Лекция 11-12

Плоская задача теории упругости

В теории упругости имеется большой класс задач, важных в смысле практических приложений и вместе с тем допускающих значительные упрощения математической стороны решения. Упрощение заключается в том, что в этих задачах одну из координатных осей тела, например ось z, можно отбросить и все явления рассматривать происходящими в одной координатной плоскости $x0y$ нагруженного тела. В этом случае напряжения, деформации и перемещения будут являться функциями двух координат – x и y. Такие задачи носят название *плоской задачи* теории упругости.

Под термином «плоская задача теории упругости» объединяют две физически разные задачи, приводящие к весьма сходным математическим зависимостям:

1) задачу о *плоском деформированном состоянии* (*плоская деформация*);

2) задачу о *плоском напряжённом состоянии*.

Для этих задач чаще всего характерно значительное отличие одного геометрического размера от двух других размеров рассматриваемых тел: большая длина в первом случае и малая толщина во втором случае.

2.1. Плоская деформация

Деформация называется *плоской*, если перемещения всех точек тела могут происходить только в двух направлениях в одной плоскости и не зависят от координаты, нормальной к этой плоскости, т. е.

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0. \tag{2.1}$$

Плоская деформация возникает в длинных призматических или цилиндрических телах с осью, параллельной оси z, вдоль которой по боковой поверхности действует нагрузка, перпендикулярная этой оси и не меняющаяся по величине вдоль неё. Примером плоской деформации может служить напряжённо-деформированное состояние, возникающее в длинной прямой плотине и длинном своде подземного тоннеля (рис. 2.1).

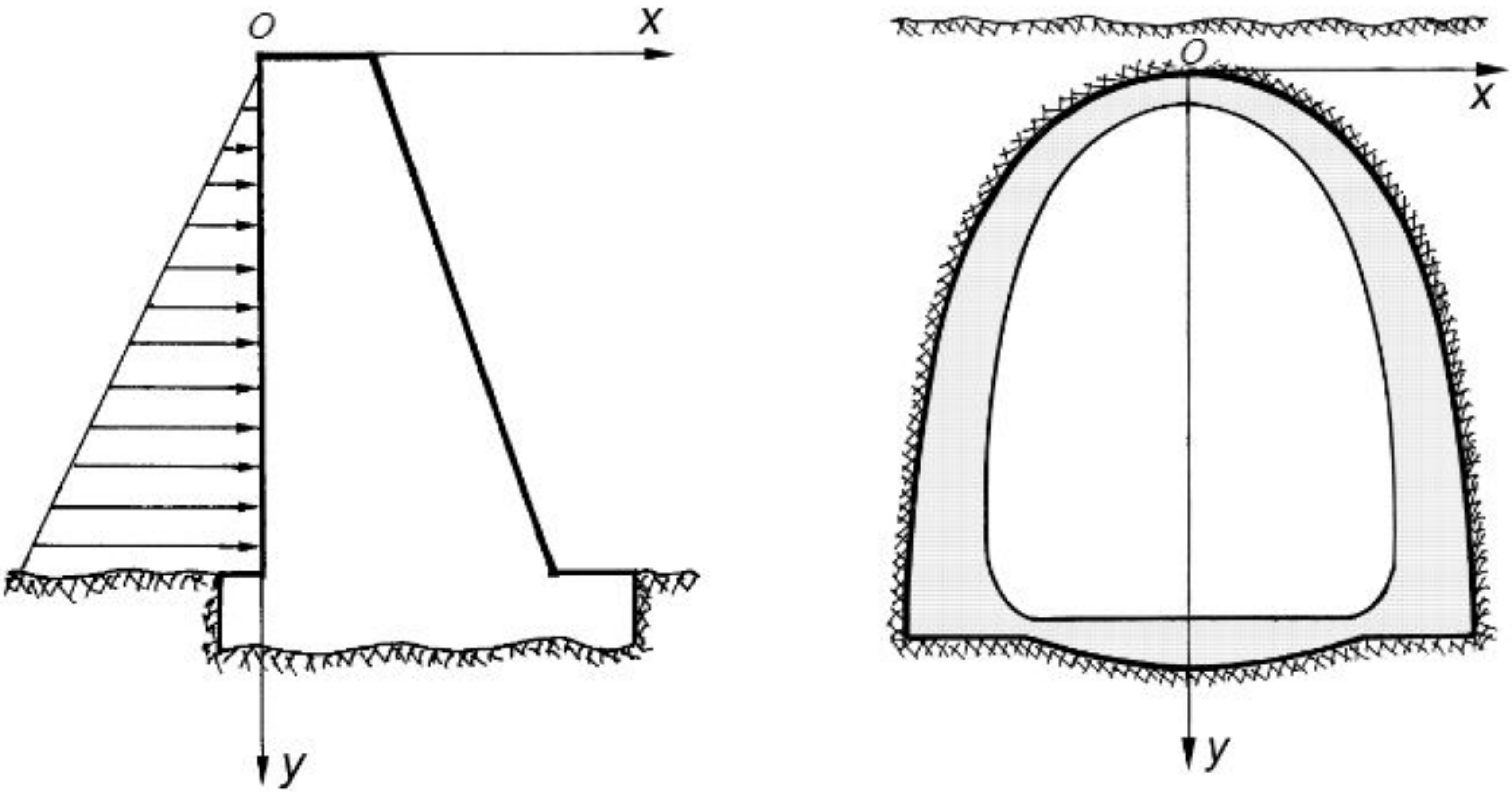

Рис. 2.1. Плоская деформация возникает в теле плотины и своде подземного тоннеля.

Подставляя компоненты вектора перемещения (2.1) в формулы Коши (1.16), (1.17), получим:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y), & \varepsilon_z &= 0, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y), & \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y), & \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Отсутствие линейных деформаций в направлении оси z ведёт к появлению нормальных напряжений σ_z. Действительно, из формулы закона Гука (1.22) для деформации ε_z следует, что

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = 0,$$

откуда получается выражение для напряжения σ_z:

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right). \tag{2.3}$$

Подставляя это соотношение в две первые формулы закона Гука, находим:

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right); \quad \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right). \tag{2.4}$$

Из анализа формул (2.2) – (2.4) и (1.22) также следует, что

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_x = \sigma_x(x, y), & \sigma_z = \sigma_z(x, y), \\ \sigma_y = \sigma_y(x, y), & \tau_{yz} = 0, \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), & \tau_{zx} = 0. \end{array}\right\}$$

Таким образом, основные уравнения трёхмерной теории упругости в случае плоской деформации значительно упрощаются.

Таким образом, основные уравнения трёхмерной теории упругости в случае плоской деформации значительно упрощаются.

Из трёх дифференциальных уравнений равновесия Навье (1.2) остаются только два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0,\\ &\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0,\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

а третье обращается в тождество.

Так как на боковой поверхности везде направляющий косинус $n=\cos(\nu,z)=\cos 90^\circ=0$, а $Z_\nu=0$, то из трёх условий на поверхности (1.6) остаются только два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x l+\tau_{xy}m=X_\nu,\\ &\tau_{yx}l+\sigma_y m=Y_\nu,\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

где l, m – направляющие косинусы (1.5) внешней нормали ν к поверхности контура; X, Y, X_ν, Y_ν – компоненты объёмных сил и интенсивности внешних поверхностных нагрузок на оси x и y, соответственно.

Шесть уравнений Коши (1.16), (1.17) сводятся к трём:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.7}$$

Из шести уравнений неразрывности деформаций Сен-Венана (1.19), (1.20) остаётся одно уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \tag{2.8}$$

а остальные обращаются в тождества.

Из шести формул закона Гука (1.22), с учётом (2.2), (2.4), остаются три формулы:

а остальные обращаются в тождества.

Из шести формул закона Гука (1.22), с учётом (2.2), (2.4), остаются три формулы:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}\left(\sigma_x - \nu_1\sigma_y\right);\ \varepsilon_y = \frac{1}{E_1}\left(\sigma_y - \nu_1\sigma_x\right);\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\tau_{xy}. \quad (2.9)$$

В этих соотношениях для традиционного в теории упругости вида записи введены новые упругие постоянные:

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

2.2. Плоское напряжённое состояние

Плоское напряжённое состояние возникает в том случае, когда длина того же призматического тела мала, по сравнению с двумя другими, размерами. В этом случае она называется *толщиной*. Напряжения в теле действуют только в двух направлениях в координатной плоскости xOy и не зависят от координаты z. Примером такого тела может служить тонкая пластина толщиной h, нагруженная по боковой поверхности (ребру) силами, параллельными плоскости пластины и равномерно распределёнными по её толщине (рис. 2.2).

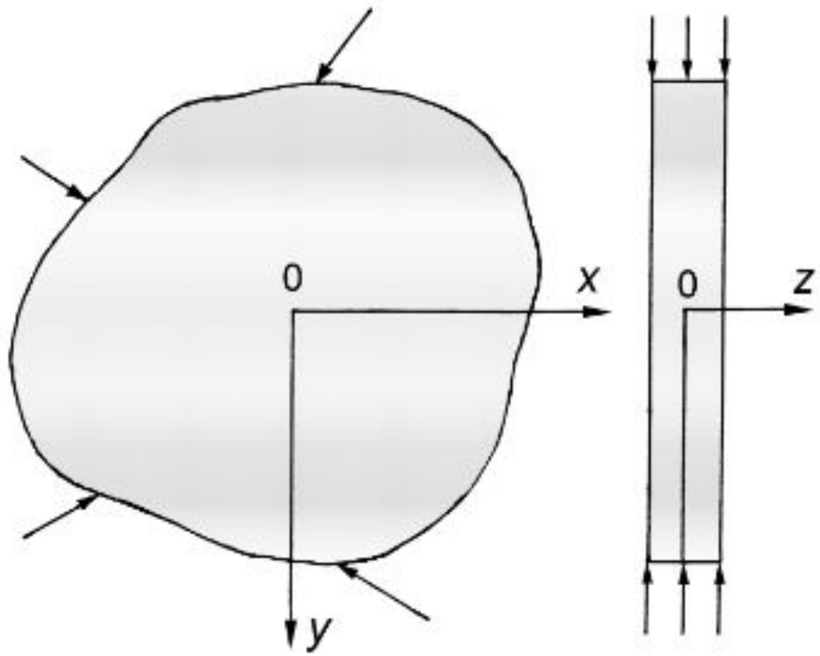

Рис. 2.2. Тонкая пластинка и приложенные к ней нагрузки

В этом случае также возможны упрощения, аналогичные упрощениям в задаче о плоской деформации. Компоненты тен-

В этом случае также возможны упрощения, аналогичные упрощениям в задаче о плоской деформации. Компоненты тензора напряжений $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ на обеих плоскостях пластины равны нулю. Так как пластина тонкая, то можно считать, что они равны нулю и внутри пластины. Тогда напряжённое состояние будет определяться только компонентами $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, которые не зависят от координаты z, т. е. не меняются по толщине пластины, а являются функциями только x и y.

Таким образом, в тонкой пластине возникает следующее напряжённое состояние:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_x = \sigma_x(x, y), & \sigma_z = 0, \\ \sigma_y = \sigma_y(x, y), & \tau_{yz} = 0, \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), & \tau_{zx} = 0. \end{array}\right\}$$

В отношении напряжений плоское напряжённое состояние отличается от плоской деформации условием

$$\sigma_z = 0. \tag{2.10}$$

Кроме того, из формулы закона Гука (1.22), с учётом (2.10), для линейной деформации ε_z получаем, что она не равна нулю:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \neq 0.$$

Следовательно, основания пластины будут искривляться, так как появятся перемещения $w = \varepsilon_z \cdot z = -\dfrac{\nu \cdot z}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$ по оси z.

При этих предположениях *основные уравнения плоской деформации*: дифференциальные уравнения равновесия (2.5), условия на поверхности (2.6), уравнения Коши (2.7) и уравнения неразрывности деформаций (2.8) сохраняют такой же вид в задаче о плоском напряжённом состоянии.

Формулы закона Гука примут следующий вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right);\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right);\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \tag{2.11}$$

Формулы (2.11) отличаются от формул (2.9) закона Гука для плоской деформации только значениями упругих постоянных: E и E_1, ν и ν_1.

В обратной форме закон Гука запишется так:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right), \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

Таким образом, при решении этих двух задач (плоская деформация и плоское напряжённое состояние) можно пользоваться одними и теми же уравнениями и объединять задачи в одну плоскую задачу теории упругости.

В плоской задаче теории упругости восемь неизвестных:

– две компоненты вектора перемещений u и v;

– три компоненты тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$;

– три компоненты тензора деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$.

Для решения задачи используют восемь уравнений:

– два дифференциальных уравнения равновесия (2.5);

– три уравнения Коши (2.7);

– три формулы закона Гука (2.9), или (2.11).

Кроме того, полученные деформации должны подчиняться уравнению неразрывности деформаций (2.8), а на поверхности тела должны выполняться условия равновесия (2.6) между внутренними напряжениями и интенсивностями внешней поверхностной нагрузки X_ν, Y_ν.