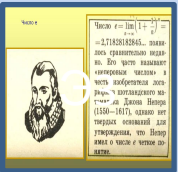
$$x \rightarrow -1 \Rightarrow x + 1 \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{arctg}(x + 1) \sim x + 1$$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Лемма 4.7

Значение предела функции в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  не изменится, если любой бесконечно малый или бесконечно большой ее множитель заменить на эквивалентный в точке  $x_0$ .

### Доказательство.

Пусть требуется вычислить предел  $f(x)h(x)$  в точке  $x_0$  и  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Докажем, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x)$ .

Очевидно  $f(x)h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x)h(x)$ . Рассмотрим разные случаи.

- 1) Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x) \in \mathbb{R}$ , то по свойствам конечных пределов (лемма 3.2):

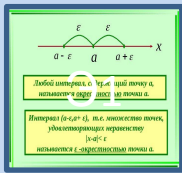
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{=1} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x).$$

- 2) Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x) = \infty$ , то по свойствам бесконечно больших функций (лемма 3.1'):
  - 3) Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x)$  не существует, то и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)h(x)$  не существует: пусть функция  $f(x)h(x)$  имеет конечный или бесконечный предел в  $x_0$ , тогда согласно логике пунктов 1), 2) функция  $g(x)h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} f(x)h(x)$  тоже имела бы конечный или бесконечный предел.

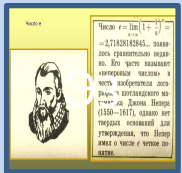
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)}_{\text{отд. от } 0} \cdot \underbrace{g(x)h(x)}_{\text{беск. большая}} = \infty.$$



# Элементы теории пределов

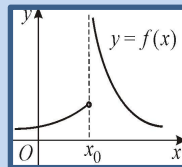
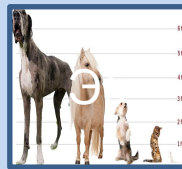
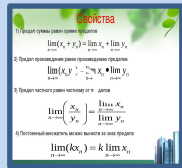
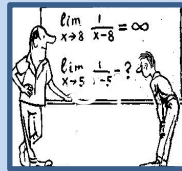


$$x_n = \frac{1}{n}$$

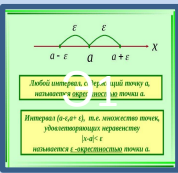


$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x^2 - x + 1)^3 - 1}{x\sqrt{x-1} \ln x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{(a)}{=} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(t^2 + t + 1)^3 - 1}{\sqrt{t}(1+t) \ln(1+t)} \stackrel{(b)}{=} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{3(t^2 + t)}{t\sqrt{t}} \stackrel{(c)}{=} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\overbrace{3(t+1)}^{\substack{\text{отд. от } 0, \\ \rightarrow 3}}}{\sqrt{t}} \stackrel{(d)}{=} +\infty.$$

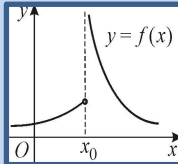
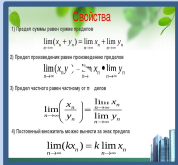
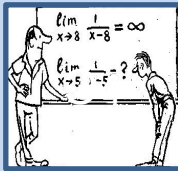
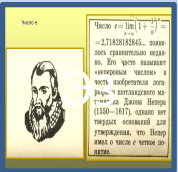
Изначально рассматривается только правосторонний предел, поскольку слева от точки  $x_0 = 1$  функция не определена.



# Элементы теории пределов



$$x_n \approx \frac{1}{n}$$



## Определение 4.8

Пусть  $f(x)$ ,  $g(x)$  – бесконечно малые (большие) функция в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ . Если функции  $f(x)$  и  $(g(x))^k$  имеют одинаковый порядок малости (роста) в точке  $x_0$ , то число  $k$  называется порядком функции  $f(x)$  относительно функции  $g(x)$  или по шкале  $(g(x))^k$ .

Исходя из определений 4.1, 4.1', чтобы установить порядок функции  $f(x)$  относительно  $g(x)$ , надо найти такое число  $k > 0$ , при котором

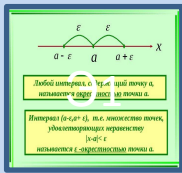
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^k} = a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Альтернативный путь – провести замену функции  $f(x)$  на эквивалентную вида

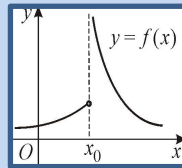
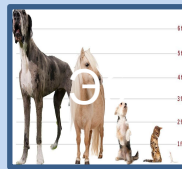
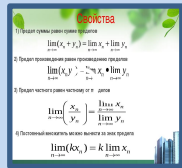
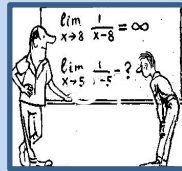
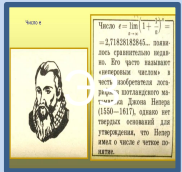
$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a(g(x))^k, a \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (*)$$



# Элементы теории пределов



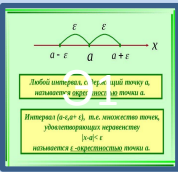
$$x_n = \frac{1}{n}$$



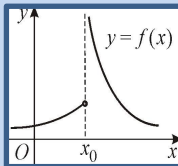
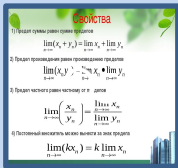
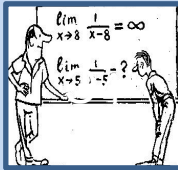
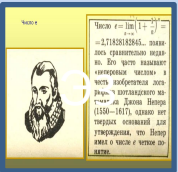
$f(x), x_0$	степенная шкала, $k > 0$
$f(x)$ – беск. малая, $x_0 \in \mathbb{R}$	$(x - x_0)^k$
$f(x)$ – беск. большая, $x_0 \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{(x - x_0)^k}$
$f(x)$ – беск. малая, $x_0 = \infty$	$\frac{1}{x^k}$
$f(x)$ – беск. большая, $x_0 = \infty$	$x^k$



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



**Задача 4.** Дана функция  $f(x) = \frac{x^5 - 2x^4}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ .

Указать точки, в которых она является бесконечно малой, и точки, в которых она является бесконечно большой. В каждой такой точке определить порядок  $f(x)$  по подходящей степенной шкале.

**Упражнение.** Для каждого из следующих условий, привести пример удовлетворяющей ему функции  $f(x)$ .

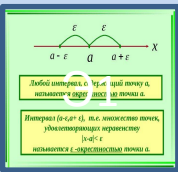
$$4) \quad x \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{x^5 - 2x^4}{\sqrt[3]{x^3 - 1}} \sim \frac{-1}{\sqrt[3]{x^3 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{x-1} \underbrace{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}_{\rightarrow \sqrt[3]{3}}} \sim \frac{-1}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{x-1}} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$f(x)$  беск. большая в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ , но не имеет порядка по степенной шкале  $\frac{1}{(x - x_0)^k}$ .

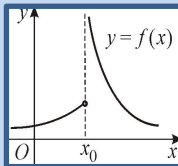
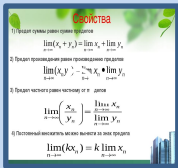
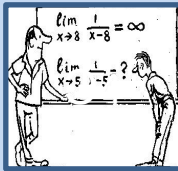
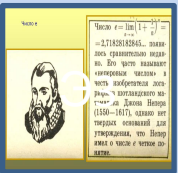
Упражнение



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Непрерывность функции

### Определение 5.1 (непрерывность в точке)

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$  и функция  $f(x)$  определена на множестве  $X \subset \mathbb{R}$ , включающем некоторую проколотую окрестность точки  $x_0$ .

Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке*  $x_0$ , если она определена в точке  $x_0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (иначе говоря,  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$ ).

Функция  $f(x)$  называется *разрывной в точке*  $x_0$ , если она не является непрерывной, т. е. она не определена в точке  $x_0$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

### Описание непрерывной функции в точке

1. Используем определение предела по Коши:

3. Обозначим  $\Delta x = x - x_0$  – приращение аргумента в точке  $x_0$ ,

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$  – приращение функции в точке  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$$

4. Поскольку  $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$ , то непрерывность функции в точке  $x_0$  означает, что можно

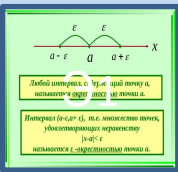
поменять местами предельный переход и функцию:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ .

### Предельный переход

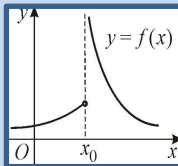
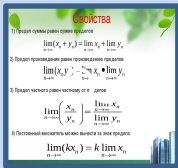
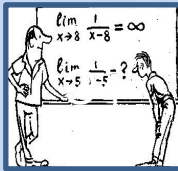
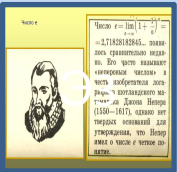




# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Непрерывность функции

### Лемма 5.2

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Тогда в точке  $x_0$  также непрерывны следующие функции:

$$\begin{aligned} & f(x) + g(x); \\ & \lambda f(x), \lambda \in \mathbb{R}; \\ & f(x) \cdot g(x); \\ & \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если } g(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

### Доказательство

Лемма 5.2 есть прямое следствие леммы 3.2 о свойствах конечных пределов. Например:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0).$$



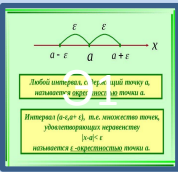
### Доказательство

Покажем, что  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow g(f(x)) \rightarrow g(f(x_0))$ . Используем сначала непрерывность функции  $f(x)$ , затем непрерывность функции  $g(y)$ :

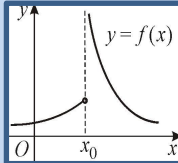
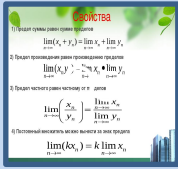
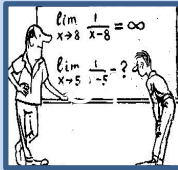
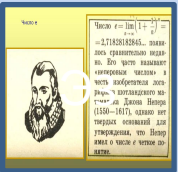
$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \underset{y}{f(x)} \rightarrow \underset{y_0}{f(x_0)} \Rightarrow g(y) = g(f(x)) \rightarrow g(y_0) = g(f(x_0)).$$



# Элементы теории пределов

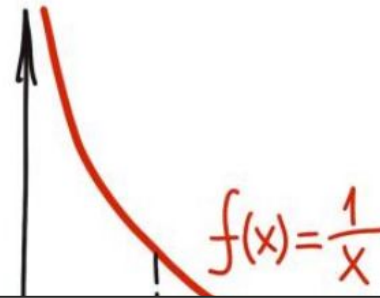


$$x_n = \frac{1}{n}$$

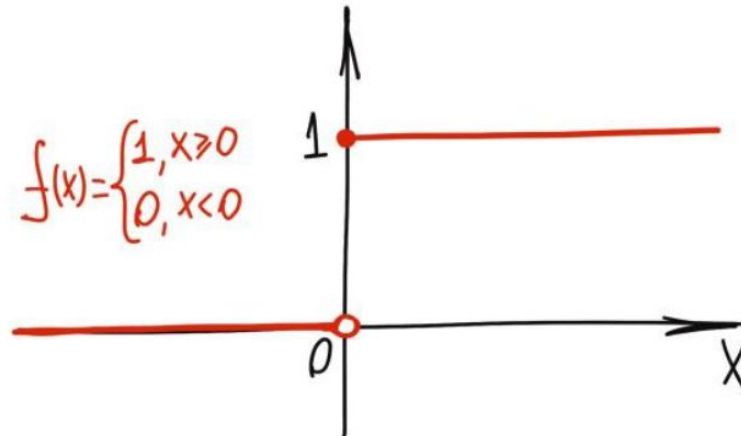


## Непрерывность функции

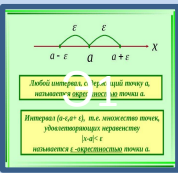
$f(x) = \frac{1}{x}$  непрерывна на  $(0;1)$ , но не является непрерывной на  $[0;1]$ ;



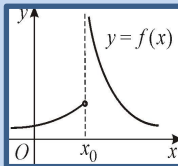
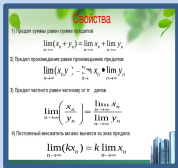
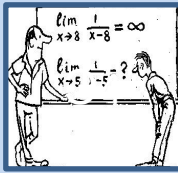
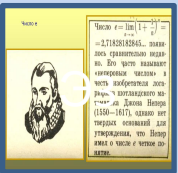
$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  непрерывна на  $[0;1]$ , но не является непрерывной на  $[-1;0]$ .



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Непрерывность функции

**Лемма 5.5 (непрерывность элементарных функций)** [без подробного доказательства]  
Пусть  $f(x)$  – элементарная функция. Тогда она непрерывна на каждом (невырожденном) промежутке своей области определения.

### Идея доказательства:

утверждение леммы проверяется непосредственно для основных элементарных функций; затем используется определение элементарной функции как результата конечного числа арифметических операций и композиций над основными элементарными функциями (подробно об элементарных функциях см. в пособии по модулю 1); окончательный вывод вытекает из лемм 5.2, 5.3.



# Элементы теории пределов

Любое число  $\epsilon > 0$  найдёт такое  $\delta$ , что для любого  $x$  выполняющего условие  $|x - a| < \delta$  верно  $|f(x) - a| < \epsilon$ .

Пример:  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2) = 1$ . По определению, для любого  $\epsilon > 0$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что для любого  $x$  выполняющего условие  $|x - 1| < \delta$  верно  $|x^2 - 1| < \epsilon$ .

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459...$  — это фундаментальное число. Его часто называют «числом Эйлера» в честь швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1783), который внес огромный вклад в математику, физику и инженерные науки.

$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = ?$

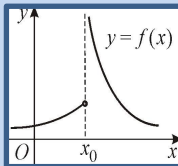
**Свойства**

1. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ .

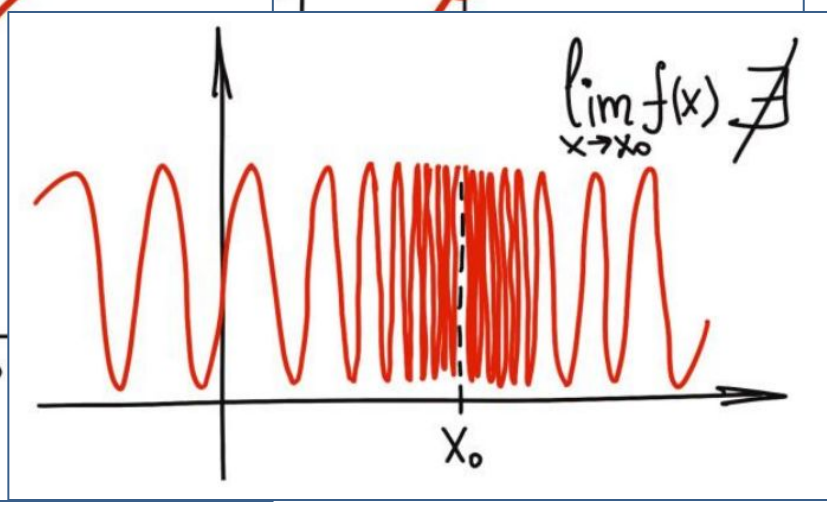
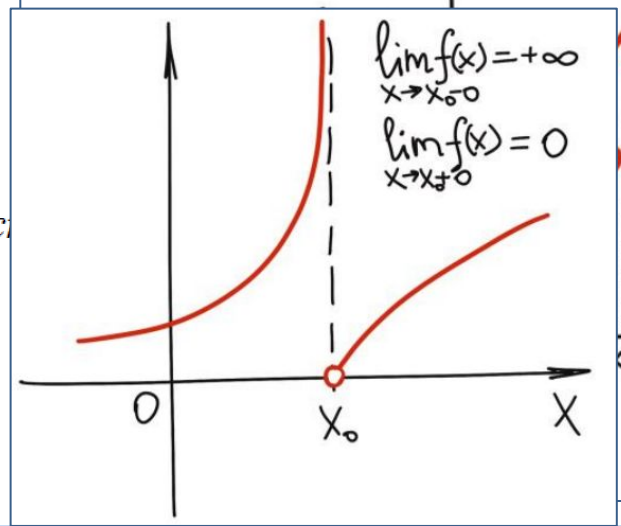
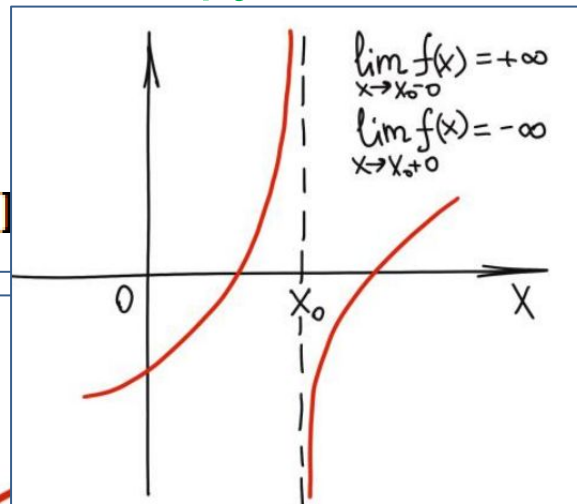
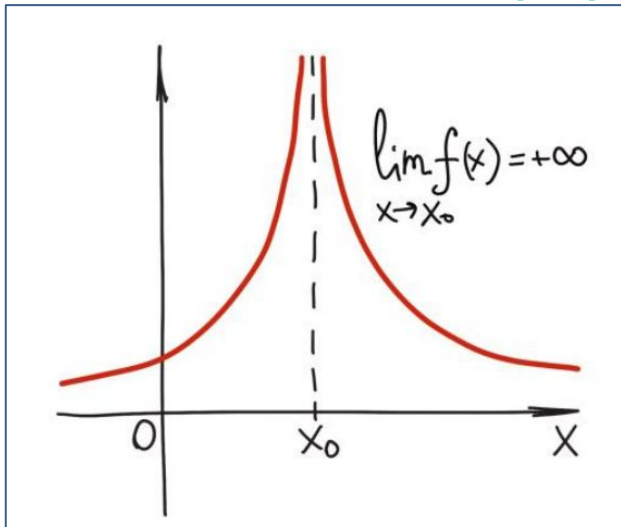
2. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ .

3. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ , если  $B \neq 0$ .

4. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot A$ .



## Непрерывность функции



Ус

кал

х<sub>0</sub>



# Элементы теории пределов

Любое число  $\epsilon > 0$  найдут такое  $\delta$ , что для любого  $x$  из промежутка  $(a-\delta; a+\delta)$  выполняется неравенство  $|x-a| < \epsilon$ .

Пример:  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2) = 1$ . По определению предела, для любого  $\epsilon > 0$  найдут такое  $\delta > 0$ , что для любого  $x$  из промежутка  $(1-\delta; 1+\delta)$  выполняется неравенство  $|x^2 - 1| < \epsilon$ .

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459045...$  — это фундаментальная константа. Его часто называют «числом Е». Число  $e$  является иррациональным числом. Оно является основанием натурального логарифма. Число  $e$  является пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Число  $e$  является пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ . Число  $e$  является пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - e^{n-1}}{e^n - e^{n-2}}$ . Число  $e$  является пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} - e^n}{e^{n+2} - e^{n+1}}$ . Число  $e$  является пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} - e^n}{e^{n+1} - e^n}$ . Число  $e$  является пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} - e^n}{e^{n+1} - e^n}$ .

$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x} = ?$

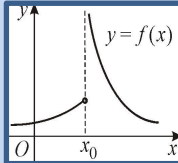
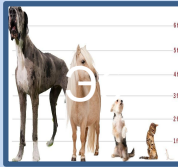
**Свойства**

1. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ .

2. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ .

3. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ , если  $B \neq 0$ .

4. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot A$ .



## Непрерывность функции

**Задача.** Указать область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрывов. Определить характер разрывов и предельное поведение функции на краях области определения (включая бесконечно удаленные точки). Дать графическое описание.

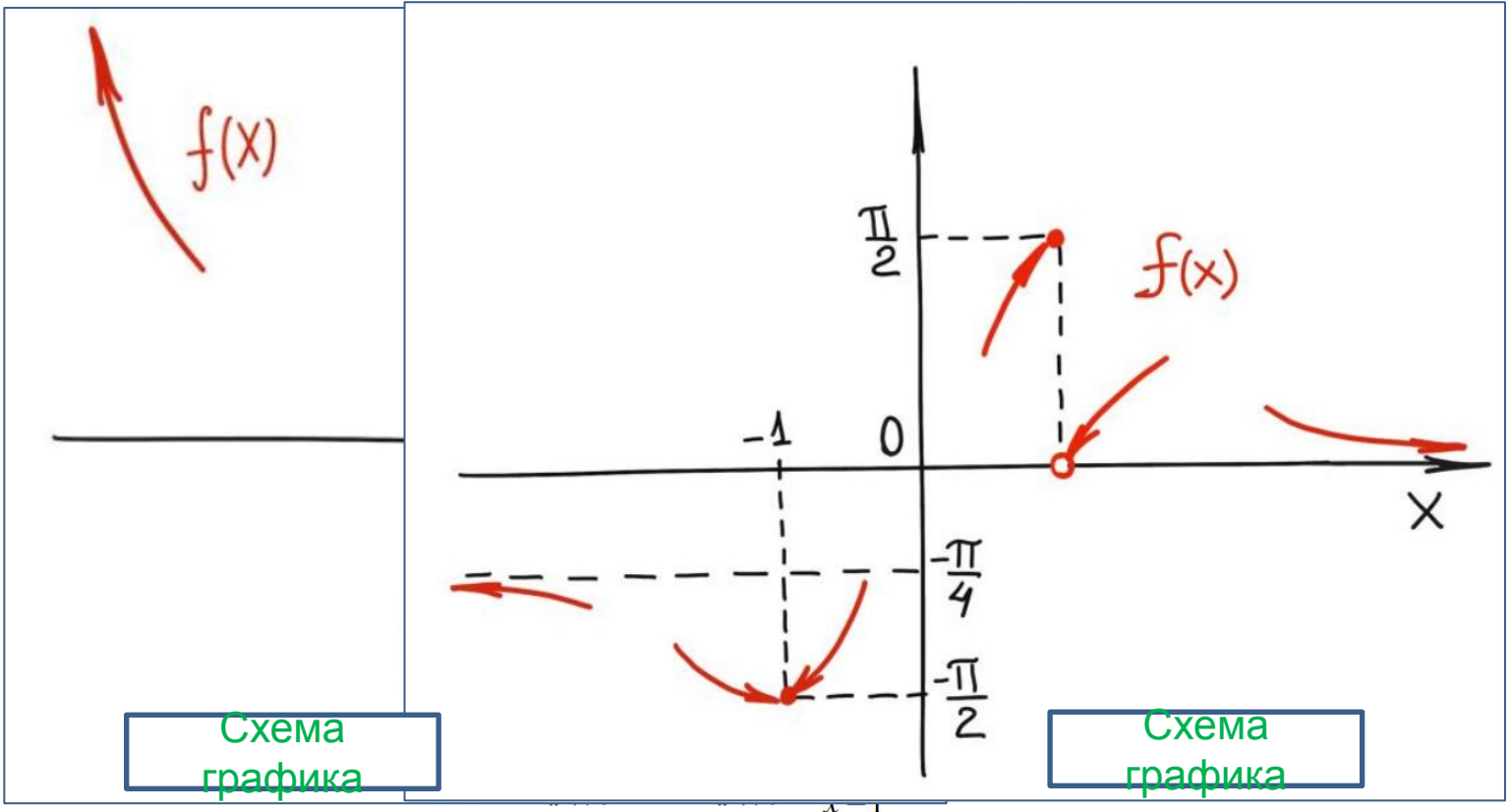
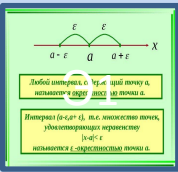


Схема графика

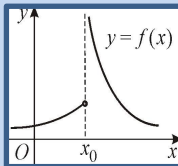
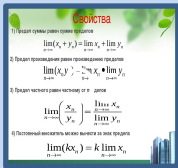
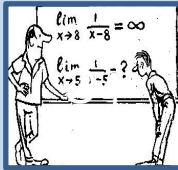
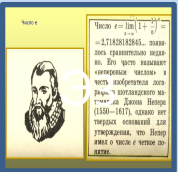
Схема графика



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



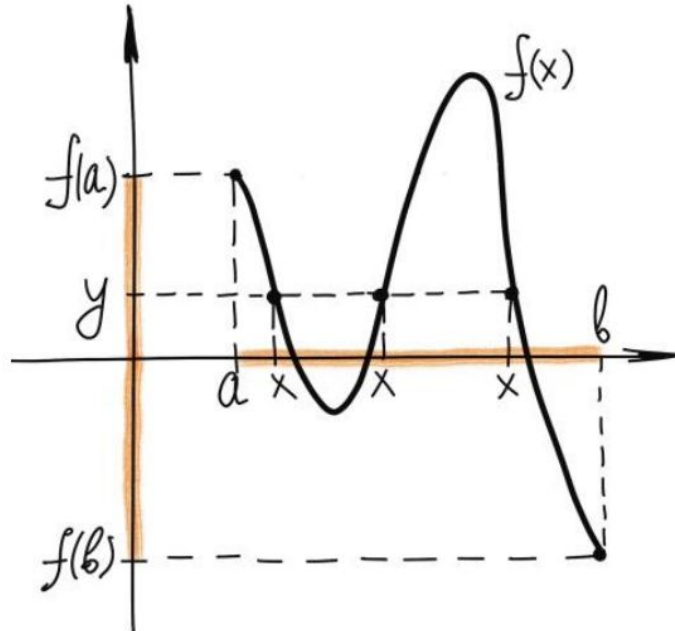
## Непрерывность функции

**Теорема 5.6 (Больцано – Коши)** [без доказательства, очевидно по рисунку]

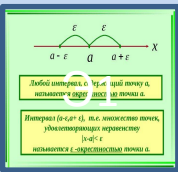
Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ . Тогда на интервале  $(a; b)$  функция  $f(x)$  принимает все промежуточные значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ :

$$\forall y \in (f(a); f(b)) \exists x \in (a; b): f(x) = y \quad (\text{в случае } f(a) < f(b)).$$

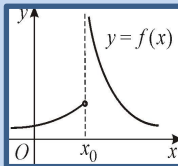
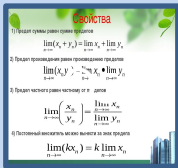
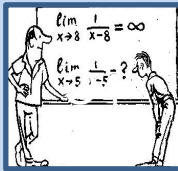
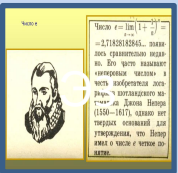
В частности, если  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$  (или наоборот), то  $\exists x \in (a; b): f(x) = 0$ .



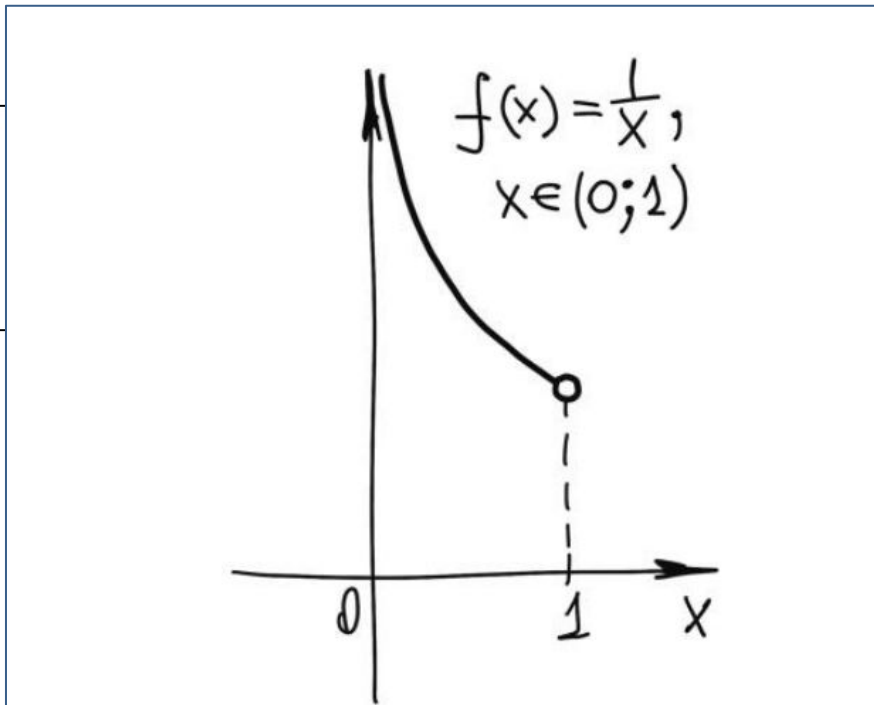
# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



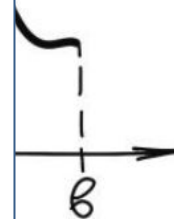
## Непрерывность функции



$$\max_{x \in (0;1)} \frac{1}{x} = \max(1; +\infty) \text{ не существует;}$$

$$\min_{x \in (0;1)} \frac{1}{x} = \min(1; +\infty) \text{ не существует.}$$

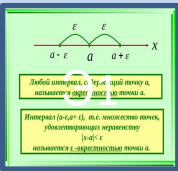
идно по рисунку]  
ограничена и достигает наибольшего  
x).



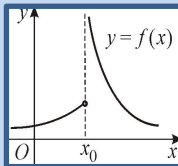
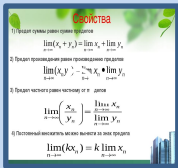
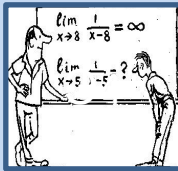
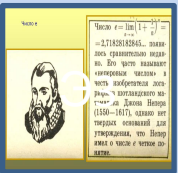
Замечание



# Элементы теории пределов



$$x_n = \frac{1}{n}$$



## Непрерывность функции

### Теорема 5.7 (непрерывность обратной функции)

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна и строго монотонна на промежутке  $[a; b]$  (допустим, возрастает). Тогда существует обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ , которая непрерывна на промежутке  $[f(a); f(b)]$ .

### Доказательство.

Непрерывная строго монотонная функция является биективным отображением  $f : [a; b] \rightarrow [f(a); f(b)]$ . Поэтому существует обратная функция  $f^{-1} : [f(a); f(b)] \rightarrow [a; b]$ .

Непрерывность функции  $x = f^{-1}(y)$  очевидна по графику: линии  $y = f(x)$  и  $x = f^{-1}(y)$  совпадают.

