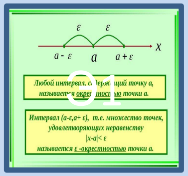
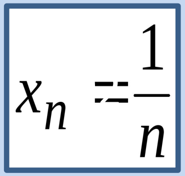
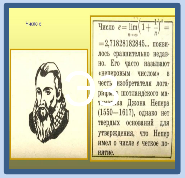
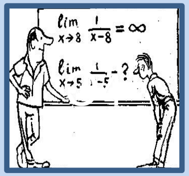
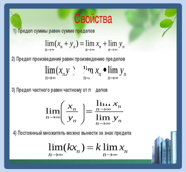
Элементы теории пределов

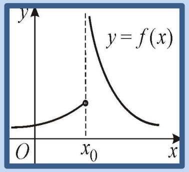


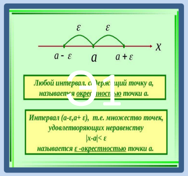


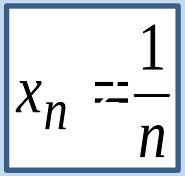


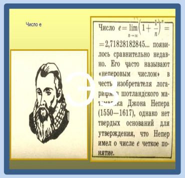


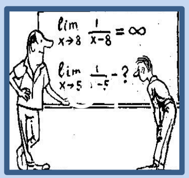


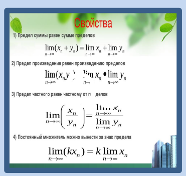


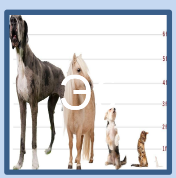


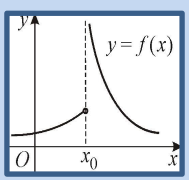












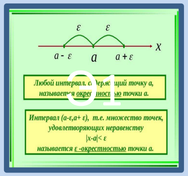
Элементы теории пределов

Окрестность точки

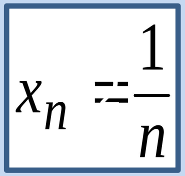
$$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon), \ \varepsilon > 0$$

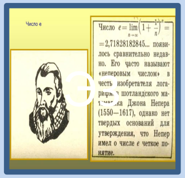
$U_\varepsilon(\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right)$	$x \in U_\varepsilon(\infty) \Leftrightarrow \lvert x \rvert > \frac{1}{\varepsilon}$
$U_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right)$	$x \in U_\varepsilon(+\infty) \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$
$U_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$x \in U_\varepsilon(-\infty) \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon}$

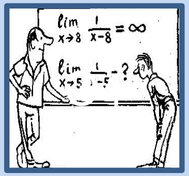
$$x \in \dot{U}_\varepsilon(a) \Leftrightarrow 0 < \lvert x - a \rvert < \varepsilon$$

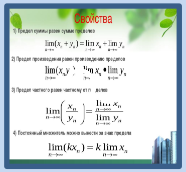


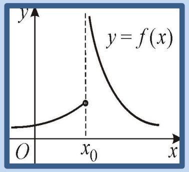
Элементы теории пределов











2. Предел числовой последовательности

Задача 1. Записать последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в развернутом виде (списком элементов), изобразить на числовой прямой или на плоскости. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Описать предельное поведение последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ разными способами: Дать формальное и словесное описание предельного поведения последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (формальное описание = на языке мат. символов, запись (1)).

1. $\left\{\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

2. $\left\{(-3)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

3. $\left\{\ln n\right\}_{n=1}^{\infty}$

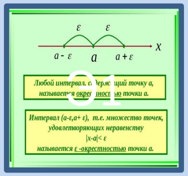
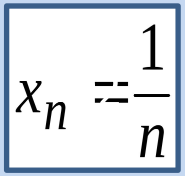
4. $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

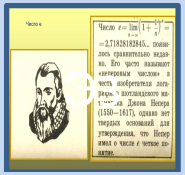
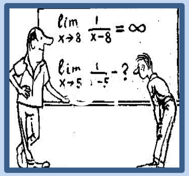
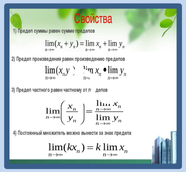
5. $\left\{\operatorname{arctg} n\right\}_{n=1}^{\infty}$

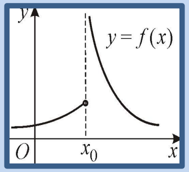
6. $\left\{\frac{(-1)^n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

7. $\left\{\frac{n}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$

Элементы теории пределов

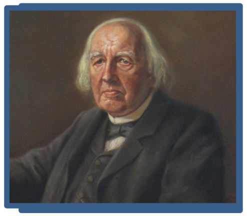



Свойства числовых последовательностей

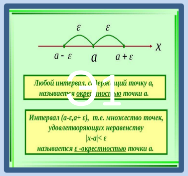
Определение

Лемма

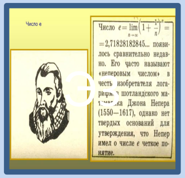
Теорема Вейерштрасса

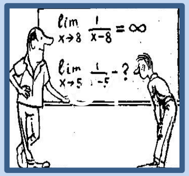


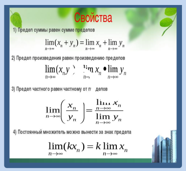
Элементы теории пределов

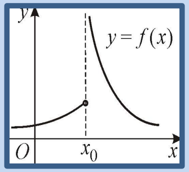


$$x_n = \frac{1}{n}$$



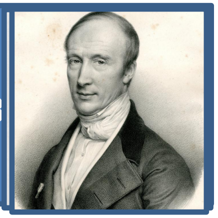






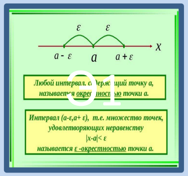
3. Предел числовой функции

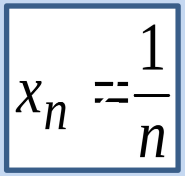
Определение (по Коши)

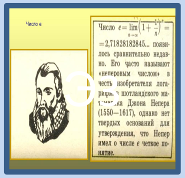


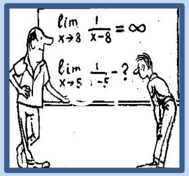
Иллюстраци и

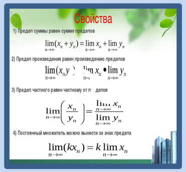
Лемма 2.2. (связь двустор. и одностор. пределов)

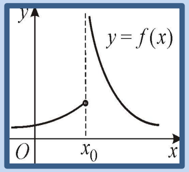












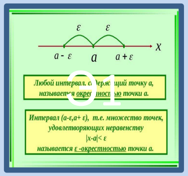
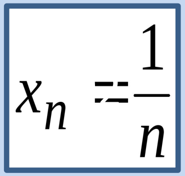
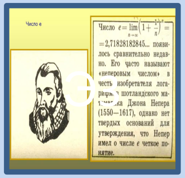
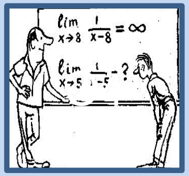
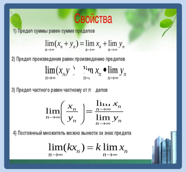
Элементы теории пределов

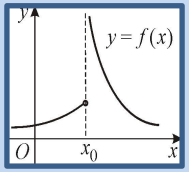
Локальные характеристики функций.

- определение
- Лемма 2.7 (ограниченность и отделенность от нуля)
- Задача

Свойства пределов числовых последовательностей и функций

- Лемма 3.1 (свойства б.м. и б.б.)
- Лемма 3.2 (свойства конечных пределов)
- Задача
- Неопределенности
- Лемма 3.3 (предельный переход в неравенствах)
- Теорема (замечательные пределы)



Элементы теории пределов

Сравнение бесконечно малых (больших) величин

Для сравнения двух бесконечно малых (больших) функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 находят предел их отношения в этой точке.

Эквивалентные б.м. (б.б.)

Степенная шкала

Определение

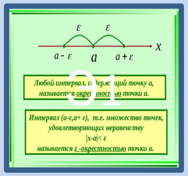
Определение

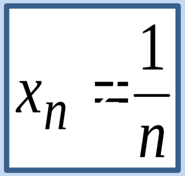
Таблица

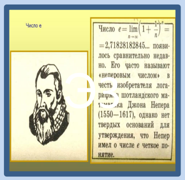
Задача

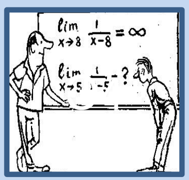
Задача

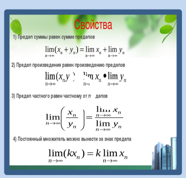
Элементы теории пределов

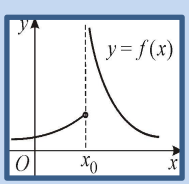












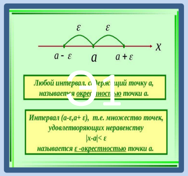
Определение непрерывности. Классификация разрывов

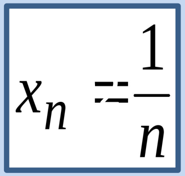
- Определение (непрерывность в точке)
- Леммы 5.2 и 5.3
- Определение (Непрерывность на промежутке)
- Леммы о непрерывности элементарных функций
- Классификация разрывов
- Задача

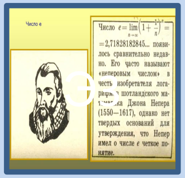
Свойства непрерывных функций на замкнутом промежутке

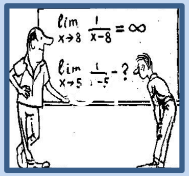
- Теорема Больцано - Коши
- Теорема Вейерштрасса
- Теорема о непрерывности обратной функции

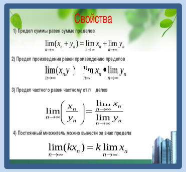
Элементы теории пределов

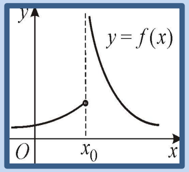












Определение 1.3 (характеристики числовых последовательностей)

[в квадратных скобках указаны подходящие примеры из задачи 1]

Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

возрастает (строго), если $x_n \le x_{n+1}$ $(x_n < x_{n+1})$ $\forall n$; [3,5]

убывает (строго), если $x_n \ge x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$ $\forall n$; [7]

монотонная, если она является либо возрастающей, либо убывающей; [3,5,7]

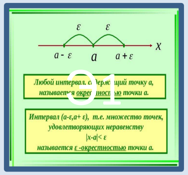
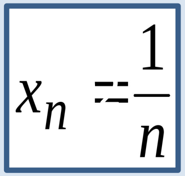
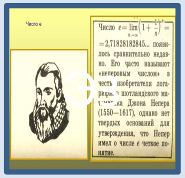
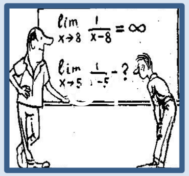
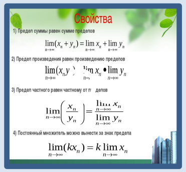
ограниченная, если $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \le x_n \le \beta \ \forall n$ или $\exists c > 0 : |x_n| \le c \ \forall n$; [1,4,5,6,7]

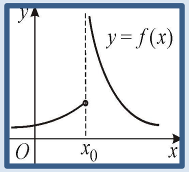
сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$, т. е. существует конечный предел; [1,5,6,7]

расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует; [2,3,4]

бесконечно малая, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; [1,6]

бесконечно большая, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. [2,3]

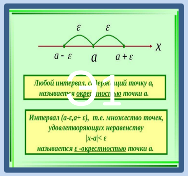


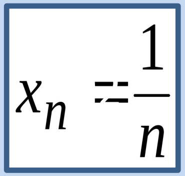
Элементы теории пределов

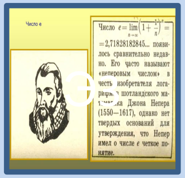
Лемма 1.4 (об ограниченности сходящейся последовательности)

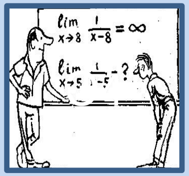
Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она ограничена.

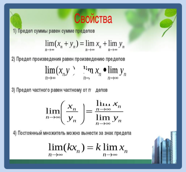
Элементы теории пределов

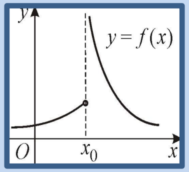










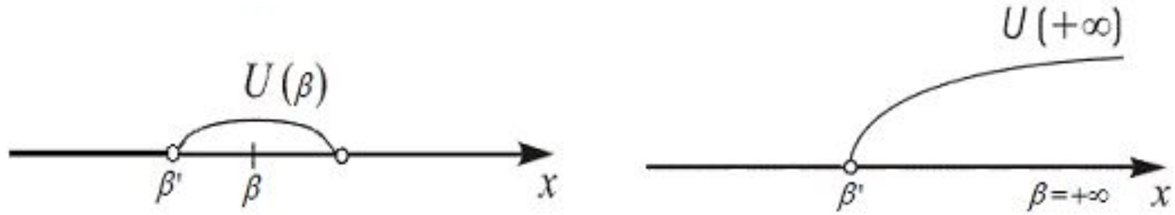


Доказательство.

▷ Проведем доказательство первой части теоремы.

Пусть последовательность возрастает и $\beta = \sup\{x_n\}$, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим произвольную окрестность $U(\beta)$ и обозначим символом β' её левый конец. На рисунках изображена окрестность точки β в конечном и в бесконечном случае.

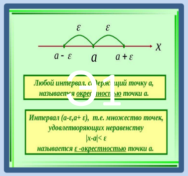


Определение супремума можно записать в следующем виде:

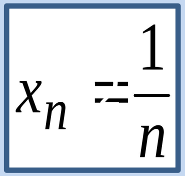
$$\sup\{x_n\} = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_n \le \beta \quad \forall n \\ \forall \beta' < \beta \quad \exists n_0 : \ x_{n_0} > \beta' \end{cases}$$

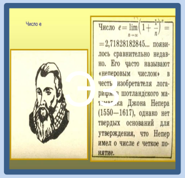
Так как последовательность возрастает, то $x_n > \beta'$ при $n \ge n_0$, то есть $x_n \in (\beta'; \beta] \subset U(\beta)$, начиная с номера n_0. По определению предела это и означает, что $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \beta$.

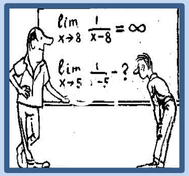
Вторая часть теоремы доказывается аналогичным образом. ◁

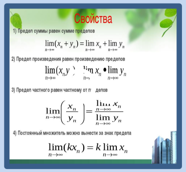


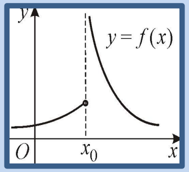
Элементы теории пределов











Карл Тéодор Вильгéльм Вéйерштрасс

(1815—1897)

— выдающийся немецкий математик, «отец современного математического анализа».

Цитаты: Нельзя быть настоящим математиком, не будучи немного поэтом.

В **1834** году окончил с отличием гимназию и по настоянию отца, поступил на юридический факультет Боннского университета. Проучившись 4 года, в течение которых вместо юриспруденции Вейерштрасс усиленно занимался математикой, он бросил университет и поступил в университет Мюнстера

1842: по окончании Академии получает место учителя в провинциальной католической прогимназии, где проработал 14 лет. Навыки учителя в дальнейшем помогли Вейерштрассу стать лучшим преподавателем Германии, а редкое свободное время (чаще всего ночное) он использовал для математических исследований. **1856**. Берлинскому университету он отдал 40 лет жизни.

С конца 1850-х годов международная известность Вейерштрасса быстро растёт. Этим он обязан великолепному качеству своих лекций.

Здоровье Вейерштрасса оставляет желать лучшего — сказывается постоянное переутомление в молодые годы. В **1861** году во время выступления у него начался сильный приступ головокружения — пришлось прервать лекцию. Больше Вейерштрасс никогда не читал лекции стоя — он неизменно сидел, а один из лучших студентов писал за него на доске.

1870: знакомится с двадцатилетней Софьей Ковалевской, приехавшей в Берлин для подготовки диссертации. Нежное чувство к своей Sonja Вейерштрасс пронёс сквозь всю жизнь (он так и не женился). Вейерштрасс помогает Ковалевской выбрать тему диссертации и метод подхода к решению, в дальнейшем регулярно консультирует. После защиты диссертации Ковалевская уехала, на письма учителя отвечала редко и неохотно.

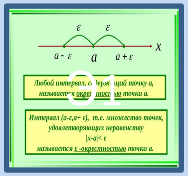
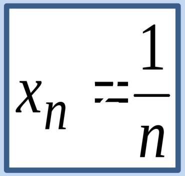
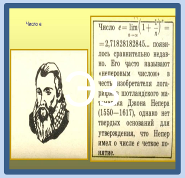
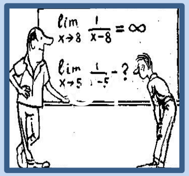
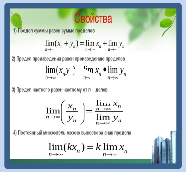
1883: после самоубийства мужа Ковалевская, оставшаяся без средств с пятилетней дочерью, приезжает в Берлин и останавливается у Вейерштрасса. Ценой огромных усилий, используя весь свой авторитет и связи, Вейерштрассу удаётся выхлопотать ей место профессора в Стокгольмском университете.

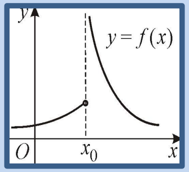
1889: Вейерштрасс сильно заболел. **1891**: неожиданно умирает Софья Ковалевская.

1897: после продолжительной болезни Вейерштрасс скончался от осложнений после гриппа.

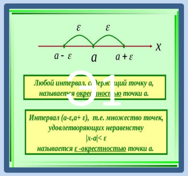
В его честь был назван кратер Вейерштрасс на Луне. Имя Вейерштрасса носит математический институт в Берлине (WIAS).

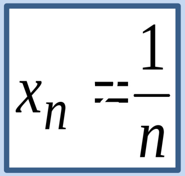
Элементы теории пределов

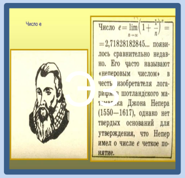






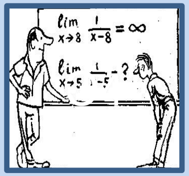


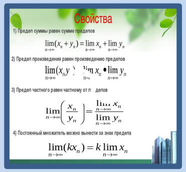
Джон
Непер
(1550-1617)

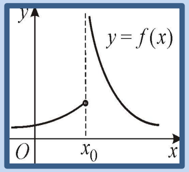










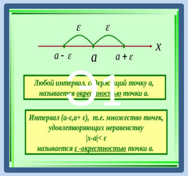


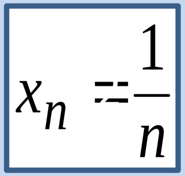
Элементы теории пределов

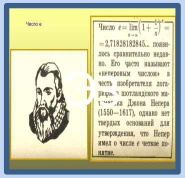
Леонард Эйлер

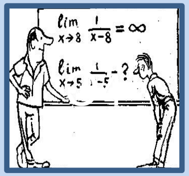
(1797-1783)

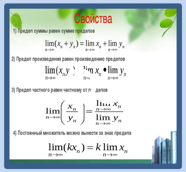
Элементы теории пределов

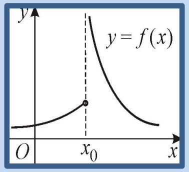












История числа e

Число появилось сравнительно недавно. Его иногда называют "неперовым числом" в честь изобретателя логарифмов шотландского математика Джона Непера (1550-1617), однако необоснованно, так как нет твёрдых оснований для утверждения, что Непер имел о числе *e* чёткое представление".

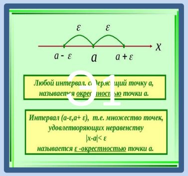
Впервые обозначение "*e*" ввёл Леонард Эйлер (1707-1783). Он также вычислил точные 23 десятичные знака этого числа

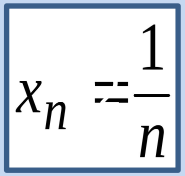
Способы определения

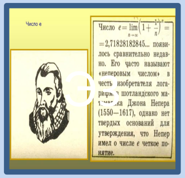
- Через предел (второй замечательный предел): $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
- Как сумма ряда: $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ или $\frac{1}{e} = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$
- Как единственное число *a*, для которого выполняется $\int\limits_1^a \frac{dt}{t} = 1.$
- Как единственное положительное число *a*, для которого верно $\frac{d}{dt}a^t = a^t.$

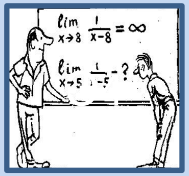
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$ Впервые константа негласно присутствует в приложении к переводу на английский язык вышеупомянутой работы Непера, опубликованному в 1618 году. Саму же константу впервые вычислил швейцарский математик Бернулли при анализе следующего предела:

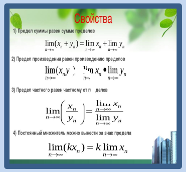
Букву *e* начал использовать Эйлер в 1727 году. Соответственно, *e* обычно называют *числом Эйлера*. Почему была выбрана именно буква *e*, точно неизвестно. Возможно, это связано с тем, что с неё начинается слово *exponential* ("показательный", "экспоненциальный"). Другое предположение заключается в том, что буквы *a*, *b*, *c* и *d* уже довольно широко использовались в иных целях, и *e* была первой "свободной" буквой. Неправдоподобно предположение, что Эйлер выбрал *e* как первую букву в своей фамилии (нем. *Euler*).

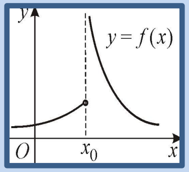












Элементы теории пределов

Пример применения теоремы 1.5 – определение числа *e*.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такого вида:

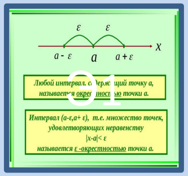
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Выпишем несколько первых членов последовательности:

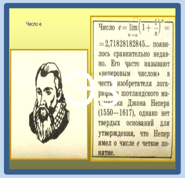
$$x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2, \quad x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \approx 2,25, \quad x_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,37,$$

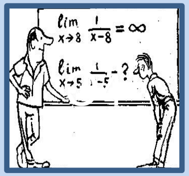
$$x_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \approx 2,44, \quad x_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125} \approx 2,49, \quad x_6 = \left(1+\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{117649}{46656} \approx 2,52 \ldots$$

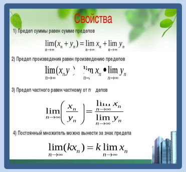
Элементы теории пределов

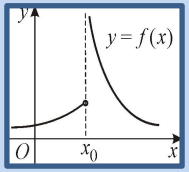


$$x_n = \frac{1}{n}$$





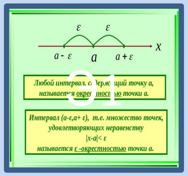


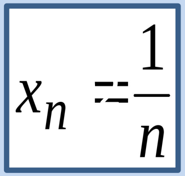


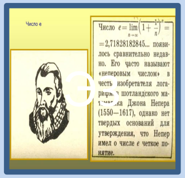
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

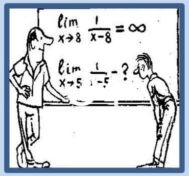
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{k!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-k)} = \frac{n\cdot (n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

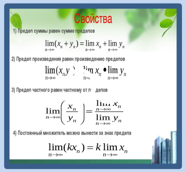
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\cdot (n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!\cdot n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

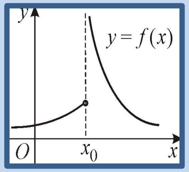












Элементы теории пределов

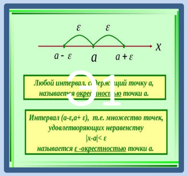
Оценим сверху значения x_n:

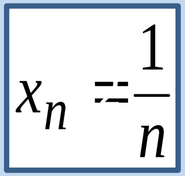
$$x_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} <$$

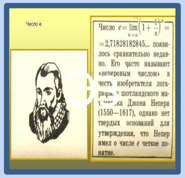
$$< 1 + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)}_{\text{геометрическая прогрессия}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 1 + 2 = 3\,.$$

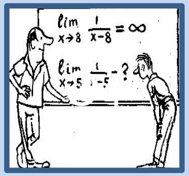
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

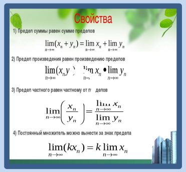
Элементы теории пределов

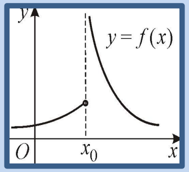






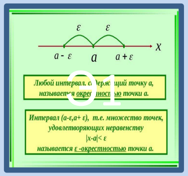
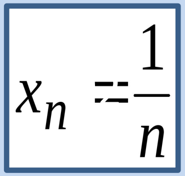
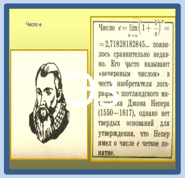
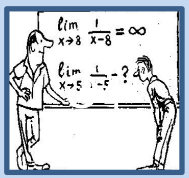
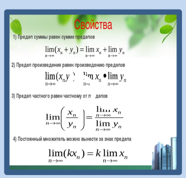
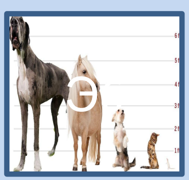
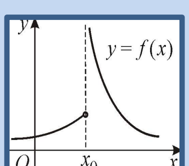






3. Предел числовой функции

Обозначается	Читается
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$	предел $f(x)$ в точке x_0 (при стремлении x к x_0) равен a
$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} a$	$f(x)$ стремится к a, когда x стремится к x_0
$f(x) \to a$ при $x \to x_0$	

Элементы теории пределов

3. Предел числовой функции

I. В зависимости от значения предела:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ – конечный предел;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty\,,\ +\infty\,,\ -\infty$ – бесконечный предел;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

II. В зависимости от точки x_0:

$x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ – двусторонний предел в точке x_0;

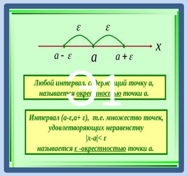
$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ – односторонний (правосторонний) предел в точке x_0 ($x \to x_0$ и $x > x_0$);

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ – левосторонний предел в точке x_0 ($x \to x_0$ и $x < x_0$);

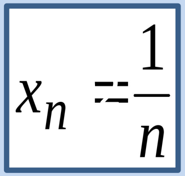
$x_0 = \infty$

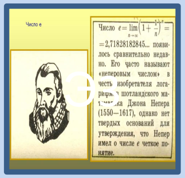
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ – двусторонний предел в бесконечно удаленной точке;

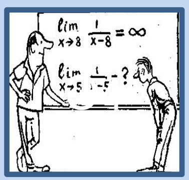
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ – односторонние пределы в бесконечно удаленной точке.

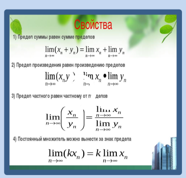


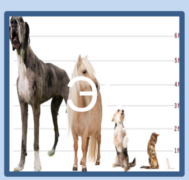
Элементы теории пределов

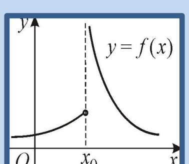












3. Предел числовой функции

Определение 2.1 (двусторонний предел)

Пусть $x_0, a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, включающем некоторую проколотую окрестность точки x_0 (т. е. в самой точке x_0 функция может быть не определена).

Значение a называется *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой окрестности $U(a)$ существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0)$, образ которой принадлежит $U(a)$.

На формальном языке математических символов:

Определение 2.1' (односторонние пределы)

Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Формальные записи определений *правостороннего* и *левостороннего* пределов в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ и в бесконечно удаленной точке выглядят следующим образом:

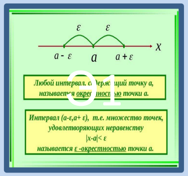
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0), x > x_0 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a);$$

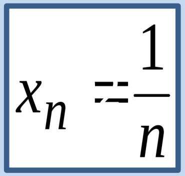
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0), x < x_0 \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a);$$

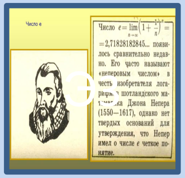
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ x \in U_\delta(+\infty) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a);$$

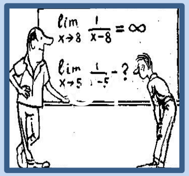
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = a \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ x \in U_\delta(-\infty) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a).$$

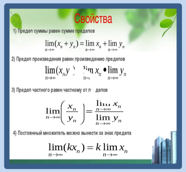
Элементы теории пределов

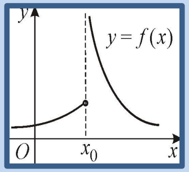












Огюсте́н Луи́ Коши́

(21.08.1789- 23.05.1857)

— французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Родился в семье чиновника, глубоко верующего монархиста. По окончании школы стал инженером путей сообщения в Шербуре. Здесь он начал самостоятельные математические исследования.

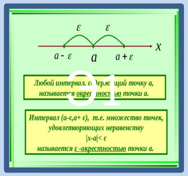
В 1811—1812 годах Коши представил Парижской академии несколько работ.

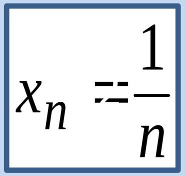
1818: женился на Алоизе де Бюр. У них родились две дочери.

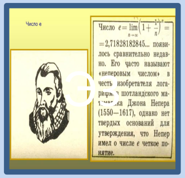
Коши написал свыше 800 работ, полное собрание его сочинений содержит 27 томов. Его работы относятся к различным областям математики (преимущественно к математическому анализу) и математической физики.

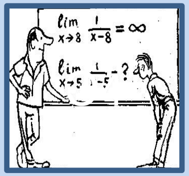
Коши впервые дал строгое определение основным понятиям математического анализа — пределу, непрерывности, производной, дифференциалу, интегралу, сходимости ряда и т. д. Ему также принадлежат исследования по геометрии (о многогранниках), по теории чисел, алгебре и другим областям математики.

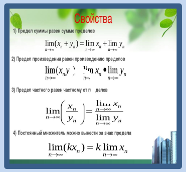
В 1935 году Международный астрономический союз присвоил имя О. Л. Коши кратеру на видимой стороне Луны.

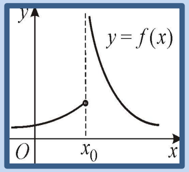






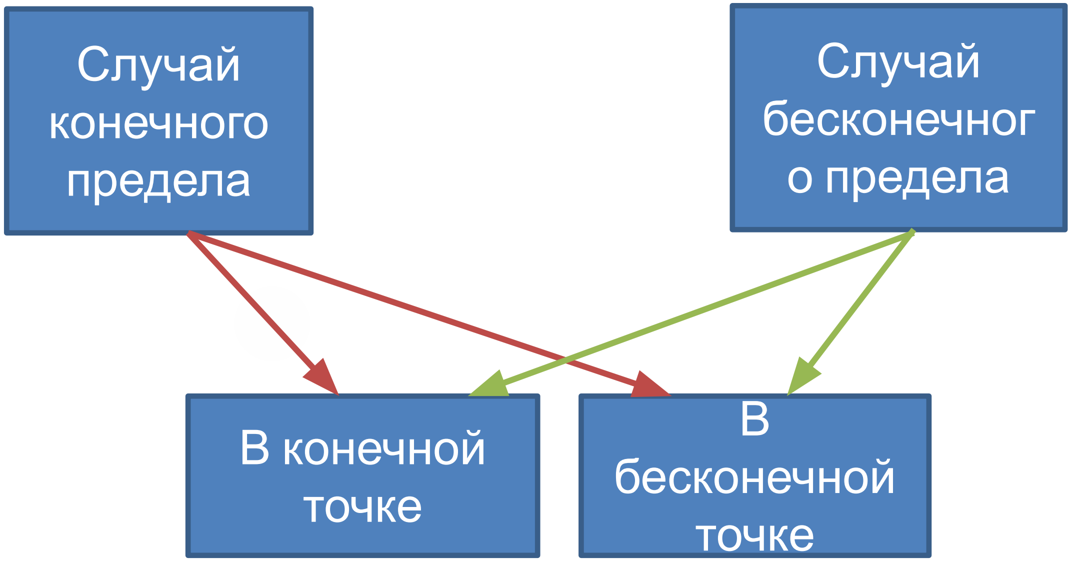


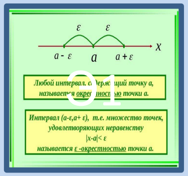


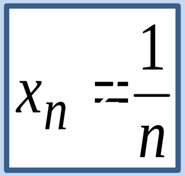


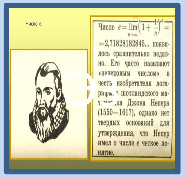
Элементы теории пределов

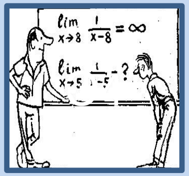
3. Предел числовой функции

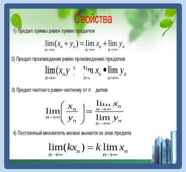


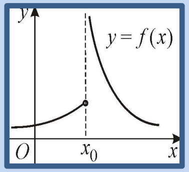








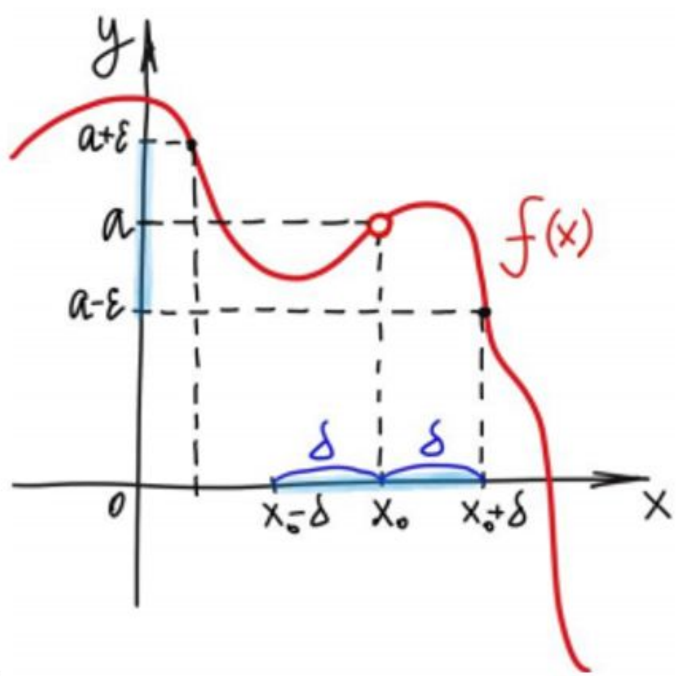




Элементы теории пределов

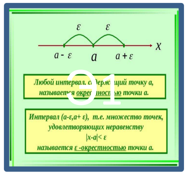
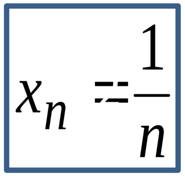
1. Случаи конечного предела в конечной точке: $x_0, a \in \mathbb{R}$

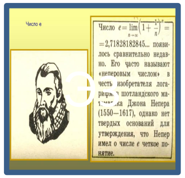
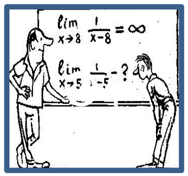
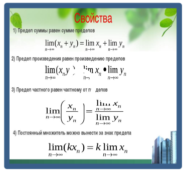
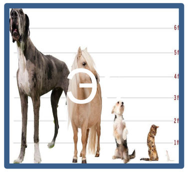
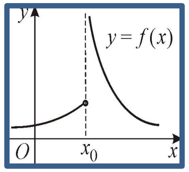
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

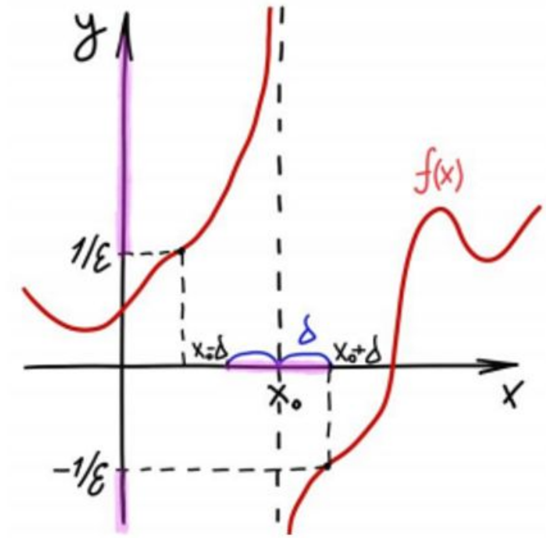



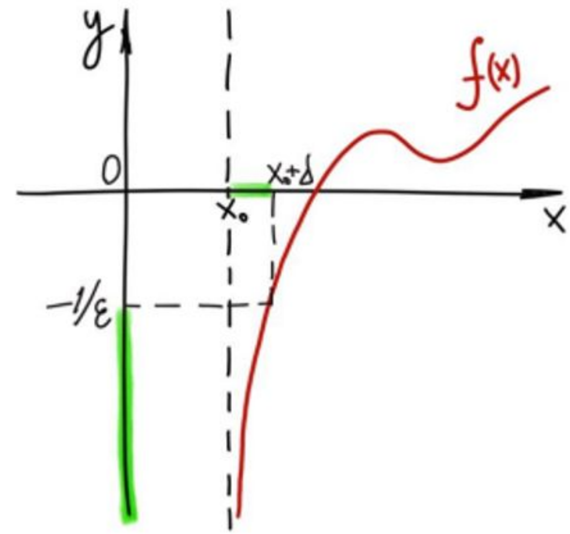






Элементы теории пределов

2. Случаи бесконечного предела в конечной точке: $x_0 \in \mathbb{R}$

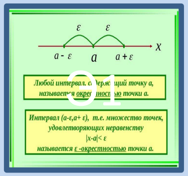
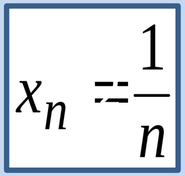
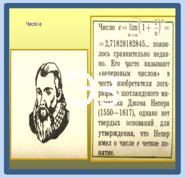
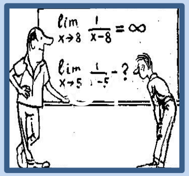
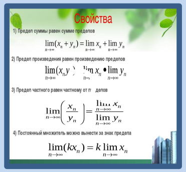
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

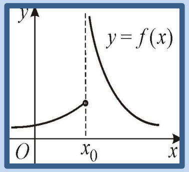




$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

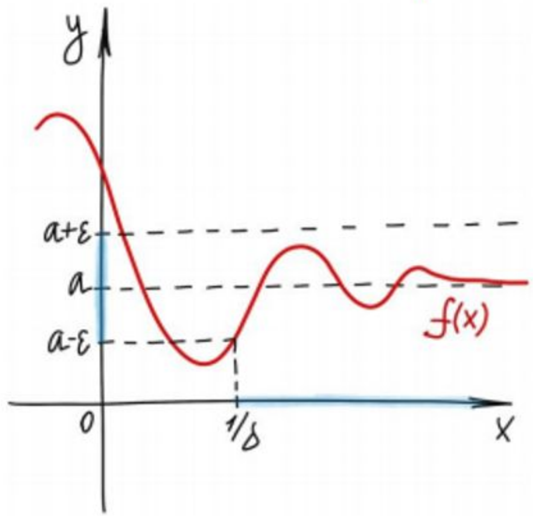
Элементы теории пределов

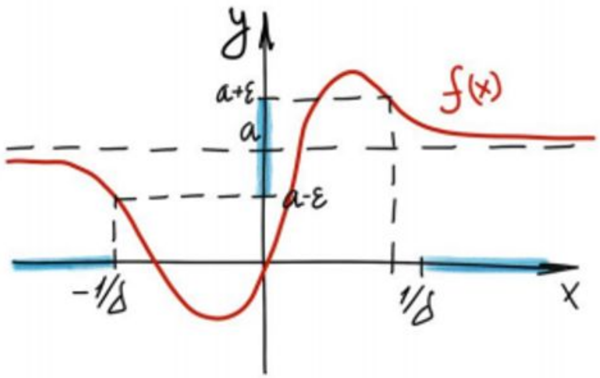


3. Случаи конечного предела в бесконечно удаленной точке: $a \in \mathbb{R}$

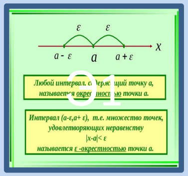
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ x > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

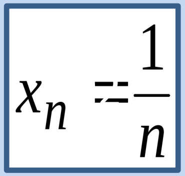


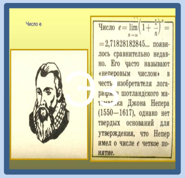
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ |x| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

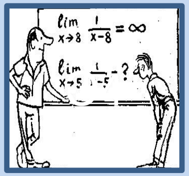


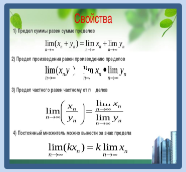
Элементы теории пределов

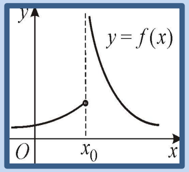






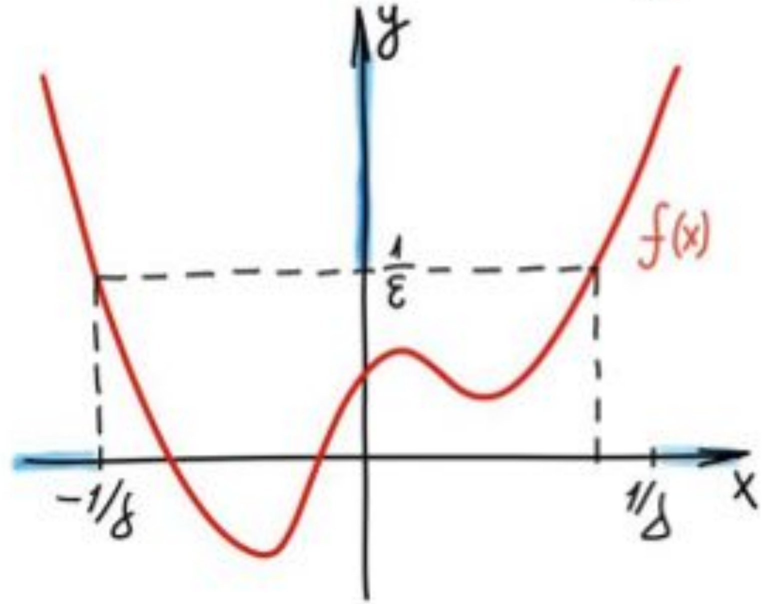




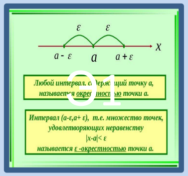
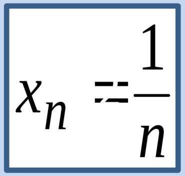


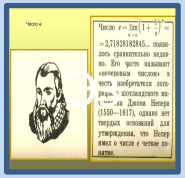
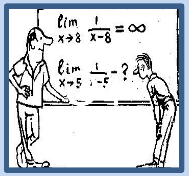
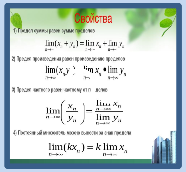
4. Случаи бесконечного предела в бесконечно удаленной точке:

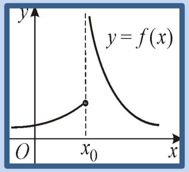
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ |x| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$



Упражнение. Расшифровать и проиллюстрировать формальные записи предела в оставшихся ситуациях: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ и т.д..

Элементы теории пределов

Лемма 2.2 (связь двустороннего и односторонних пределов)
Пусть $x_0, a \in \overline{\mathbb{R}}$. Двусторонний предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует и равен a тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела и оба равны a:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = a.$$

Доказательство.

▷ Докажем эту лемму для случая $x_0 \in \mathbb{R}$. Напомним определения двустороннего и односторонних пределов:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(a). \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1 > 0 :\ x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0), x > x_0 \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(a); \qquad (3)$$

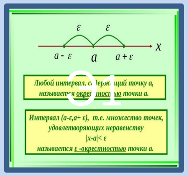
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_2 > 0 :\ x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0), x < x_0 \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(a). \qquad (4)$$

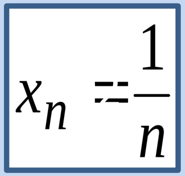
Если выполнено (2), то (3) и (4) также верны, так как в них можно взять $\delta_1 = \delta_2 = \delta$.

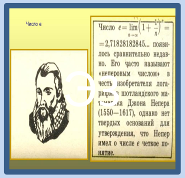
Если выполнены (3) и (4), то (2) также верно, так как в нем можно взять $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

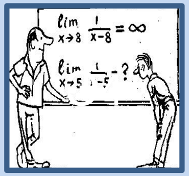
Случай $x_0 = \infty$ обрабатывается аналогичным образом.

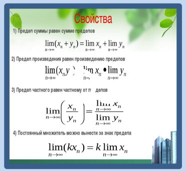
◁

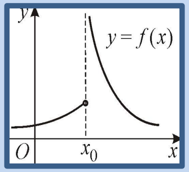












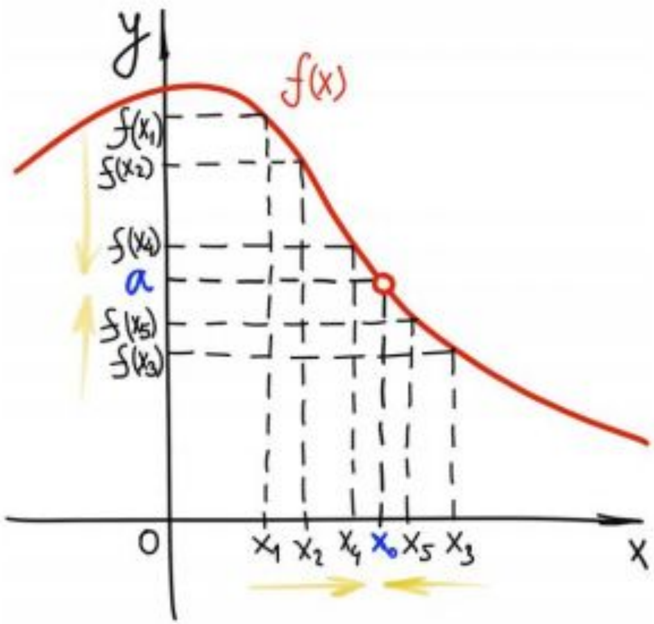
Элементы теории пределов

Определение 2.3 (двусторонний предел)

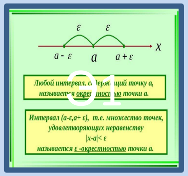
Пусть $x_0, a \in \overline{\mathbb{R}}$.

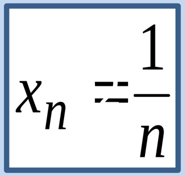
Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, включающем некоторую проколотую окрестность точки x_0. Тогда

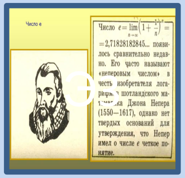
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \;\; x_n \to x_0, x_n \neq x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a.$$

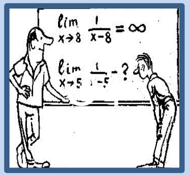


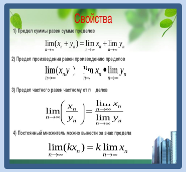
Элементы теории пределов

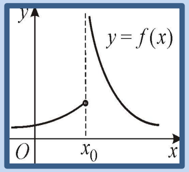












Биография

Генрих Эдуард Гейне

(1921-1881)

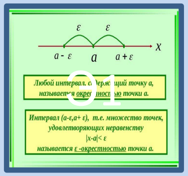
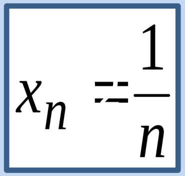
-немецкий математик, профессор. Ученик Дирихле.

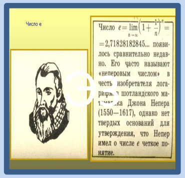
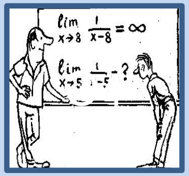
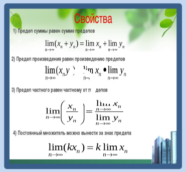
Изучал математику в Гёттингенском университете, Берлинском университете и в Альбертине в Кёнигсберге.

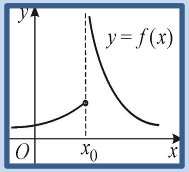
Был профессором математики в Бонне и в Галле.

Работая в Галле, он занимался преимущественно теорией потенциала, теорией функций и дифференциальными уравнениями

Его именем названы теорема Кантора — Гейне, теорема Гейне — Бореля, определение предела функции по Гейне.



Элементы теории пределов

Теорема 2.4
Определения предела функции 2.1 (по Коши) и 2.3 (по Гейне) равносильны.

Доказательство.
Есть два подхода к доказательству утверждений типа $A \Leftrightarrow B$: доказать импликации $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ либо доказать импликации $A \Rightarrow B$ и *не* $A \Rightarrow$ *не* B. Будем использовать второй подход.

$\triangleright$

I. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ (по Коши). Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a). \qquad (5)$$

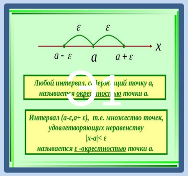
Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ (по Гейне). Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, такую что $x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0$, и покажем, что (5) гарантирует $f(x_n) \to a$.
Напомним, что согласно определению 1.1 предела последовательности

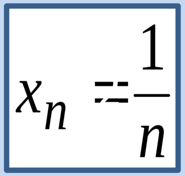
$$f(x_n) \to a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0:\ n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(a). \qquad (6)$$

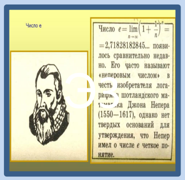
Зафиксируем произвольное значение $\varepsilon > 0$ и соответствующее ему значение $\delta > 0$ из (5).
Из определения 1.1 и (5) вытекает следующее:

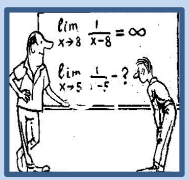
$$x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad \exists n_0:\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \overset{(5)}{\Rightarrow} f(x_n) \in U_\varepsilon(a).$$

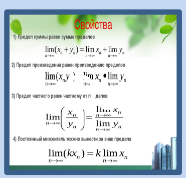
Ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем (6).

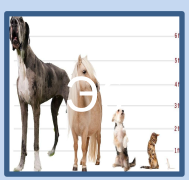


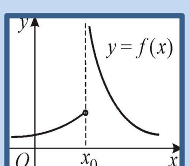












Элементы теории пределов

II. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq a$ (по Коши). Это значит, что

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \ f(x) \notin U_\varepsilon(a). \tag{7}$$

Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq a$ (по Гейне). Это значит, что

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : \ x_n \to x_0, x_n \neq x_0 \text{ и } f(x_n) \not\to a. \tag{8}$$

Возьмем значение ε, наличие которого гарантирует (7), и рассмотрим для него разные значения δ:

$$\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists x_1 \in \overset{\circ}{U}_1(x_0) : \ f(x_1) \notin U_\varepsilon(a);$$

$$\delta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \exists x_2 \in \overset{\circ}{U}_{1/2}(x_0) : \ f(x_2) \notin U_\varepsilon(a);$$

$$\delta = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \exists x_3 \in \overset{\circ}{U}_{1/3}(x_0) : \ f(x_3) \notin U_\varepsilon(a);$$

$$\ldots$$

$$\delta = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \exists x_n \in \overset{\circ}{U}_{1/n}(x_0) : \ f(x_n) \notin U_\varepsilon(a).$$

Таким образом, на основе (7) построена последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая что что $x_n \to x_0, x_n \neq x_0$ и $f(x_n) \not\to a$ (рис. 2.8, 2.9).

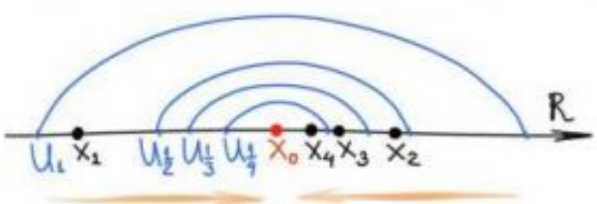


Рис. 2.8

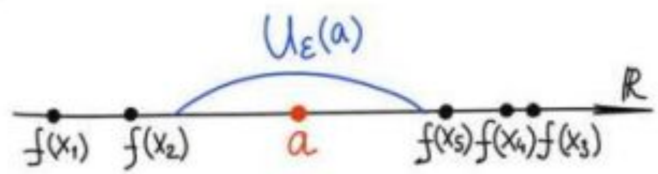
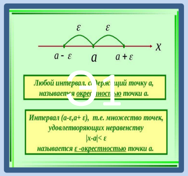
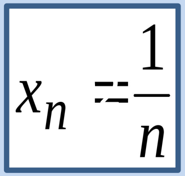
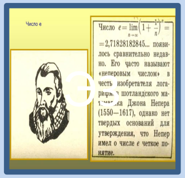
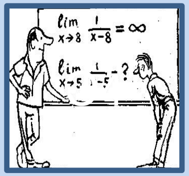
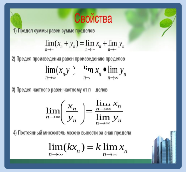
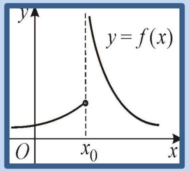


Рис. 2.9

Элементы теории пределов

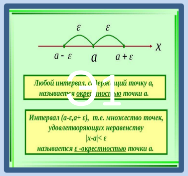




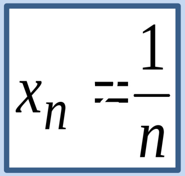



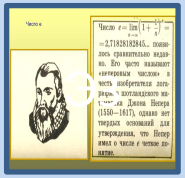
Следствие 2.5 (единственность предела функции)

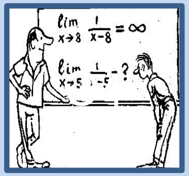
Если предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, то он единственный.

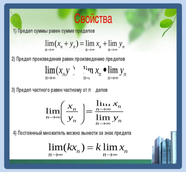
Элементы теории пределов

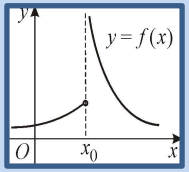












Определение 2.6 (локальные характеристики функции)

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Функция $f(x)$, называется

бесконечно малой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$;

бесконечно большой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$;

ограниченной (локально ограниченной) в точке x_0, если она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0:

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0)\, \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R}:\ \alpha \le f(x) \le \beta \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$$

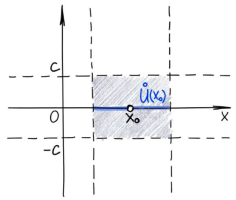
или

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0)\, \exists c > 0:\ |f(x)| \le c \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0); \qquad \text{(A)}$$

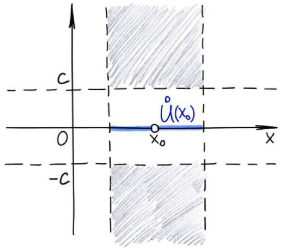
отделенной от нуля в точке x_0, если она отделена от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0:

$$\exists \overset{\circ}{U}(x_0)\, \exists c > 0:\ |f(x)| \ge c \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0). \qquad \text{(B)}$$

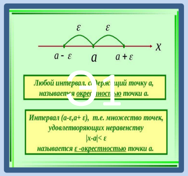
A

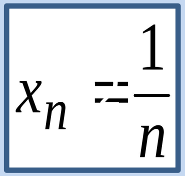


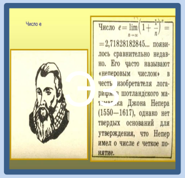
B

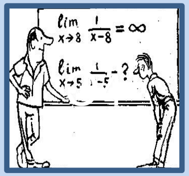


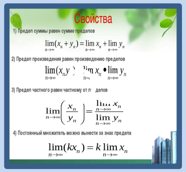
Элементы теории пределов

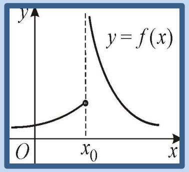












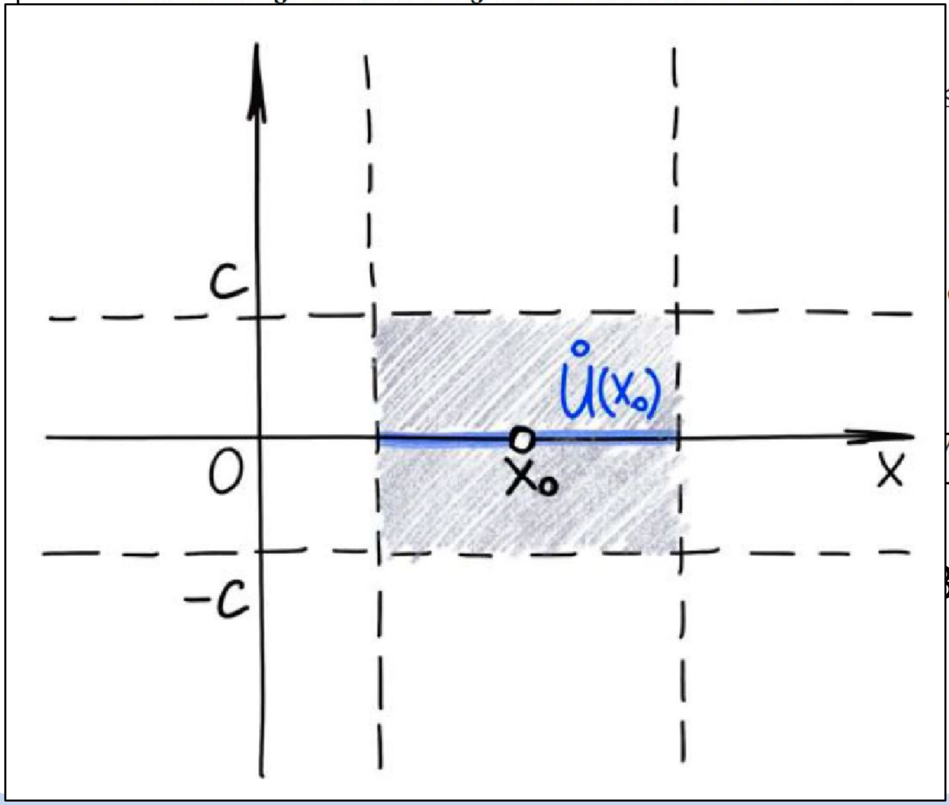
Определение 2.6 (локальные характеристики функции)

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Функция $f(x)$, называется

бесконечно малой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$;

бесконечно большой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$;

ограниченной (локально ограниченной) в точке x_0, если она ограничена в

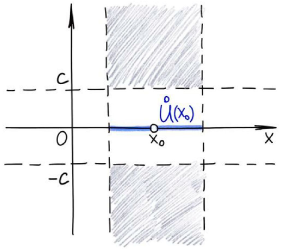


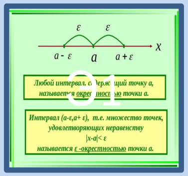
$\leq \beta \;\; \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$

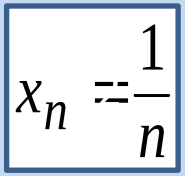
$\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$; (A)

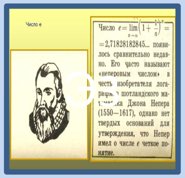
от нуля в некоторой проколотой

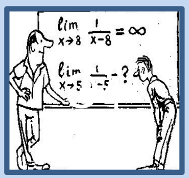
$\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$. (B)

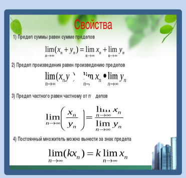


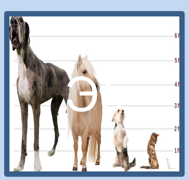


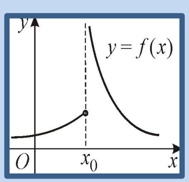












Элементы теории пределов

Определение 2.6 (локальные характеристики функции)

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Функция $f(x)$, называется

бесконечно малой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$;

бесконечно большой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$;

ограниченной (локально огран

некоторой проколотой окрест

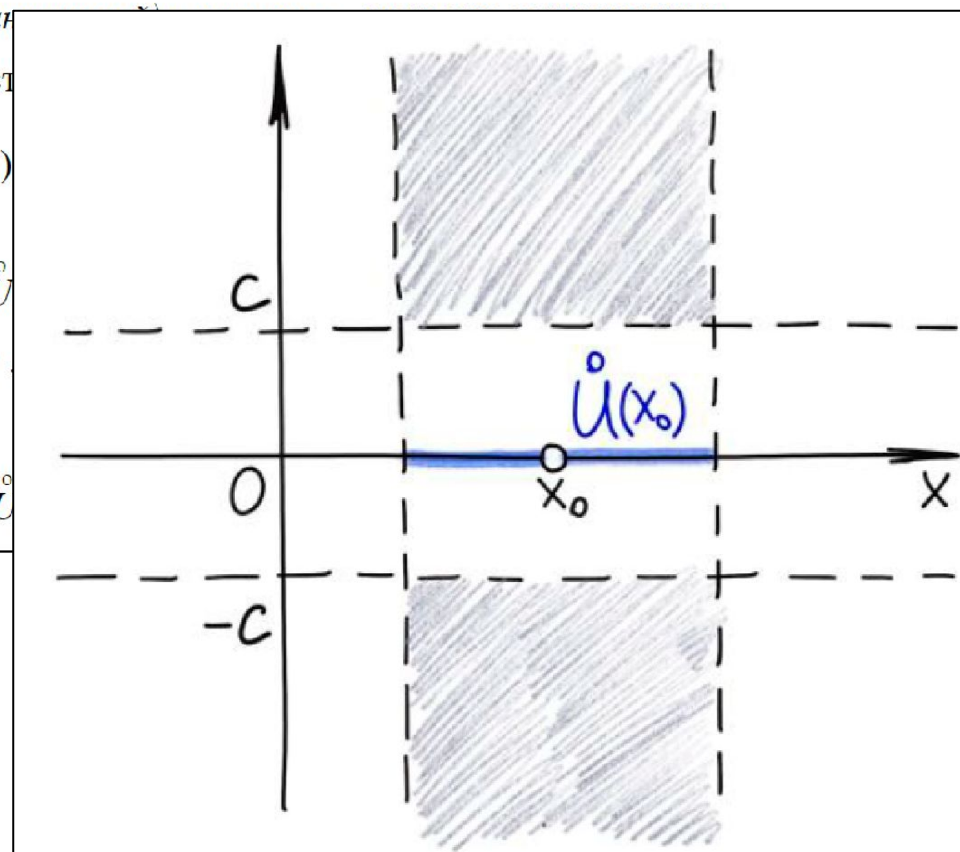
$\exists \overset{\circ}{U}(x_0)$

$\exists \overset{\circ}{U}$

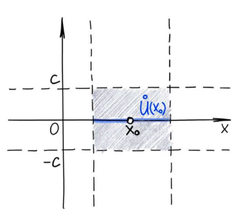
отделенной от нуля в точке

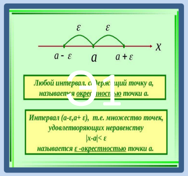
окрестности точки x_0:

$\exists \overset{\circ}{U}$

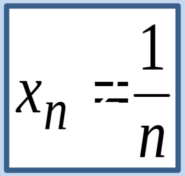


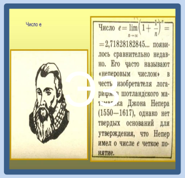
A

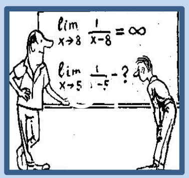


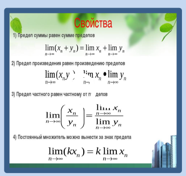


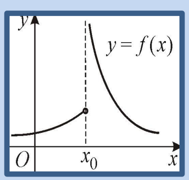
Элементы теории пределов











Лемма 2.7

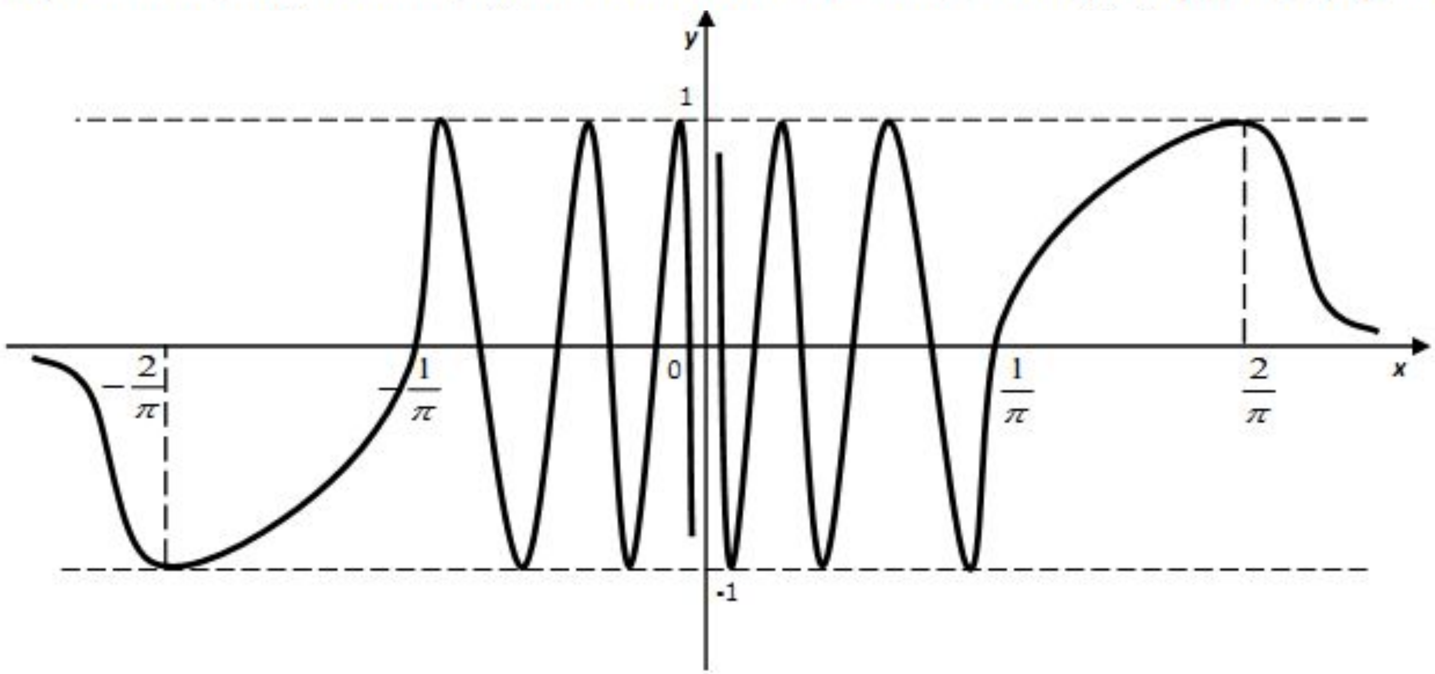
Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0. Тогда верно следующее:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ ограничена в точке } x_0;$$

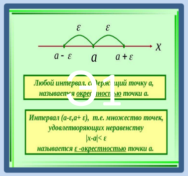
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ отделена от нуля в точке } x_0.$$

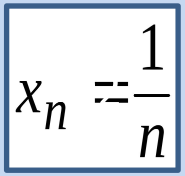
Доказательство 1 | Доказательство 2 | Замечание

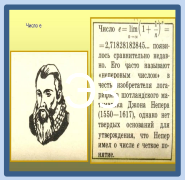
Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Выберем любое значение $0 < \varepsilon < |a|$. Тогда из (9) следует, что в

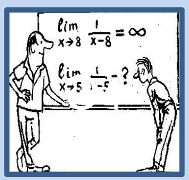


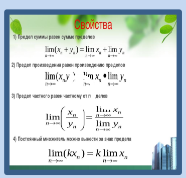
Элементы теории пределов

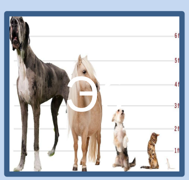


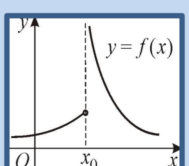




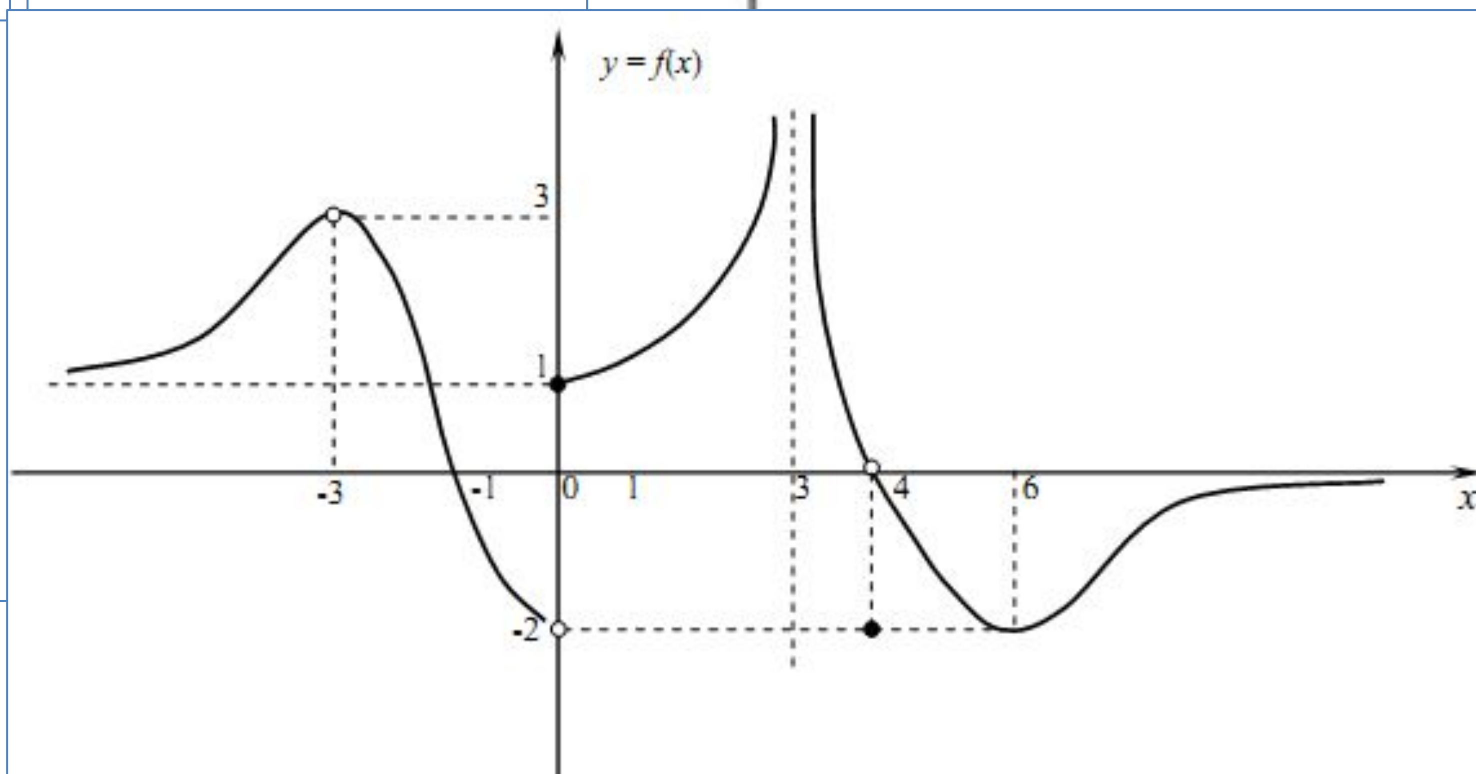




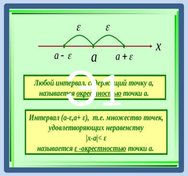




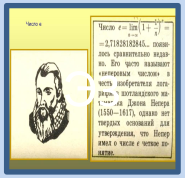
Задача. Найти пределы функции $f(x)$ в нескольких точках, используя ее график в декартовой системе координат. Указать локальные характеристики функции.

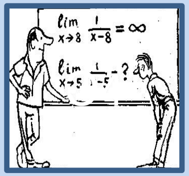


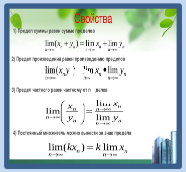
Элементы теории пределов

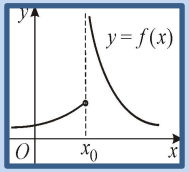


$x_n = \frac{1}{n}$









Лемма 3.1′ (свойства бесконечно больших величин)

Пункт 2

Функция $f(x)$ бесконечно мала в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Это означает, что

$$\forall\varepsilon\,\exists\delta:\ x\in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon; \qquad (1)$$

Функция $g(x)$ ограничена в точке x_0. Это означает, что

$$\exists\delta_0>0\,\exists c>0: x\in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow |g(x)| \le c. \qquad (2)$$

Покажем, что функция $f(x)g(x)$ бесконечно мала в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$:

$$\forall\varepsilon'\,\exists\delta':\ x\in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) \Rightarrow |f(x)g(x)| < \varepsilon'. \qquad (3)$$

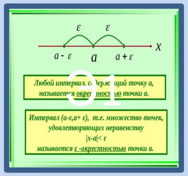
Зафиксируем произвольное значение $\varepsilon' > 0$. Рассмотрим $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{c}$ в (1) и соответствующее значение δ. Тогда (3) выполняется, так как в нем можно взять $\delta' = \min\{\delta, \delta_0\}$:

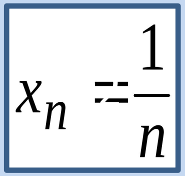
$$x\in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) = \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon'}{c}c = \varepsilon'.$$

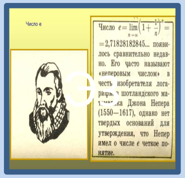
Кроме того, функция $f(x)+g(x)$ ограниченна в проколотой δ'- окрестности точки x_0:

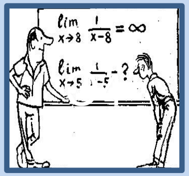
$$x\in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) = \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow |f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon + c = C.$$

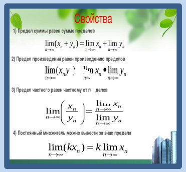
Элементы теории пределов

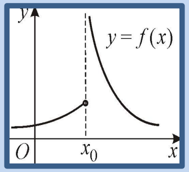












Пункт 5

Докажем сначала вспомогательное утверждение:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0}\frac{1}{1+\alpha(x)}=1.$$

Действительно, расшифруем обе части этого утверждения по определению предела 2.1:

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon\,\exists\delta:\ x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\ \Rightarrow\ |\alpha(x)|<\varepsilon. \qquad (12)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{1+\alpha(x)}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon'\,\exists\delta':\ x\in\overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0)\ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{1+\alpha(x)}-1\right|<\varepsilon'. \qquad (13)$$

Зафиксируем произвольное значение $\varepsilon'>0$. Рассмотрим $\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}$ в (12) и соответствующее значение δ. Тогда (13) выполняется, так как в нем можно взять $\delta'=\delta$:

$$x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\ \Rightarrow\ |\alpha(x)|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{1+\alpha(x)}\right|<\frac{1}{1-\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{1}{1+\alpha(x)}-1\right|=\left|\frac{\alpha(x)}{1+\alpha(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}=\varepsilon'.$$

Согласно пункту 4 для доказательства пункта 5 достаточно убедиться, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)},\ \text{ если } \lim_{x\to x_0}f(x)\neq 0.$$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Воспользуемся пунктами 1, 3 этой леммы и только что доказанным вспомогательным утверждением:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{a+\underbrace{\alpha(x)}_{\text{беск. мал.}}}=\frac{1}{a}\overbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{\alpha(x)}{a}\right)}_{\text{беск. мал.}}}}^{=1}=\frac{1}{a}.$$

Элементы теории пределов

7. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$, $x_0=0$

По свойству 3 бесконечно малых величин (лемма 3.1):

$$x\to 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x}\to\infty.$$

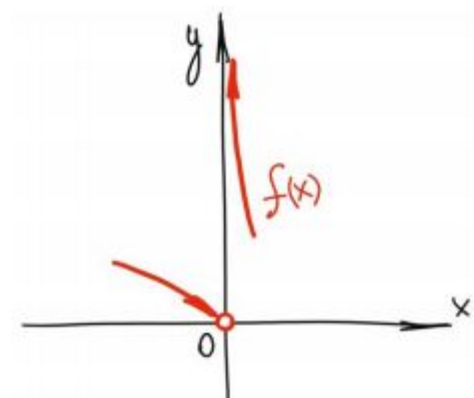
Введем новую переменную $t=\frac{1}{x}$. Поскольку у функции 2^t разное предельное поведение на $+\infty$ и на $-\infty$, то рассмотрим сначала односторонние пределы в бесконечно удаленной точке:

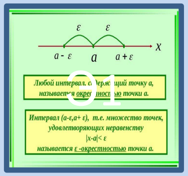
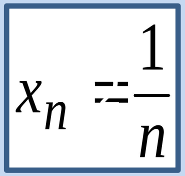
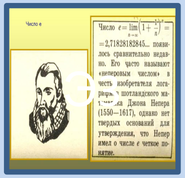
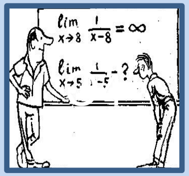
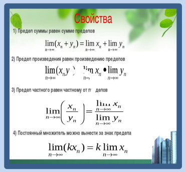
$$x\to +0 \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{x}\to+\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+0}2^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}2^t=+\infty;$$

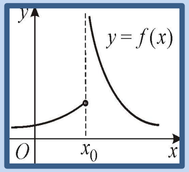
$$x\to -0 \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{x}\to-\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}2^t=0.$$

Так как функция имеет разные односторонние пределы в точке $x_0=0$, то двустороннего предела в этой точке нет: $\lim_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}$ не существует.

Графическое описание:



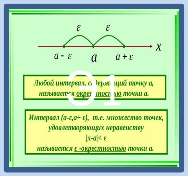


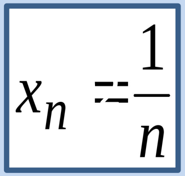
Элементы теории пределов

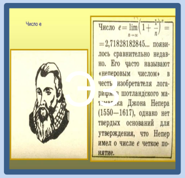
Неопределенности

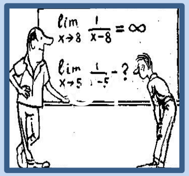
<table>
<tr>
<td>$$\lim_{x\to x_0}\frac{\overset{\to\infty}{f(x)}}{\underset{\to\infty}{g(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$</td>
<td>$$\lim_{x\to x_0}(\underset{\to 0}{f(x)}\cdot\underset{\to\infty}{g(x)})=[0\cdot\infty]$$</td>
<td rowspan="2">$$\lim_{x\to x_0}\left(\underset{\to 1}{f(x)}\right)^{\overset{\to\infty}{g(x)}}=\left[1^{\infty}\right]$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(\underset{\to 0}{f(x)}\right)^{\overset{\to 0}{g(x)}}=\left[0^{0}\right]$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(\underset{\to\infty}{f(x)}\right)^{\overset{\to 0}{g(x)}}=\left[\infty^{0}\right]$$</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\lim_{x\to x_0}\frac{\overset{\to 0}{f(x)}}{\underset{\to 0}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$</td>
<td>$$\lim_{x\to x_0}(\underset{\to+\infty}{f(x)}+\underset{\to-\infty}{g(x)})=[\infty-\infty]$$</td>
</tr>
</table>

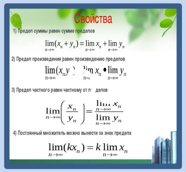
Элементы теории пределов

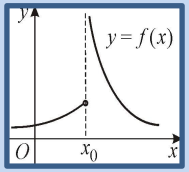












Лемма 3.3

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и $f(x) \le g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Тогда если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Доказательство.

$\triangleright$ Пусть $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0)$.

Используем метод рассуждений от противного. Предположим, что $a > b$.

У двух различных точек a и b координатной прямой (возможно, расширенной) всегда можно указать непересекающиеся ε-окрестности:

$$\exists \varepsilon > 0\colon\ U_{\varepsilon}(a) \cap U_{\varepsilon}(b) = \varnothing.$$

Рассмотрим именно для такого ε значения $\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)$. Положим $\delta' = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$.

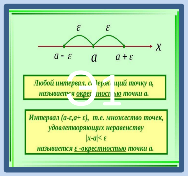
Тогда $\overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) = \overset{\circ}{U}_{\delta}(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(x_0)$ и в δ'-окрестности точки x_0 получаем два противоречащих друг другу вывода:

$$x \in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) \ \Rightarrow\ f(x) \in \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(a),\ g(x) \in \overset{\circ}{U}_{\varepsilon}(b) \ \Rightarrow\ f(x) > g(x);$$

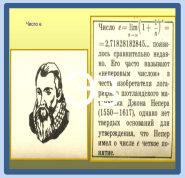
$$x \in \overset{\circ}{U}_{\delta'}(x_0) \ \Rightarrow\ f(x) \le g(x) \ \text{(по условию леммы).}$$

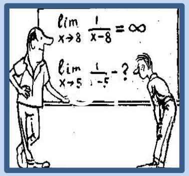
Полученное противоречие означает, что предположение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ было неверным. Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

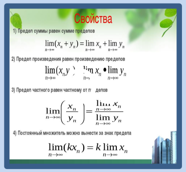
Элементы теории пределов

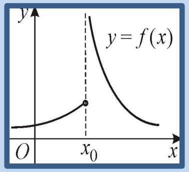


$x_n = \frac{1}{n}$





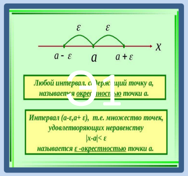


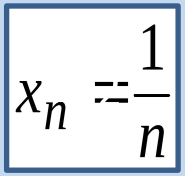


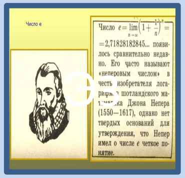
Теорема 3.4

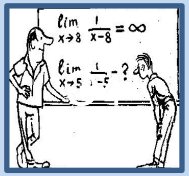
I. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел;

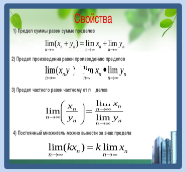
II. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел.

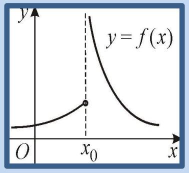










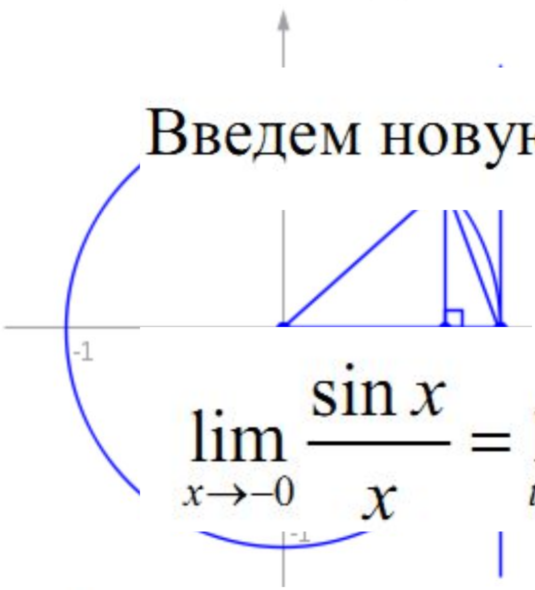


Элементы теории пределов

Доказательство

$$\boxed{\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}} = \boxed{\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}}$$

▷ I. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$



Введем новую переменную $t=-x\to+0$: $\frac{\sin x}{2}$,

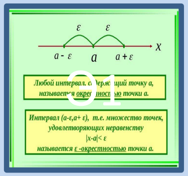
$$S_2=\frac{\pi\cdot x}{2\pi}=\frac{x}{2},$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1 = \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

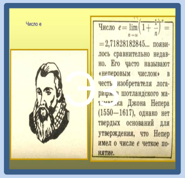
$$\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\operatorname{tg} x}{2} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x} \Rightarrow \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

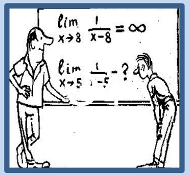
$$\underbrace{\lim_{x\to+0}\cos x}_{=1}\le\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\le\underbrace{\lim_{x\to+0}1}_{=1} \Rightarrow 1\le\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\le 1 \Rightarrow \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

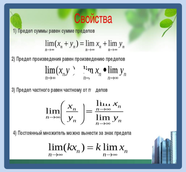
Элементы теории пределов

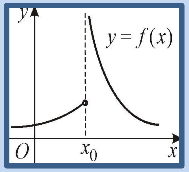


$x_n = \frac{1}{n}$









$$\boxed{\text{II.}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e}$$

Доказательство

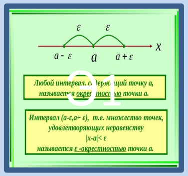
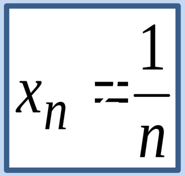
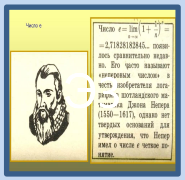
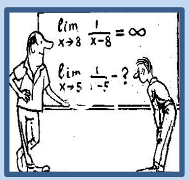
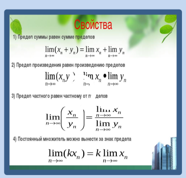
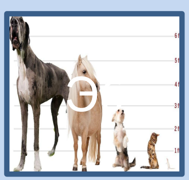
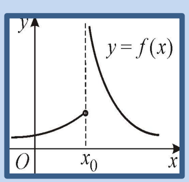
$n = [x]$ – целая часть числа x,

$$n \le x < n+1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \quad \Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Элементы теории пределов

при $x \to +\infty$ $n = [x] \to +\infty$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$e \le \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le e \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

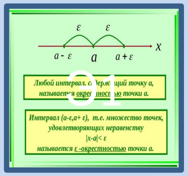
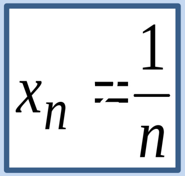
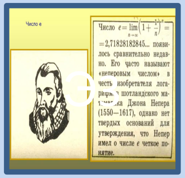
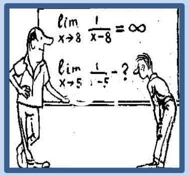
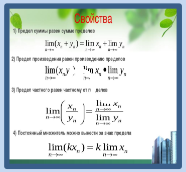
При $x \to -\infty$ $t = -x \to +\infty$

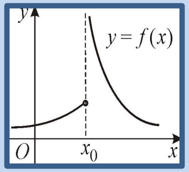
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e}$$

Элементы теории пределов



Определение 4.1

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то пишут $f(x)=o\big(g(x)\big)$ при $x\to x_0$. Говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая *более высокого порядка,* чем $g(x)$ в точке x_0. Это значит, что $f(x)\underset{x\to x_0}{\to}0$ на порядок быстрее, чем $g(x)\underset{x\to x_0}{\to}0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют *одинаковый порядок малости* в точке x_0.

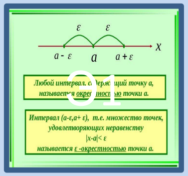
Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке x_0.

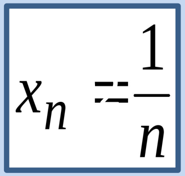
Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то пишут $f(x)=o\big(g(x)\big)$ при $x\to x_0$. Говорят, что $g(x)$ – бесконечно большая *более высокого порядка,* чем $f(x)$ в точке x_0. Это означает, что $g(x)\underset{x\to x_0}{\to}\infty$ на порядок быстрее, чем $f(x)\underset{x\to x_0}{\to}\infty$.

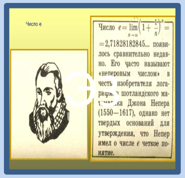
Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют *одинаковый порядок роста* в точке x_0.

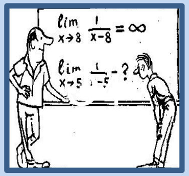
Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует, то говорят, что функции не сравнимы в точке x_0.

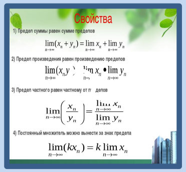
Элементы теории пределов

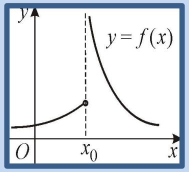




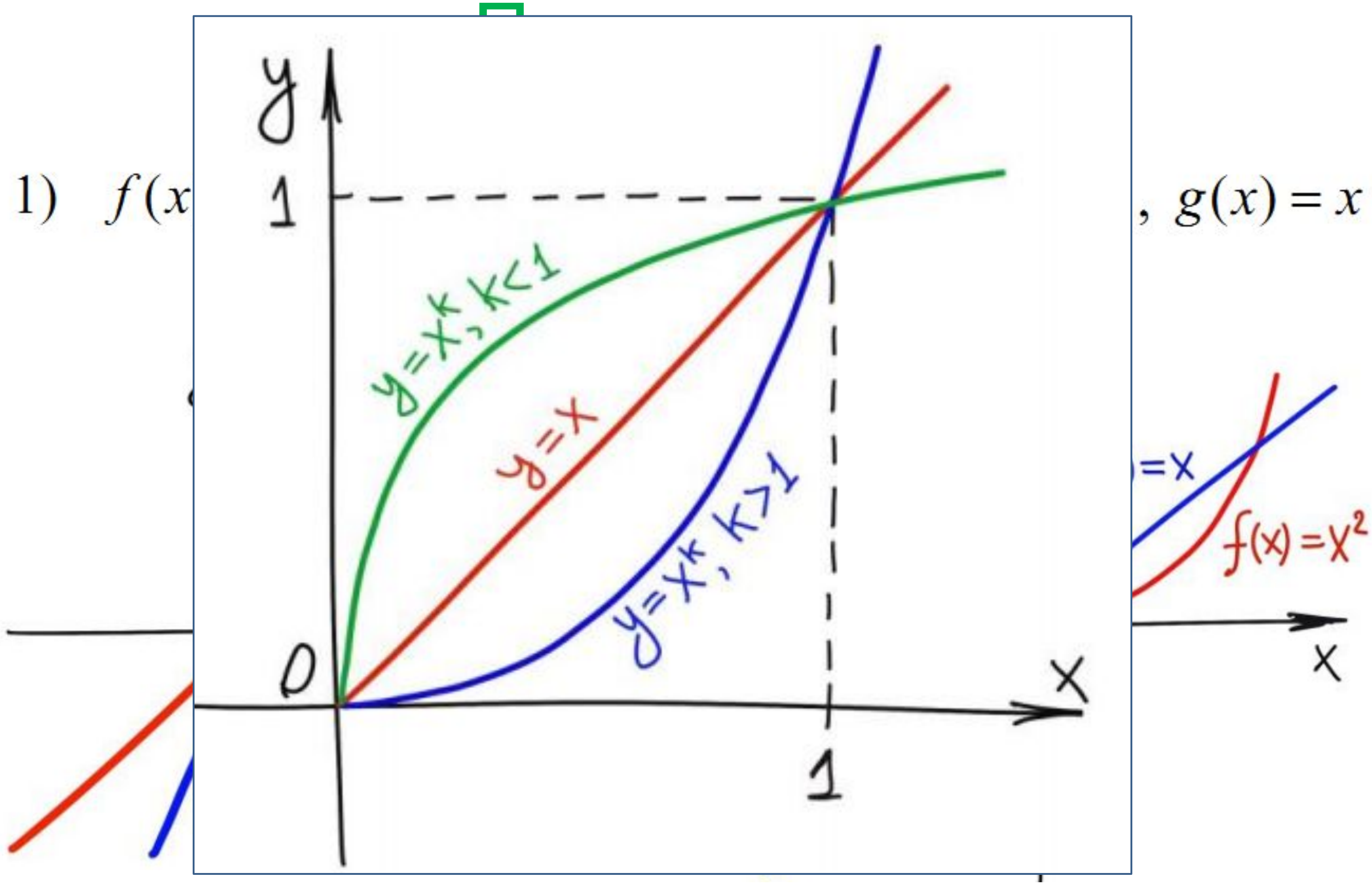




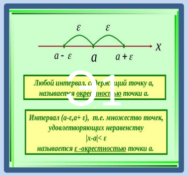




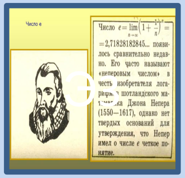
1) $f(x$ $, g(x) = x$

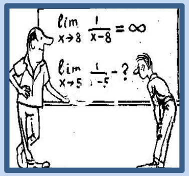


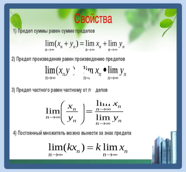
Общий вывод

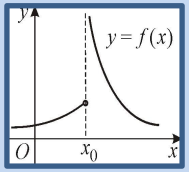


$x_n = \frac{1}{n}$









Элементы теории пределов

Задача 1. Сравнить порядки бесконечно малых функций $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ и $g(x)=1-2\sqrt{x}+x$ в точке $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to}$$

$$1-2\sqrt{x}+x = o\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \text{ при } x\to1$$

$$\frac{\overbrace{1+\sqrt{x}}^{\to2}}{\underbrace{(1-\sqrt{x})}_{\to0}} = \infty$$

Задача 2. Сравнить порядки двух бесконечно больших функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0.

1. $f(x)=\sqrt{x^4+x-1}+x$, $g(x)=x^2\ln x$, $x_0=+\infty$

$$\sqrt{x^4+x-1}+x = o\left(x^2\ln x\right) \text{ при } x\to+\infty$$

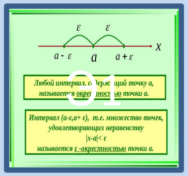
$$\overbrace{\frac{1}{\ }-\frac{1}{\ }+\frac{1}{\ }}^{\to1,\text{ огр.}}$$

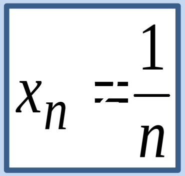
$f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок роста в точке x_0

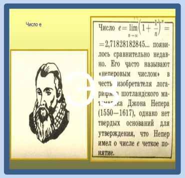
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{}{1-x}:\frac{}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to1}\frac{}{x^3} = 2$$

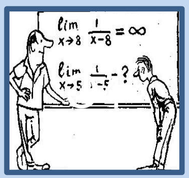
$\to+\infty$

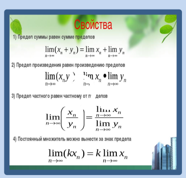
$\to1$

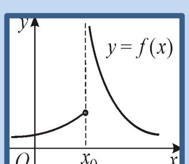












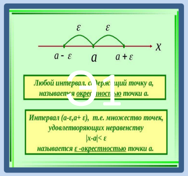
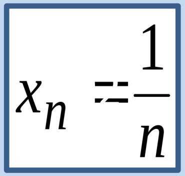
Элементы теории пределов

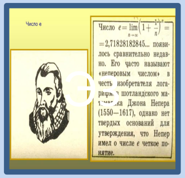
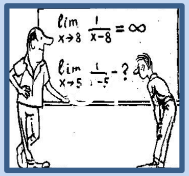
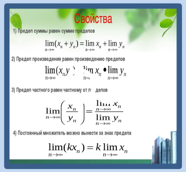
Задача 1. Сравнить порядки бесконечно малых функций

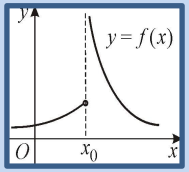
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \text{ и } g(x) = 1 - 2\sqrt{x} + x \quad \text{в точке } x_0 = 1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1+x)\left(1-2\sqrt{x}+x\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{1+\sqrt{x}}^{\to 2}}{\underbrace{(1+x)}_{\to 2}\underbrace{\left(1-\sqrt{x}\right)}_{\to 0}} = \infty$$

$$1 - 2\sqrt{x} + x = o\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \text{ при } x \to 1$$

Элементы теории пределов

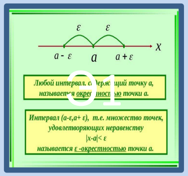
Лемма 4.2 [без доказательства]

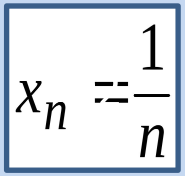
Пусть $k > 0$, $a > 1$. Тогда при $x \to +\infty$

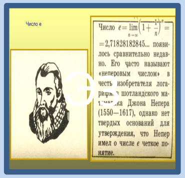
$$\log_a x = o(x^k)\,,\quad x^k = o(a^x)\,,\quad a^x = o(x^x)\,,\quad x^x = o([x]!)\,.^2$$

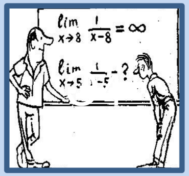
$\log_a x$	x^k	a^x	x^x	$n! = [x]!$

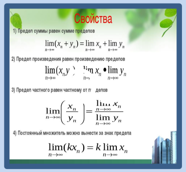
Элементы теории пределов

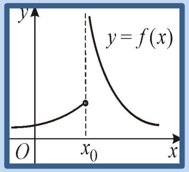












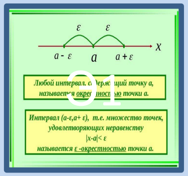
Эквивалентные бесконечно малые (большие) величины

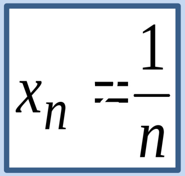
Определение 4.3

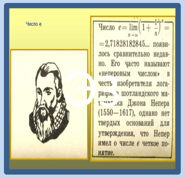
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две бесконечно малые (большие) функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

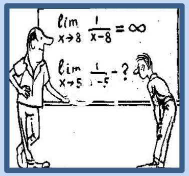
Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* в точке x_0.

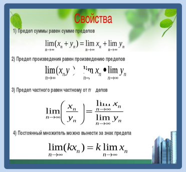
Обозначение: $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$. Эквивалентные бесконечно малые (большие) функции с одинаковой скоростью стремятся к нулю (к бесконечности) при $x \to x_0$.

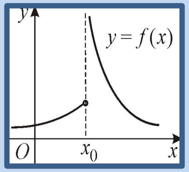






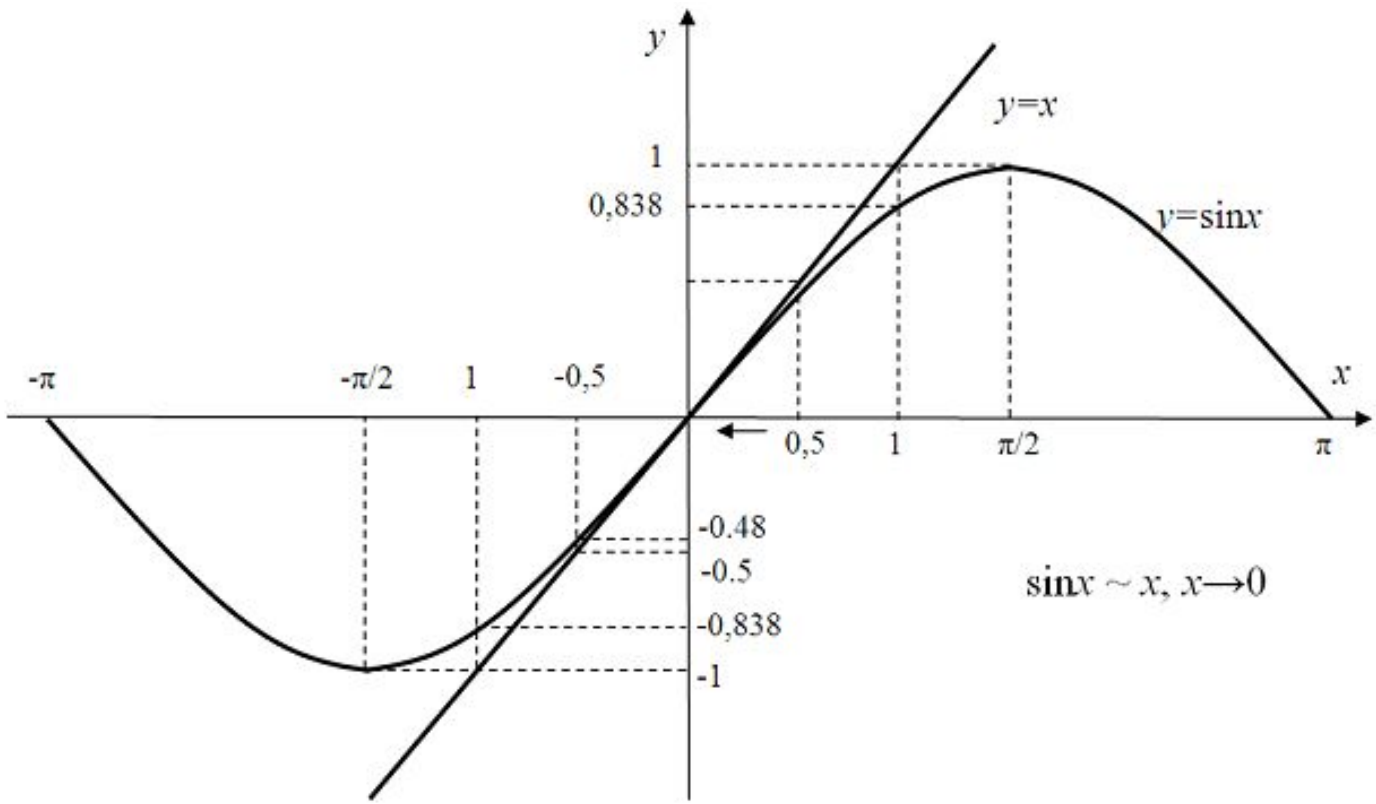


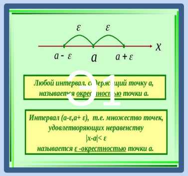
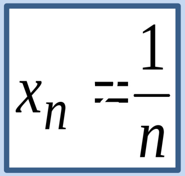


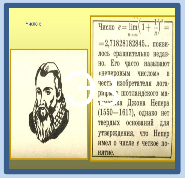
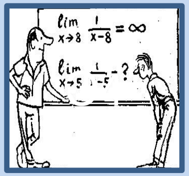


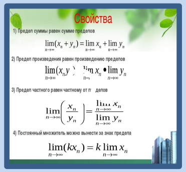
Элементы теории пределов

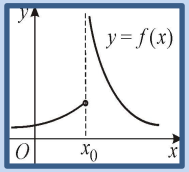
$$f(x)=\sin x \ \text{ и } \ g(x)=x$$





Элементы теории пределов

Теорема 4.4 (список основных отношений эквивалентности)

Доказательство (выборочно).

Для доказательства используем первый и второй замечательные пределы (теорема 3.4) и свойства конечных пределов (лемма 3.2).

Соотношение $\sin x \sim x$ – прямое следствие первого замечательного предела.

Следующие отношения эквивалентности также опираются на первый замечательный предел:

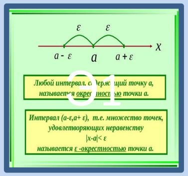
$$\mathrm{tg}x \sim x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1;$$

$$\overbrace{\arcsin x}^{y}$$

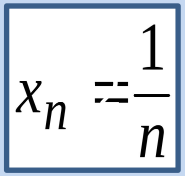
Следующие отношения эквивалентности выводятся при помощи второго замечательного предела:

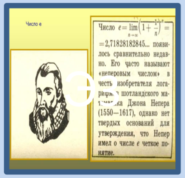
$$\ln(1+x) \sim x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\to e} = \ln e = 1;$$

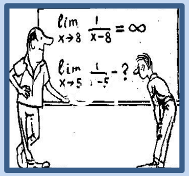
$$e^x - 1 \sim x \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{e^x-1}^{y}}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)} = 1 \text{ (следует из предыдущего соотношения).}$$

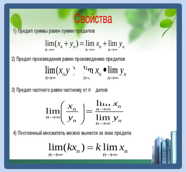


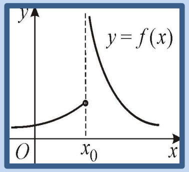
Элементы теории пределов





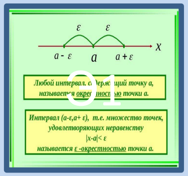


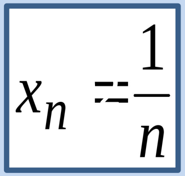


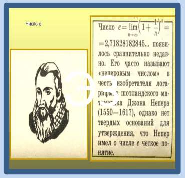


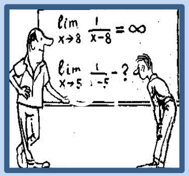
Лемма 4.5 (формула Стирлинга для факториала) [без доказательства]

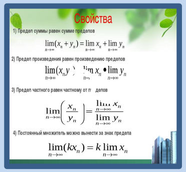
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

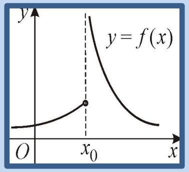












Элементы теории пределов

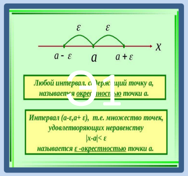
Лемма 4.6 (свойства отношения эквивалентности)

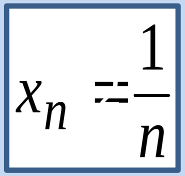
Пусть $f(x), g(x), h(x)$ – три бесконечно малые (большие) функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

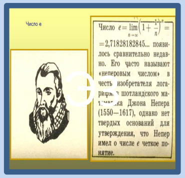
1. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$ (рефлексивность);
2. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$ (симметричность);
3. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x),\ g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x) \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$ (транзитивность);
4. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow f(x)h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)h(x)$;
5. $f_0(x) \underset{x\to x_0}{\to} a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \Rightarrow f_0(x)f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} af(x)$;
6. $\begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ \varphi(f(x)) - \text{беск. малая (больш.) в } x_0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(f(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} \varphi(g(x))$;
7. $\begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ \psi(t) \underset{t\to t_0}{\to} x_0 \end{cases} \Rightarrow f(\psi(t)) \underset{t\to t_0}{\sim} g(\psi(t))$.

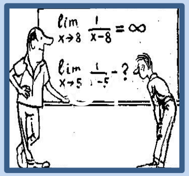
Применение леммы

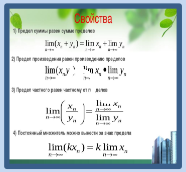
Элементы теории пределов

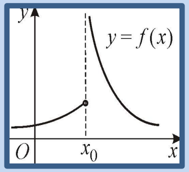












Свойство 3 $\quad x \to 0 \;\Rightarrow\; \sin x \to 0 \;\Rightarrow\; \ln(1+\sin x) \sim \sin x \sim x$

Свойство 4 $\quad x \to 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}x \sim x \;\Rightarrow\; x\,\mathrm{tg}x \sim x^2$

Свойство 5

Чтобы заменить бесконечно малую (большую) в точке x_0 функцию на эквивалентную, надо выделить в ней бесконечно малый (большой) множитель так, чтобы все остальные множители имели конечный ненулевой предел в точке x_0, после чего заменить их на значение этого предела.

$$x \to \infty \;\Rightarrow\; x^2 + 3x = \underset{\text{б.б.}}{x^2}\underbrace{\left(1+\frac{3}{x}\right)}_{\to 1} \sim x^2; \qquad \text{проверка: } \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right) = 1;$$

$$x \to 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 3x = \underset{\text{б.м.}}{x}\,\underbrace{(x+3)}_{\to 3} \sim 3x; \qquad \text{проверка: } \lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{3}+1\right) = 1.$$

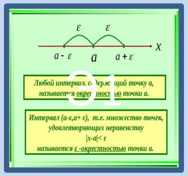
Свойство 6 $\quad x \to 0 \;\Rightarrow\; \sin x \sim x \;\Rightarrow\; \sin^2 x \sim x^2,\ \frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$

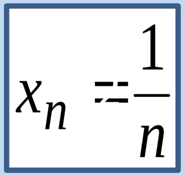
$$x \to +0 \;\Rightarrow\; \sqrt{x} \to 0 \;\Rightarrow\; \sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x};$$

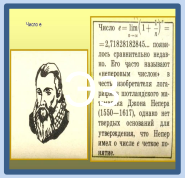
Свойство 7

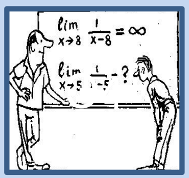
$$x \to \infty \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} \to 0 \;\Rightarrow\; e^{1/x} - 1 \sim \frac{1}{x};$$

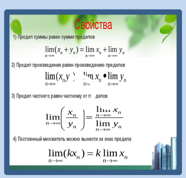
$$x \to -1 \;\Rightarrow\; x+1 \to 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{arctg}(x+1) \sim x+1$$

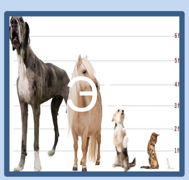


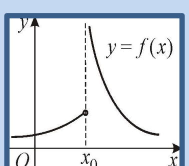












Элементы теории пределов

Лемма 4.7

Значение предела функции в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ не изменится, если любой бесконечно малый или бесконечно большой ее множитель заменить на эквивалентный в точке x_0.

Доказательство.

Пусть требуется вычислить предел $f(x)h(x)$ в точке x_0 и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)$.

Очевидно $f(x)h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} g(x)h(x)$. Рассмотрим разные случаи.

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x) \in \mathbb{R}$, то по свойствам конечных пределов (лемма 3.2):

$$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}_{=1} \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)h(x).$$

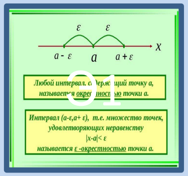
2) Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x) = \infty$, то по свойствам бесконечно больших функций (лемма 3.1′):

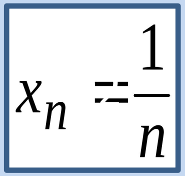
$$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}_{\text{отд. от } 0} \cdot \underbrace{g(x)h(x)}_{\text{беск. большая}} = \infty.$$

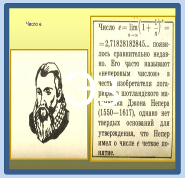
3) Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)$ не существует, то и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x)$ не существует: пусть функция $f(x)h(x)$ имеет конечный или бесконечный предел в x_0, тогда согласно логике пунктов 1), 2) функция $g(x)h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} f(x)h(x)$ тоже имела бы конечный или бесконечный предел.

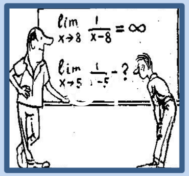
◁

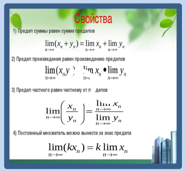
Элементы теории пределов

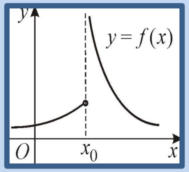








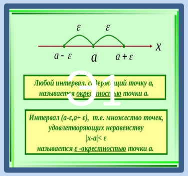


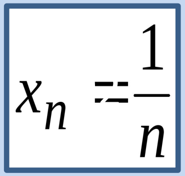


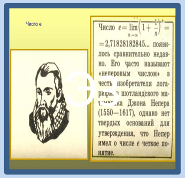
Задача 3. Найти значение предела, используя метод замены множителя на эквивалентный.

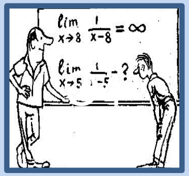
$$\lim_{x\to1+0}\frac{(x^2-x+1)^3-1}{x\sqrt{x-1}\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(a)}{=}\lim_{t\to+0}\frac{(t^2+t+1)^3-1}{\sqrt{t}(1+t)\ln(1+t)}\overset{(b)}{=}\lim_{t\to+0}\frac{3(t^2+t)}{t\sqrt{t}}\overset{(c)}{=}\lim_{t\to+0}\frac{\overbrace{3(t+1)}^{\substack{\text{отд. от } 0,\\ \to3}}}{\underbrace{\sqrt{t}}_{\to+0}}\overset{(d)}{=}+\infty.$$

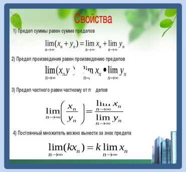
Изначально рассматривается только правосторонний предел, поскольку слева от точки $x_0=1$ функция не определена.

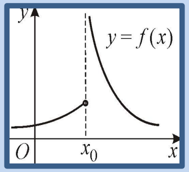












Элементы теории пределов

Определение 4.8

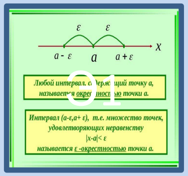
Пусть $f(x)$, $g(x)$ – бесконечно малые (большие) функция в точке $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $k > 0$. Если функции $f(x)$ и $(g(x))^k$ имеют одинаковый порядок малости (роста) в точке x_0, то число k называется порядком функции $f(x)$ *относительно функции* $g(x)$ или *по шкале* $(g(x))^k$.

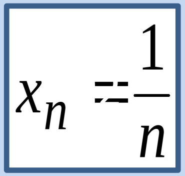
Исходя из определений 4.1, 4.1′, чтобы установить порядок функции $f(x)$ относительно $g(x)$, надо найти такое число $k > 0$, при котором

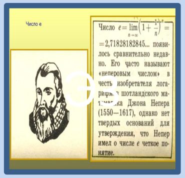
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^k} = a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

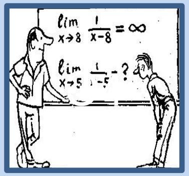
Альтернативный путь – провести замену функции $f(x)$ на эквивалентную вида

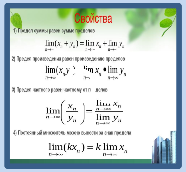
$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} a(g(x))^k,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \qquad (*)$$

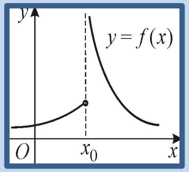








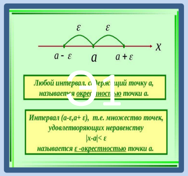




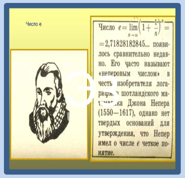
Элементы теории пределов

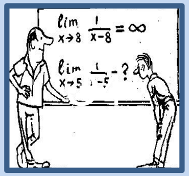
$f(x)$, x_0	степенная шкала, $k > 0$
$f(x)$ – беск. малая, $x_0 \in \mathbb{R}$	$(x - x_0)^k$
$f(x)$ – беск. большая, $x_0 \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{(x - x_0)^k}$
$f(x)$ – беск. малая, $x_0 = \infty$	$\dfrac{1}{x^k}$
$f(x)$ – беск. большая, $x_0 = \infty$	x^k

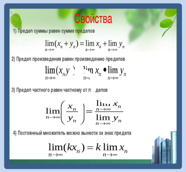
Элементы теории пределов

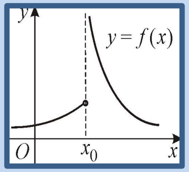


$x_n = \frac{1}{n}$









Задача 4. Дана функция $f(x) = \dfrac{x^5 - 2x^4}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Указать точки, в которых она является бесконечно малой, и точки, в которых она является бесконечно большой. В каждой такой точке определить порядок $f(x)$ по подходящей степенной шкале.

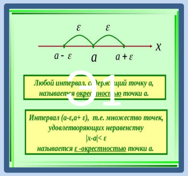
Упражнение. Для каждого из следующих условий, привести пример удовлетворяющей ему функции $f(x)$:

$$4)\quad x \to 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overbrace{x^5-2x^4}^{\to -1}}{\sqrt[3]{x^3-1}} \sim \frac{-1}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{x-1}\,\underbrace{\sqrt[3]{x^2+x+1}}_{\to\sqrt[3]{3}}} \sim \frac{-1}{\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{x-1}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3}$$

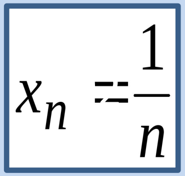
k;

$f(x)$ беск. большая в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, но не имеет порядка по степенной шкале $\dfrac{1}{(x-x_0)^k}$.

Упражнение



Элементы теории пределов

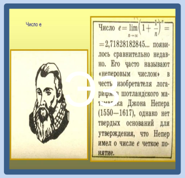


Непрерывность функции

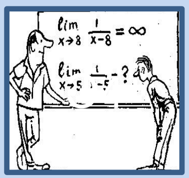
Определение 5.1 (непрерывность в точке)
Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$, включающем некоторую проколотую окрестность точки x_0.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (иначе говоря, $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$).

Функция $f(x)$ называется *разрывной в точке* x_0, если она не является непрерывной, т. е. она не определена в точке x_0 или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$



Описание непрерывной функции в точке

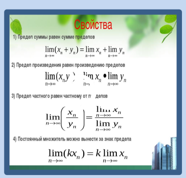


1. Используем определение предела по Коши:

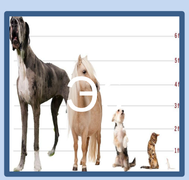
3. Обозначим $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента в точке x_0,

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции в точке x_0.

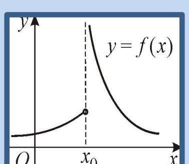
$\lim f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$

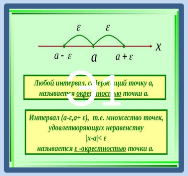


4. Поскольку $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то непрерывность функции в точке x_0 означает, что можно поменять местами предельный переход и функцию: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$.

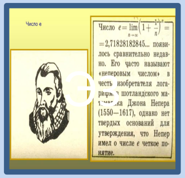


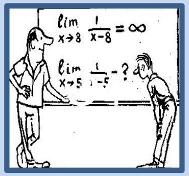
Предельный переход

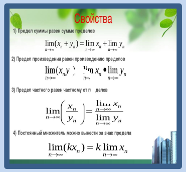


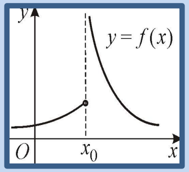


$x_n = \frac{1}{n}$









Элементы теории пределов

Непрерывность функции

Лемма 5.2

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда в точке x_0 также непрерывны следующие функции:

$$f(x) + g(x);$$
$$\lambda f(x),\ \lambda \in \mathbb{R};$$
$$f(x) \cdot g(x);$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если } g(x_0) \neq 0.$$

Доказательство

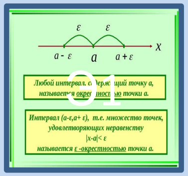
Лемма 5.2 есть прямое следствие леммы 3.2 о свойствах конечных пределов. Например:

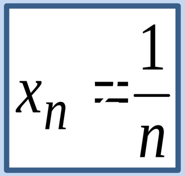
$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0). \qquad \triangleleft$$

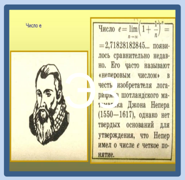
Доказательство

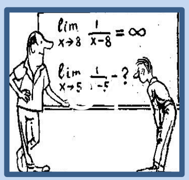
Покажем, что $x \to x_0 \ \Rightarrow \ g(f(x)) \to g(f(x_0))$. Используем сначала непрерывность функции $f(x)$, затем непрерывность функции $g(y)$:

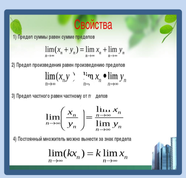
$$x \to x_0 \ \Rightarrow \ \underbrace{f(x)}_{y} \to \underbrace{f(x_0)}_{y_0} \ \Rightarrow \ g(y) = g(f(x)) \to g(y_0) = g(f(x_0)). \qquad \triangleleft$$

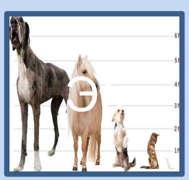


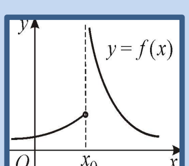








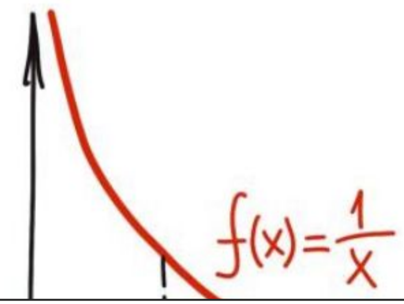




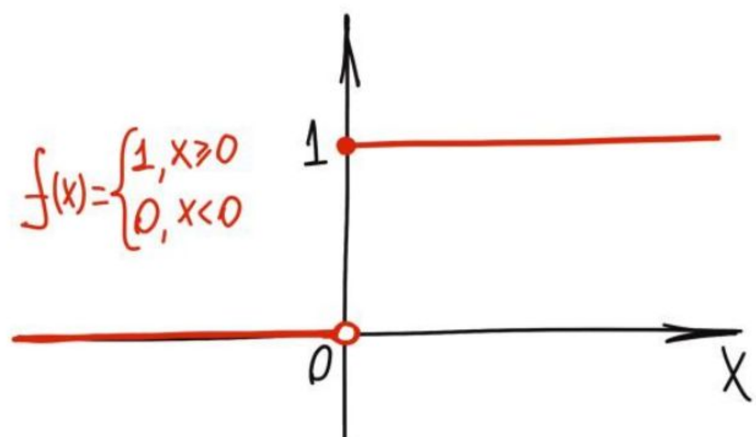
Элементы теории пределов

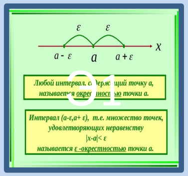
Непрерывность функции

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна на $(0;1)$, но не является непрерывной на $[0;1]$;

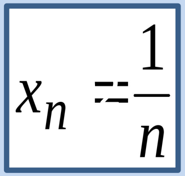


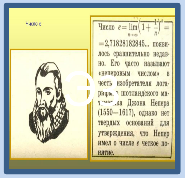
$f(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ непрерывна на $[0;1]$, но не является непрерывной на $[-1;0]$.

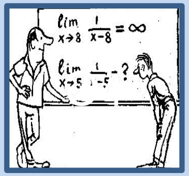


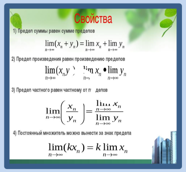


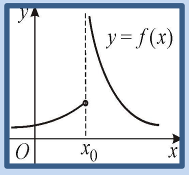
Элементы теории пределов







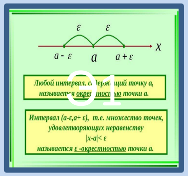
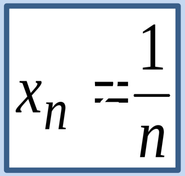
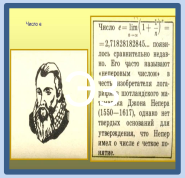
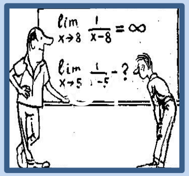
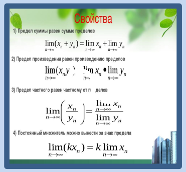


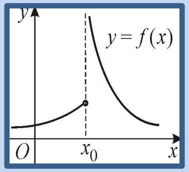


Непрерывность функции

Лемма 5.5 (непрерывность элементарных функций) [без подробного доказательства]
Пусть $f(x)$ – элементарная функция. Тогда она непрерывна на каждом (невырожденном) промежутке своей области определения.

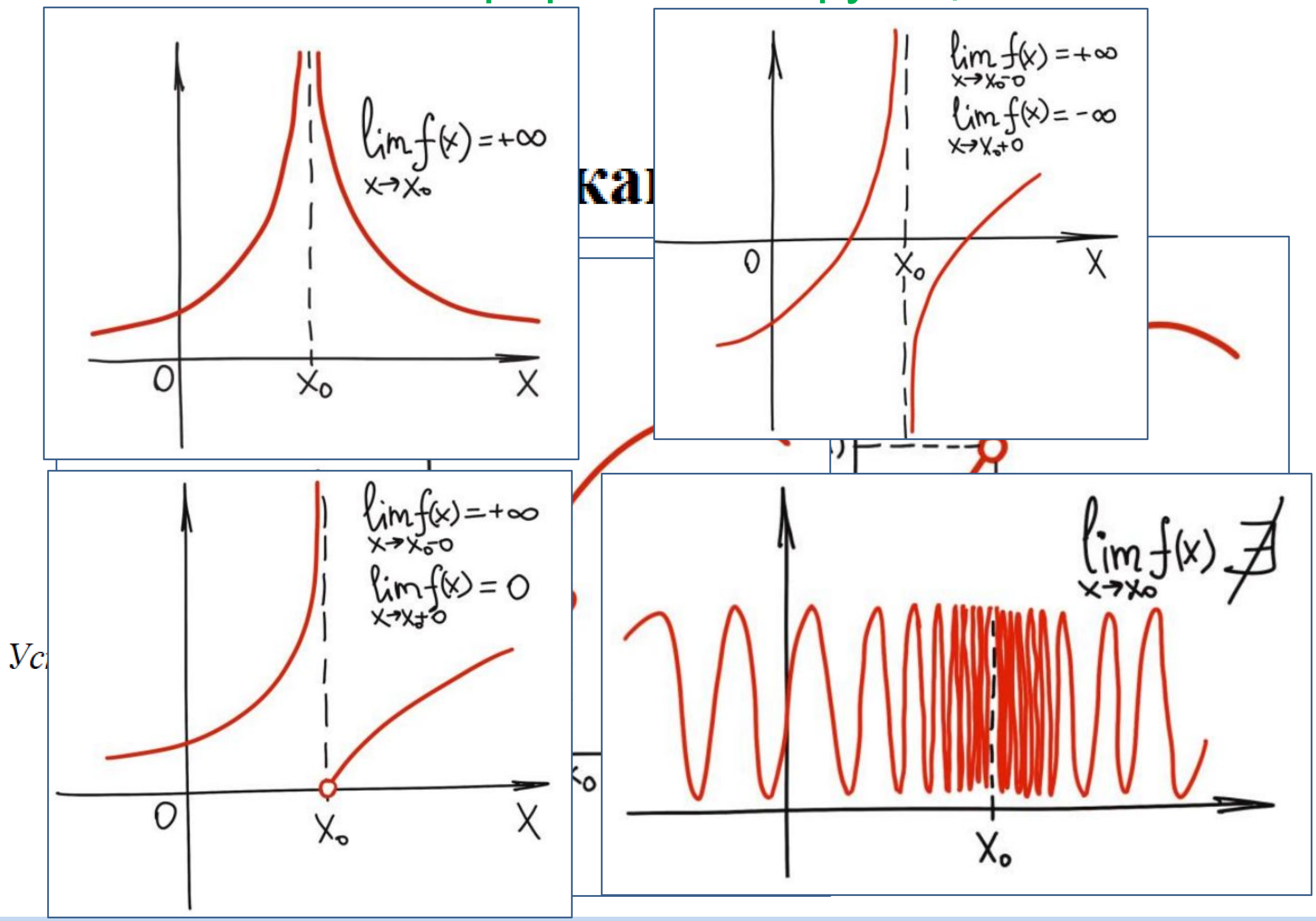
Идея доказательства:
утверждение леммы проверяется непосредственно для основных элементарных функций; затем используется определение элементарной функции как результата конечного числа арифметических операций и композиций над основными элементарными функциями (подробно об элементарных функциях см. в пособии по модулю 1); окончательный вывод вытекает из лемм 5.2, 5.3.

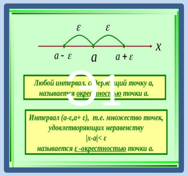


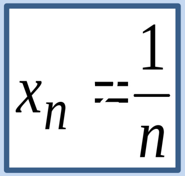
Элементы теории пределов

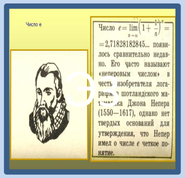
Непрерывность функции

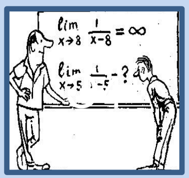


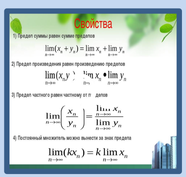
Элементы теории пределов

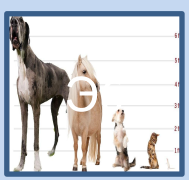


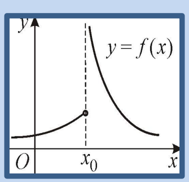






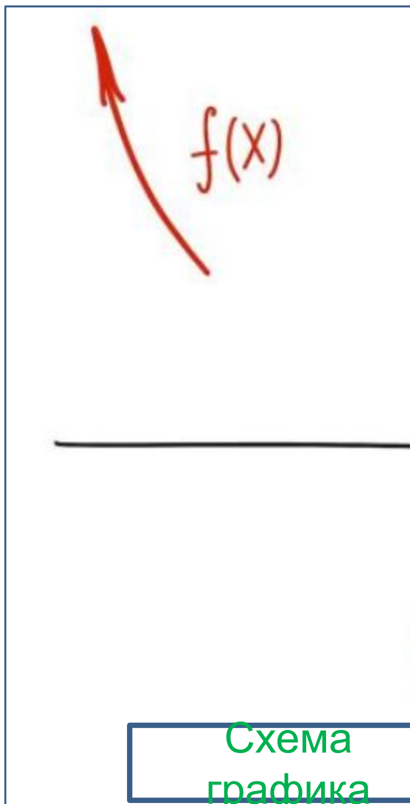






Непрерывность функции

Задача. Указать область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрывов. Определить характер разрывов и предельное поведение функции на краях области определения (включая бесконечно удаленные точки). Дать графическое описание.



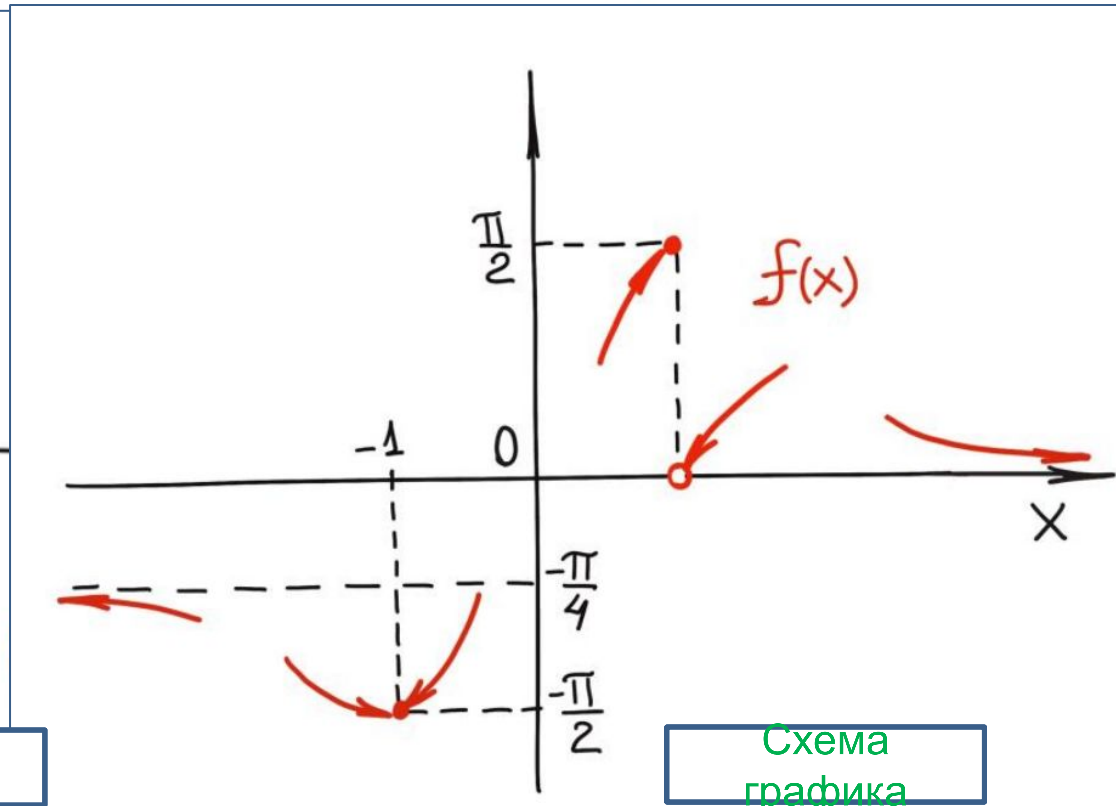
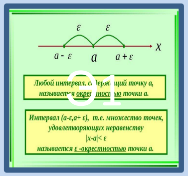
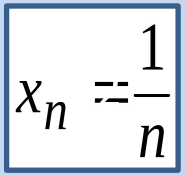
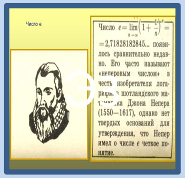


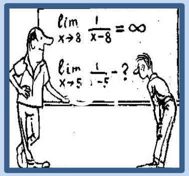
Схема графика

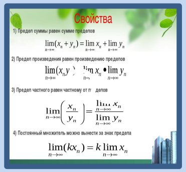
Схема графика

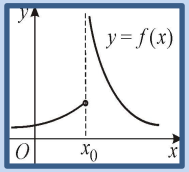












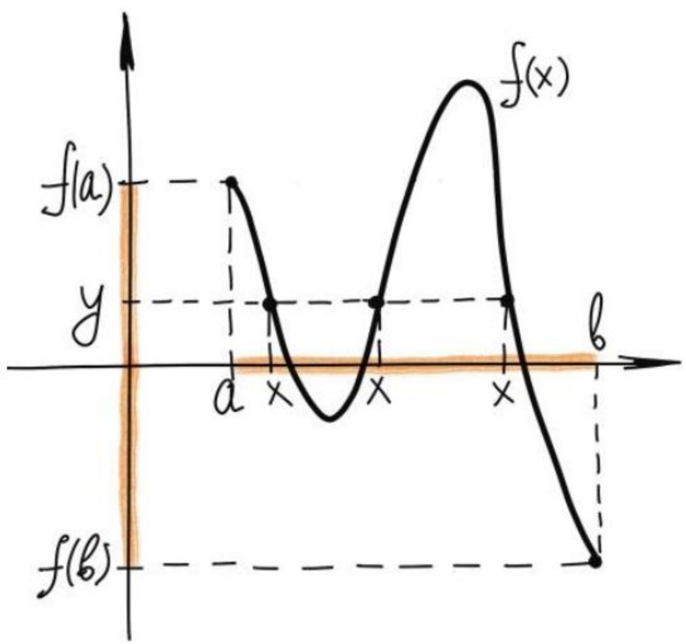
Элементы теории пределов

Непрерывность функции

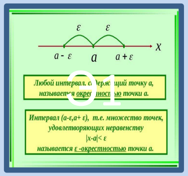
Теорема 5.6 (Больцано – Коши) [без доказательства, очевидно по рисунку]
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$:

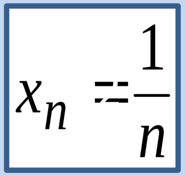
$$\forall y \in \big(f(a); f(b)\big)\ \exists x \in (a;b):\ f(x) = y \quad (\text{в случае } f(a) < f(b)).$$

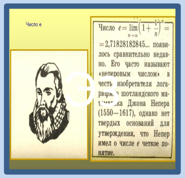
В частности, если $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (или наоборот), то $\exists x \in (a;b):\ f(x) = 0$.

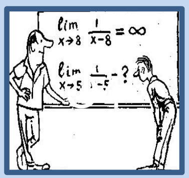


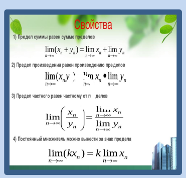
Элементы теории пределов

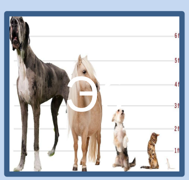


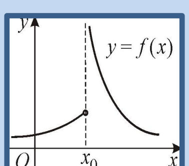










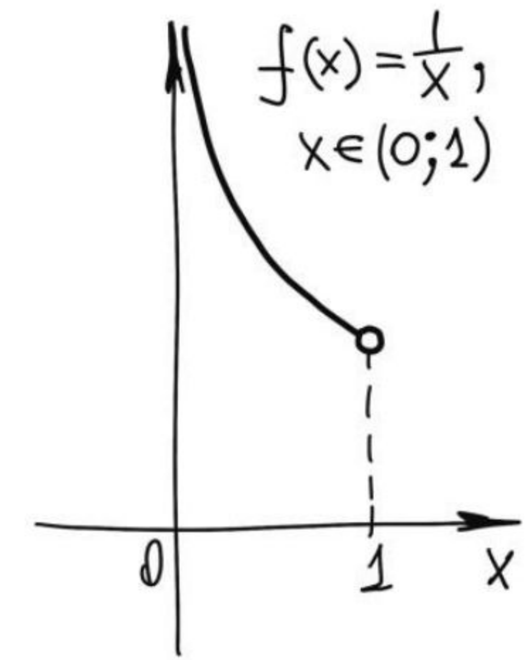


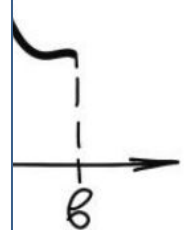
Непрерывность функции

идно по рисунку]

ограничена и достигает наибольшего

$x)$.

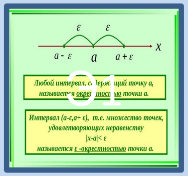


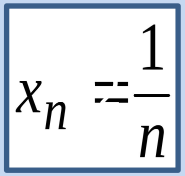


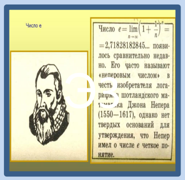
$$\max_{x\in(0;1)}\frac{1}{x}=\max(1;+\infty)\ \text{не существует;}$$

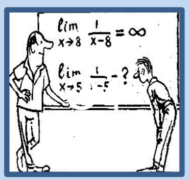
$$\min_{x\in(0;1)}\frac{1}{x}=\min(1;+\infty)\ \text{не существует.}$$

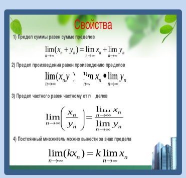
Замечание

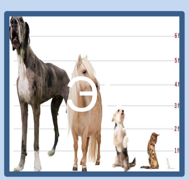


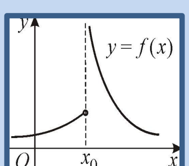












Элементы теории пределов

Непрерывность функции

Теорема 5.7 (непрерывность обратной функции)
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на промежутке $[a;b]$ (допустим, возрастает). Тогда существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая непрерывна на промежутке $[f(a); f(b)]$.

Доказательство.

Непрерывная строго монотонная функция является биективным отображением $f:[a;b] \to [f(a); f(b)]$. Поэтому существует обратная функция $f^{-1}:[f(a); f(b)] \to [a;b]$.

Непрерывность функции $x = f^{-1}(y)$ очевидна по графику: линии $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ совпадают.

◁