

**Эйлер (1707-1783 гг) – крупный
математик, физик, механик,
астроном**

$$***e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t***$$

Пространственные векторы в асинхронном двигателе

$$\left\{ \begin{aligned}
 u_a &= \frac{U_m}{2} \cdot (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = \frac{U_m}{2} \cdot [\cos \omega t + j \sin \omega t + \cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t)] = \\
 &= \frac{U_m}{2} \cdot [\cos \omega t + j \sin \omega t + \cos \omega t - j \sin \omega t] = U_m \cdot \cos \omega t; \\
 u_b &= \frac{U_m}{2} \cdot (e^{j(\omega t - 120)} + e^{-j(\omega t - 120)}) = \frac{U_m}{2} \cdot [e^{j\omega t} e^{-j120} + e^{-j\omega t} e^{j120}] = \\
 &= \frac{U_m}{2} \cdot [(\cos \omega t + j \sin \omega t) \cdot (\cos 120 + j \sin 120) + (\cos \omega t - j \sin \omega t) \cdot (\cos 120 + j \sin 120)] = \\
 &= \frac{U_m}{2} \cdot [\cos \omega t \cdot \cos 120 + j \cos \omega t \cdot \sin 120 + j \sin \omega t \cdot \cos 120 + \sin \omega t \cdot \sin 120 + \cos \omega t \cdot \cos 120 + \\
 &+ j \cos \omega t \cdot \sin 120 - j \sin \omega t \cdot \cos 120 + \sin \omega t \cdot \sin 120] = \\
 &= \frac{U_m}{2} \cdot [2 \cdot \cos \omega t \cdot \cos 120 + 2 \cdot \sin \omega t \cdot \sin 120] = U_m \cdot \cos(\omega t - 120); \\
 u_c &= \frac{U_m}{2} \cdot (e^{j(\omega t + 120)} + e^{-j(\omega t + 120)}) = \frac{U_m}{2} \cdot [e^{j\omega t} e^{j120} + e^{-j\omega t} e^{-j120}] = \\
 &= \frac{U_m}{2} \cdot [(\cos \omega t + j \sin \omega t) \cdot (\cos 120 + j \sin 120) + (\cos \omega t - j \sin \omega t) \cdot (\cos 120 - j \sin 120)] = \\
 &= \frac{U_m}{2} \cdot [\cos \omega t \cdot \cos 120 + j \cos \omega t \cdot \sin 120 + j \sin \omega t \cdot \cos 120 - \sin \omega t \cdot \sin 120 + \cos \omega t \cdot \cos 120 - \\
 &+ j \cos \omega t \cdot \sin 120 - j \sin \omega t \cdot \cos 120 - \sin \omega t \cdot \sin 120] = \\
 &= \frac{U_m}{2} \cdot [2 \cdot \cos \omega t \cdot \cos 120 - 2 \cdot \sin \omega t \cdot \sin 120] = U_m \cdot \cos(\omega t + 120).
 \end{aligned} \right.$$

$$\vec{u} = \frac{U_m}{3} \cdot [u_a \cdot \vec{a}_1 + u_b \cdot \vec{a}_2 + u_c \cdot \vec{a}_3],$$

Переход от мгновенных значений напряжений к пространственному вектору \vec{U}_s

$$\vec{a}_2 = 1 \cdot e^{j120} = -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 + j0,866;$$

$$\vec{a}_3 = 1 \cdot e^{-j120} = -0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 - j0,866.$$

Итак, система уравнений в степенной форме имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_a = \frac{U_m}{2} \cdot (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}); \\ u_b = \frac{U_m}{2} \cdot (e^{j\omega t} \cdot e^{-j120} + e^{-j\omega t} \cdot e^{j120}); \\ u_c = \frac{U_m}{2} \cdot (e^{j\omega t} \cdot e^{j120} + e^{-j\omega t} \cdot e^{-j120}). \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = 1 \cdot e^{j0}; \\ \vec{a}_2 = 1 \cdot e^{j120} = -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 + j0,866; \\ \vec{a}_3 = 1 \cdot e^{-j120} = -0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 - j0,866. \end{cases} \quad (4)$$

(3) $\vec{a} = \frac{2}{3} \cdot [u_a \cdot \vec{a}_1 + u_b \cdot \vec{a}_2 + u_c \cdot \vec{a}_3]$, **Переход от мгновенных значений напряжений к пространственному вектору \vec{U}_S**

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \frac{2}{3} \cdot [u_a \cdot \vec{a}_1 + u_b \cdot \vec{a}_2 + u_c \cdot \vec{a}_3], \\ \vec{a}_2 = 1 \cdot e^{j120} = -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 + j0,866; \\ \vec{a}_3 = 1 \cdot e^{-j120} = -0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 - j0,866. \end{cases} \vec{U}_S = \frac{2}{3} \cdot [u_a \cdot \vec{a}_1 + u_b \cdot \vec{a}_2 + u_c \cdot \vec{a}_3], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_S &= \frac{2}{3} \cdot [u_a \cdot \vec{a}_1 + u_b \cdot \vec{a}_2 + u_c \cdot \vec{a}_3] = \frac{2}{3} \cdot \frac{U_M}{2} \cdot [(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \cdot \vec{a}_1 e^{j0} + \\ &+ (e^{j\omega t} \cdot e^{-j120} + e^{-j\omega t} \cdot e^{j120}) \cdot \vec{a}_2 e^{j120} + (e^{j\omega t} \cdot e^{j120} + e^{-j\omega t} \cdot e^{-j120}) \cdot \vec{a}_3 e^{-j120}] = \\ &= \frac{U_M}{3} \cdot [1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j\omega t} + 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\omega t} + 1 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j120} \cdot e^{j120} + 1 \cdot e^{-j\omega t} \cdot e^{j120} \cdot e^{j120} + \\ &+ 1 \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j120} \cdot e^{-j120} + 1 \cdot e^{-j\omega t} \cdot e^{-j120} \cdot e^{-j120}] = \frac{U_M}{3} \cdot [1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j\omega t} + 1 \cdot e^{-j\omega t} + \\ &+ 1 \cdot e^{j\omega t} + 1 \cdot e^{-j\omega t} \cdot e^{-j120} + 1 \cdot e^{j\omega t} + 1 \cdot e^{-j\omega t} \cdot e^{-j240}] = \frac{U_M}{3} \cdot [3 \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j\omega t} + \\ &+ e^{-j\omega t} \cdot (1 + 1 \cdot e^{-j120} + 1 \cdot e^{-j240})] = U_M \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j\omega t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{U}_S = \frac{2}{3} \cdot [u_a \cdot \vec{a}_1 + u_b \cdot \vec{a}_2 + u_c \cdot \vec{a}_3], \quad (3)$$

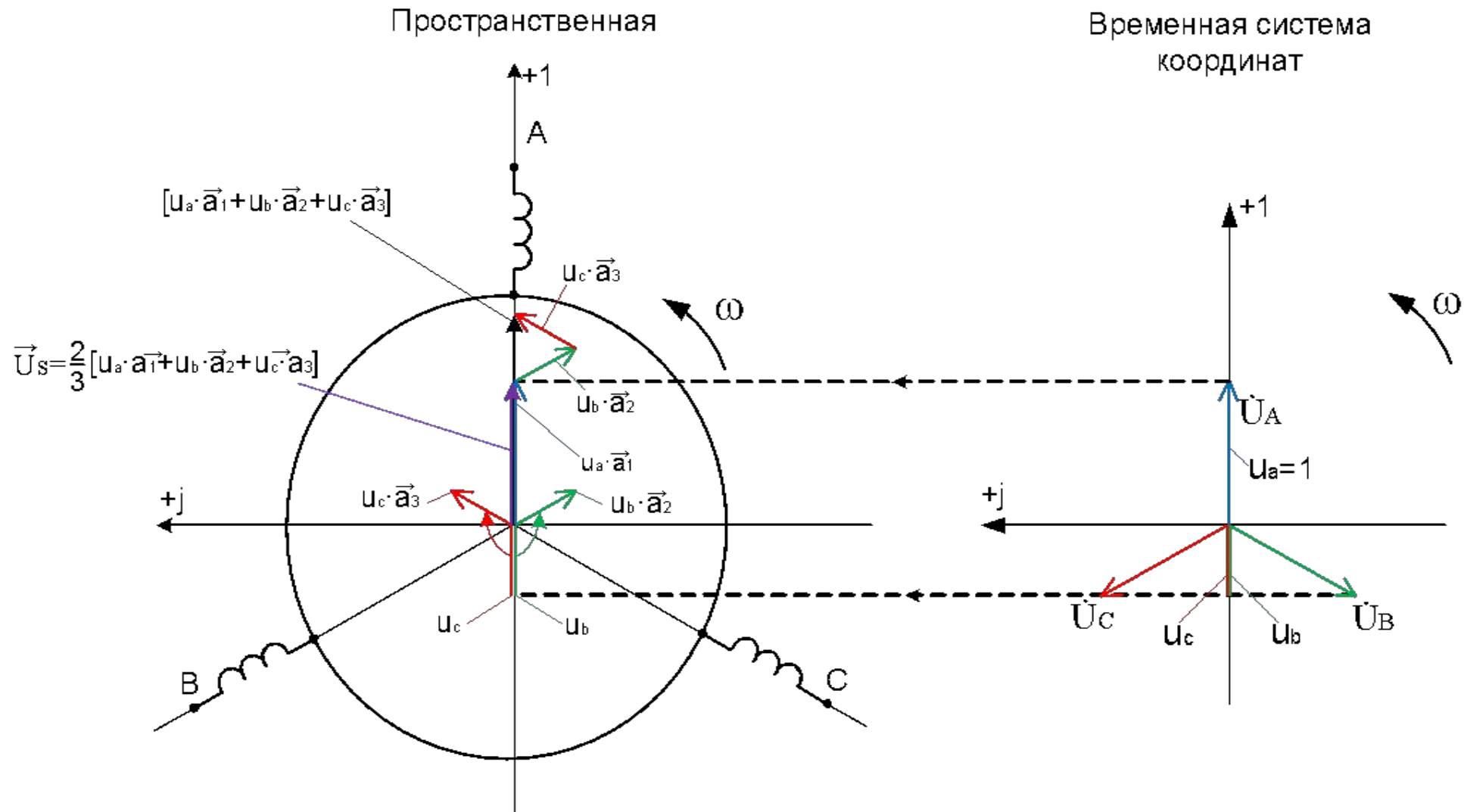
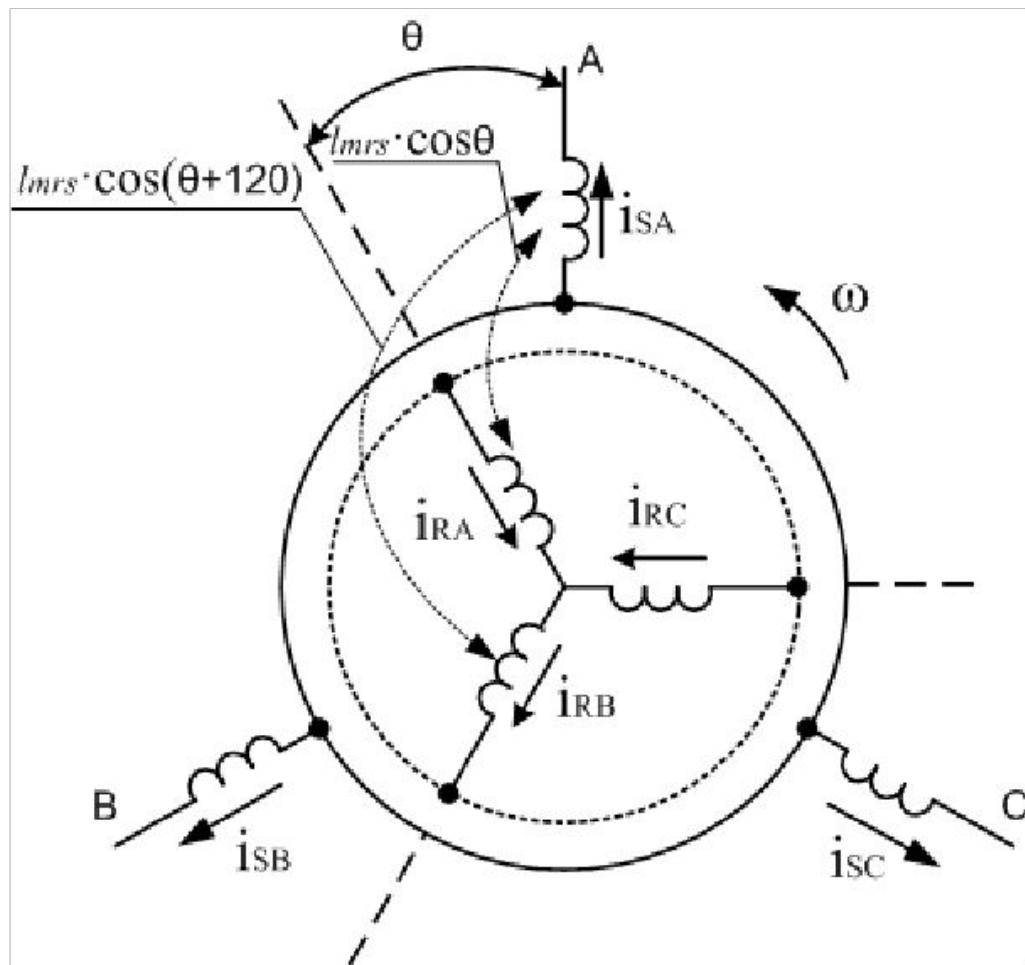


Рис. 2. Геометрический смысл построения пространственного вектора по составляющим и

Основные уравнения асинхронного двигателя в фазных переменных статора и ротора

Обобщенная асинхронная машина показана на рис. 3.



R_s, l_s, l_{ms} – параметры статорной обмотки,
 R_r, l_r, l_{mr} – параметры роторной обмотки,
 $|l_{msr}| = |l_{mrs}| = |l_m|$ – коэффициенты
взаимоиндуктивности при совпадении
магнитных осей статора и ротора ($\theta = 0$).

Рис. 3. Обобщённая асинхронная машина

Преобразование балансов напряжений в фазных переменных в соответствующий баланс пространственных векторов

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{sa} = i_{sa} \cdot R_s + \frac{d\psi_{sa}}{dt}; \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{sb} = i_{sb} \cdot R_s + \frac{d\psi_{sb}}{dt}; \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{sc} = i_{sc} \cdot R_s + \frac{d\psi_{sc}}{dt}; \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\frac{2}{3} \cdot [u_{sa} \cdot a_1 + u_{sb} \cdot a_2 + u_{sc} \cdot a_3] = \frac{2}{3} \cdot [i_{sa} \cdot a_1 + i_{sb} \cdot a_2 + i_{sc} \cdot a_3] \cdot R_s + \frac{d}{dt} \left[\frac{2}{3} \cdot (\psi_{sa} \cdot a_1 + \psi_{sb} \cdot a_2 + \psi_{sc} \cdot a_3) \right].$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{U_s} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{I_s} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\Psi_s}$

$$\boxed{U_s = I_s \cdot R_s + \frac{d\psi_s}{dt}} \quad (17)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} u_{ra} = i_{ra} \cdot R_r + \frac{d\psi_{ra}}{dt} \quad | \times a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right); \\ u_{rb} = i_{rb} \cdot R_r + \frac{d\psi_{rb}}{dt} \quad | \times a_2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right); \\ u_{rc} = i_{rc} \cdot R_r + \frac{d\psi_{rc}}{dt} \quad | \times a_3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right). \end{array} \right.$$

$$\frac{2}{3} \cdot [u_{ra} \cdot a_1 + u_{rb} \cdot a_2 + u_{rc} \cdot a_3] = \frac{2}{3} \cdot [i_{ra} \cdot a_1 + i_{rb} \cdot a_2 + i_{rc} \cdot a_3] \cdot R_r + \frac{d}{dt} \left[\frac{2}{3} \cdot (\psi_{ra} \cdot a_1 + \psi_{rb} \cdot a_2 + \psi_{rc} \cdot a_3) \right].$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{U_r} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{I_r} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\Psi_r}$

$$\boxed{U_r = I_r \cdot R_r + \frac{d\psi_r}{dt}} \quad (18)$$

Вектор потокосцепления статора АД

$$\begin{cases} \psi_{sa} = l_s \cdot i_{sa} + l_{ms} \cdot (i_{sb} + i_{sc}) + (l_{mrs} \cos \theta) \cdot i_{ra} + (l_{mrs} \cos(\theta + 120)) \cdot i_{rb} + (l_{mrs} \cos(\theta + 240)) \cdot i_{rc}; \\ \psi_{sb} = l_s \cdot i_{sb} + l_{ms} \cdot (i_{sa} + i_{sc}) + (l_{mrs} \cos(\theta + 240)) \cdot i_{ra} + (l_{mrs} \cos \theta) \cdot i_{rb} + (l_{mrs} \cos(\theta + 120)) \cdot i_{rc}; \\ \psi_{sc} = l_s \cdot i_{sc} + l_{ms} \cdot (i_{sa} + i_{sb}) + (l_{mrs} \cos(\theta + 120)) \cdot i_{ra} + (l_{mrs} \cos(\theta + 240)) \cdot i_{rb} + (l_{mrs} \cos \theta) \cdot i_{rc}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_{sa} = \underbrace{l_s \cdot i_{sa}}_{\Psi_{ls}} + \underbrace{l_{ms} \cdot (i_{sb} + i_{sc})}_{\Psi_{lms}} + \underbrace{l_{mrs} \cdot [\cos \theta \cdot i_{ra} + \cos(\theta + 120) \cdot i_{rb} + \cos(\theta + 240) \cdot i_{rc}]}_{\Psi_{lmrs}} \\ \psi_{sb} = \underbrace{l_s \cdot i_{sb}}_{\Psi_{ls}} + \underbrace{l_{ms} \cdot (i_{sa} + i_{sc})}_{\Psi_{lms}} + \underbrace{l_{mrs} \cdot [\cos(\theta + 240) \cdot i_{ra} + \cos \theta \cdot i_{rb} + \cos(\theta + 120) \cdot i_{rc}]}_{\Psi_{lmrs}} \\ \psi_{sc} = \underbrace{l_s \cdot i_{sc}}_{\Psi_{ls}} + \underbrace{l_{ms} \cdot (i_{sa} + i_{sb})}_{\Psi_{lms}} + \underbrace{l_{mrs} \cdot [\cos(\theta + 120) \cdot i_{ra} + \cos(\theta + 240) \cdot i_{rb} + \cos \theta \cdot i_{rc}]}_{\Psi_{lmrs}} \end{cases} \quad (20)$$

Цель

$$\psi_s = L_s \cdot I_s + (L_m \cdot e^{j\theta}) \cdot I_r.$$

Вектор потокосцепления статора АД (продолжение)

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{sa} = I_{ms} \cdot \cos(\omega t - \phi_{is}) = \frac{I_{ms}}{2} \cdot \left(e^{j(\omega t - \phi_{is})} \cdot 1 + e^{-j(\omega t - \phi_{is})} \cdot 1 \right) \\ i_{sb} = I_{ms} \cdot \cos(\omega t - \phi_{is} - 120) = \frac{I_{ms}}{2} \cdot \left(e^{j(\omega t - \phi_{is})} \cdot e^{-j120} + e^{-j(\omega t - \phi_{is})} \cdot e^{j120} \right) \\ i_{sc} = I_{ms} \cdot \cos(\omega t - \phi_{is} - 240) = \frac{I_{ms}}{2} \cdot \left(e^{j(\omega t - \phi_{is})} \cdot e^{-j240} + e^{-j(\omega t - \phi_{is})} \cdot e^{j240} \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{ra} = I_{mr} \cdot \cos(\omega t - \phi_{ir}) = \frac{I_{mr}}{2} \cdot \left(e^{j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot 1 + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot 1 \right) \\ i_{rb} = I_{mr} \cdot \cos(\omega t - \phi_{ir} - 120) = \frac{I_{mr}}{2} \cdot \left(e^{j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot e^{-j120} + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot e^{j120} \right) \\ i_{rc} = I_{mr} \cdot \cos(\omega t - \phi_{ir} - 240) = \frac{I_{mr}}{2} \cdot \left(e^{j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot e^{-j240} + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot e^{j240} \right) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) & = \\ \cos(\theta - 120) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta-120)} + e^{-j(\theta-120)}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\theta} \cdot e^{-j120} + e^{-j\theta} \cdot e^{j120}) = \\ \cos(\theta - 240) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta-240)} + e^{-j(\theta-240)}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\theta} \cdot e^{-j240} + e^{-j\theta} \cdot e^{j240}) = \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{c} e^{j\theta} \\ \cdot \\ 1 \end{array} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{c} e^{-j\theta} \\ \cdot \\ 1 \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{c} e^{j\theta} \\ \cdot \\ e^{-j120} \end{array} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{c} e^{-j\theta} \\ \cdot \\ e^{j120} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{c} e^{j\theta} \\ \cdot \\ e^{-j240} \end{array} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{array}{c} e^{-j\theta} \\ \cdot \\ e^{j240} \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{ls} &= l_s \cdot (i_{sa} \cdot a_1 + i_{sb} \cdot a_2 + i_{sc} \cdot a_3) = l_s \cdot \left[\frac{I_{ms}}{2} \cdot (e^{j(\omega t - \phi_{ls})} + e^{-j(\omega t - \phi_{ls})}) \cdot \frac{1}{a_1} e^{j0} + \right. \\
&+ \frac{I_{ms}}{2} \cdot (e^{j(\omega t - \phi_{ls} - 120)} + e^{-j(\omega t - \phi_{ls} - 120)}) \cdot \frac{1}{a_2} e^{j120} + \left. \frac{I_{ms}}{2} \cdot (e^{j(\omega t - \phi_{ls} - 240)} + e^{-j(\omega t - \phi_{ls} - 240)}) \cdot \frac{1}{a_3} e^{j240} \right] = \\
&= \frac{I_{ms}}{2} \cdot l_s \cdot [e^{j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot 1 \cdot e^{j0} + e^{-j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot 1 \cdot e^{j0} + e^{j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot e^{-j120} \cdot 1 \cdot e^{j120} + e^{-j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot e^{j120} \cdot 1 \cdot e^{j120} + \\
&+ e^{j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot e^{-j240} \cdot 1 \cdot e^{j240} + e^{-j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot e^{j240} \cdot 1 \cdot e^{j240}] = \\
&= \frac{I_{ms}}{2} \cdot l_s \cdot (e^{j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot 1 \cdot e^{j0} + e^{-j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot 1 \cdot e^{j0} + e^{j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot 1 \cdot e^{j(120-120)} + e^{-j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot 1 \cdot e^{j(120+120)} + \\
&+ e^{j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot 1 \cdot e^{j(240-240)} + e^{-j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot 1 \cdot e^{j(240+240)}) = \\
&= \frac{I_{ms}}{2} \cdot l_s \cdot [3 \cdot e^{j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot 1 \cdot e^{j0} + e^{-j(\omega t - \phi_{ls})} \cdot (1 \cdot e^{j0} + 1 \cdot e^{j240} + 1 \cdot e^{j480})] = \frac{3}{2} \cdot l_s \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{ls})} .
\end{aligned}$$

Для второго столбца:

$$\begin{aligned} \psi_{lms} &= l_{ms} \cdot [(i_{sb} + i_{sc}) \cdot a_1 + (i_{sa} + i_{sc}) \cdot a_2 + (i_{sa} + i_{sb}) \cdot a_3] = -l_{ms} \cdot (i_{sa} \cdot a_1 + i_{sb} \cdot a_2 + i_{sc} \cdot a_3) = \\ &= \left(-\frac{3}{2} \cdot l_{ms} \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\omega t - \phi_s)} \right). \end{aligned}$$

Наконец, для третьего столбца:

$$\vec{\psi}_{lmrs}(t) = l_{mrs} \cdot [\vec{A}_s + \vec{B}_s + \vec{C}_s],$$

где

$$\begin{aligned} A_s &= 1 \cdot e^{j0} \cdot [i_{ra} \cdot \cos \theta + i_{rb} \cdot \cos(\theta + 120) + i_{rc} \cdot \cos(\theta + 240)]; \\ B_s &= 1 \cdot e^{j120} \cdot [i_{ra} \cdot \cos(\theta + 240) + i_{rb} \cdot \cos \theta + i_{rc} \cdot \cos(\theta + 120)]; \\ C_s &= 1 \cdot e^{j240} \cdot [i_{ra} \cdot \cos(\theta + 120) + i_{rb} \cdot \cos(\theta + 240) + i_{rc} \cdot \cos \theta]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_s &= 1 \cdot e^{j0} \cdot (i_{ra} \cdot \cos \theta + i_{rb} \cdot \cos(\theta + 120) + i_{rc} \cdot \cos(\theta + 240)) = \\
&= 1 \cdot e^{j0} \cdot \left[\underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\alpha - \phi_r)} + e^{-j(\alpha - \phi_r)})}_{i_{ra}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta})}_{\cos \theta} + \underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\alpha - \phi_r - 120)} + e^{-j(\alpha - \phi_r - 120)})}_{i_{rb}} \cdot \right. \\
&\quad \left. \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta + 120)} + e^{-j(\theta + 120)})}_{\cos(\theta + 120)} + \underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\alpha - \phi_r - 240)} + e^{-j(\alpha - \phi_r - 240)})}_{i_{rc}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta + 240)} + e^{-j(\theta + 240)})}_{\cos(\theta + 240)} \right] = \frac{I_{mr}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j0} \times \\
&\quad \times \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
e^{j(\alpha - \phi_r + \theta)} & \cdot & 1 & + & e^{j(\alpha - \phi_r - \theta)} & \cdot & 1 & + & e^{-j(\alpha - \phi_r - \theta)} & \cdot & 1 & + & e^{-j(\alpha - \phi_r + \theta)} & \cdot & 1 \\
+ & e^{j(\alpha - \phi_r + \theta)} & \cdot & e^{j(-120 + 120)} & + & e^{j(\alpha - \phi_r - \theta)} & \cdot & e^{j(-120 - 120)} & + & e^{-j(\alpha - \phi_r - \theta)} & \cdot & e^{j(120 + 120)} & + & e^{-j(\alpha - \phi_r + \theta)} & \cdot & e^{j(120 - 120)} \\
+ & e^{j(\alpha - \phi_r + \theta)} & \cdot & e^{j(-240 + 240)} & + & e^{j(\alpha - \phi_r - \theta)} & \cdot & e^{j(-240 - 240)} & + & e^{-j(\alpha - \phi_r - \theta)} & \cdot & e^{j(240 + 240)} & + & e^{-j(\alpha - \phi_r + \theta)} & \cdot & e^{j(240 - 240)}
\end{array} \right] = \\
&= \frac{I_{mr}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot [3 \cdot e^{j(\alpha - \phi_r + \theta)} + e^{j(\alpha - \phi_r - \theta)} \cdot (1 + e^{-j240} + e^{-j480}) + e^{-j(\alpha - \phi_r - \theta)} \cdot (1 + e^{j240} + e^{j480}) + \\
&\quad + 3 \cdot e^{-j(\alpha - \phi_r + \theta)}] = \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_r} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{j\alpha} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j\phi_r} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{-j\alpha},
\end{aligned}$$

где $(1 + e^{j240} + e^{j480}) = (1 + e^{j120} + e^{j240}) = 0$.

$$\begin{aligned}
B_s &= 1 \cdot e^{j120} \cdot (i_{ra} \cdot \cos(\theta + 240) + i_{rb} \cdot \cos \theta + i_{rc} \cdot \cos(\theta + 120)) = \\
&= 1 \cdot e^{j120} \cdot \left[\underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\alpha - \phi_r)} + e^{-j(\alpha - \phi_r)})}_{i_{ra}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta + 240)} + e^{-j(\theta + 240)})}_{\cos(\theta + 240)} + \underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\alpha - \phi_r - 120)} + e^{-j(\alpha - \phi_r - 120)})}_{i_{rb}} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta})}_{\cos \theta} + \underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\alpha - \phi_r - 240)} + e^{-j(\alpha - \phi_r - 240)})}_{i_{rc}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta + 120)} + e^{-j(\theta + 120)})}_{\cos(\theta + 120)} \right] = \frac{I_{mr}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j120} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \left[\begin{array}{c} e^{j(\alpha - \phi_r + \theta)} \cdot e^{j240} \\ + e^{j(\alpha - \phi_r + \theta)} \cdot e^{-j120} \\ + e^{j(\alpha - \phi_r + \theta)} \cdot e^{j(-240 + 120)} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} e^{j(\alpha - \phi_r - \theta)} \cdot e^{-j240} \\ + e^{j(\alpha - \phi_r - \theta)} \cdot e^{-j120} \\ + e^{j(\alpha - \phi_r - \theta)} \cdot e^{j(-240 - 120)} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} e^{-j(\alpha - \phi_r - \theta)} \cdot e^{j240} \\ + e^{-j(\alpha - \phi_r - \theta)} \cdot e^{+j120} \\ + e^{-j(\alpha - \phi_r - \theta)} \cdot e^{j(240 + 120)} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} e^{-j(\alpha - \phi_r + \theta)} \cdot e^{-j240} \\ + e^{-j(\alpha - \phi_r + \theta)} \cdot e^{j120} \\ + e^{-j(\alpha - \phi_r + \theta)} \cdot e^{j(240 - 120)} \end{array} \right] = \\
&= \frac{I_{mr}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j120} \cdot [e^{j(\alpha - \phi_r + \theta)} \cdot (e^{j240} + e^{-j120} + e^{-j120}) + e^{j(\alpha - \phi_r - \theta)} \cdot (e^{-j240} + e^{-j120} + e^{-j360}) + \\
&= e^{-j(\alpha - \phi_r - \theta)} \cdot (e^{j240} + e^{j120} + e^{j360}) + e^{-j(\alpha - \phi_r + \theta)} \cdot (e^{-j240} + e^{j120} + e^{j120})] = \\
&= \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_r} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{j\alpha} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j240} \cdot e^{j\phi_r} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{-j\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_s &= 1 \cdot e^{j240} \cdot (i_{ra} \cdot \cos(\theta + 120) + i_{rb} \cdot \cos(\theta + 240) + i_{rc} \cdot \cos \theta) = \\
&= 1 \cdot e^{j240} \cdot \left[\underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\alpha t - \phi_r)} + e^{-j(\alpha t - \phi_r)})}_{i_{ra}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta + 120)} + e^{-j(\theta + 120)})}_{\cos(\theta + 120)} + \underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\alpha t - \phi_r - 120)} + e^{-j(\alpha t - \phi_r - 120)})}_{i_{rb}} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta + 240)} + e^{-j(\theta + 240)})}_{\cos(\theta + 240)} + \underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\alpha t - \phi_r - 240)} + e^{-j(\alpha t - \phi_r - 240)})}_{i_{rc}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta})}_{\cos \theta} \right] = \frac{I_{mr}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j240} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
e^{j(\alpha t - \phi_r + \theta)} & \cdot & e^{j120} & + & e^{j(\alpha t - \phi_r - \theta)} & \cdot & e^{-j120} & + & e^{-j(\alpha t - \phi_r - \theta)} & \cdot & e^{j120} & + & e^{-j(\alpha t - \phi_r + \theta)} & \cdot & e^{-j120} & + \\
e^{j(\alpha t - \phi_r + \theta)} & \cdot & e^{j(-120 + 240)} & + & e^{j(\alpha t - \phi_r - \theta)} & \cdot & e^{j(-120 - 240)} & + & e^{-j(\alpha t - \phi_r - \theta)} & \cdot & e^{-j(-120 - 240)} & + & e^{-j(\alpha t - \phi_r + \theta)} & \cdot & e^{-j(-120 + 240)} & + \\
e^{j(\alpha t - \phi_r + \theta)} & \cdot & e^{-j240} & + & e^{j(\alpha t - \phi_r - \theta)} & \cdot & e^{-j240} & + & e^{-j(\alpha t - \phi_r - \theta)} & \cdot & e^{j240} & + & e^{-j(\alpha t - \phi_r + \theta)} & \cdot & e^{j240} & + \\
\hline
\end{array} \right] = \\
&= \frac{I_{mr}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j120} \cdot [e^{j(\alpha t - \phi_r + \theta)} \cdot (e^{j120} + e^{j120} + e^{-j240}) + e^{j(\alpha t - \phi_r - \theta)} \cdot (e^{-j120} + e^{-j360} + e^{-j240}) + \\
&\quad + e^{-j(\alpha t - \phi_r - \theta)} \cdot (e^{j120} + e^{j360} + e^{j240}) + e^{-j(\alpha t - \phi_r + \theta)} \cdot (e^{-j120} + e^{j360} + e^{j-120})] = \\
&= \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j360} \cdot e^{-j\phi_r} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{j\alpha t} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j120} \cdot e^{j\phi_r} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{-j\alpha t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{A_s} + \boxed{B_s} + \boxed{C_s} &= \left[\left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot \boxed{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{ir}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot \boxed{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{j\phi_{ir}} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{-j\omega t} \right] + \\
&+ \left[\left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot \boxed{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{ir}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot \boxed{1} \cdot e^{j120} \cdot e^{j\phi_{ir}} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{-j\omega t} \right] + \\
&+ \left[\left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot \boxed{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{ir}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot \boxed{1} \cdot e^{j240} \cdot e^{j\phi_{ir}} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{-j\omega t} \right] = \\
&= \left(\frac{9}{4} \cdot I_{mr} \cdot \boxed{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{ir}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} + \frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot \boxed{1} \cdot e^{j\phi_{ir}} \cdot e^{-j\theta} \cdot (e^{j0} + e^{j240} + e^{j120}) \cdot e^{-j\omega t} = \\
&= \left(\frac{9}{4} \cdot I_{mr} \cdot \boxed{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{ir}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} .
\end{aligned}$$

$$\Psi_{lmrs} = l_{mrs} \cdot [A_s + B_s + C_s] = \left(\frac{9}{4} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_r} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t}.$$

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \frac{2}{3} \cdot (a_1 \cdot \Psi_{sa} + a_2 \cdot \Psi_{sb} + a_3 \cdot \Psi_{sc}) = \frac{2}{3} \cdot (\Psi_{ls}(t) + \Psi_{lms}(t) + \Psi_{lmrs}(t)) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{3}{2} \cdot I_{ms} \cdot l_s \cdot 1 \cdot e^{-j\phi_{is}} \right) \cdot e^{j\omega t} - \left(\frac{3}{2} \cdot I_{ms} \cdot l_{ms} \cdot 1 \cdot e^{-j\phi_{is}} \right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\frac{9}{4} \cdot I_{mr} \cdot l_{mrs} \cdot 1 \cdot e^{-j\phi_r} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} \right] = \\ &= \left[(l_s - l_{ms}) \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{-j\phi_{is}} + \frac{3}{2} \cdot l_{mrs} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{-j\phi_r} \cdot e^{j\theta} \right] \cdot e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Обозначим $l_s - l_{ms} = L_s$; $\frac{3}{2} \cdot l_{mrs} = L_m$; $I_s = I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j(\omega t - \phi_{is})}$; $I_r = I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j(\omega t - \phi_r)}$.

Окончательно, вектор потокосцепления статора [1]:

$$\Psi_s = L_s \cdot I_s + (L_m \cdot e^{j\theta}) \cdot I_r. \quad (21)$$

Вектор потокосцепления ротора АД

$$\begin{cases} \psi_{ra} = l_r \cdot i_{ra} + l_{mr} \cdot (i_{sb} + i_{sc}) + (l_{msr} \cos(-\theta)) \cdot i_{sa} + (l_{msr} \cos(120 - \theta)) \cdot i_{sb} + (l_{msr} \cos(240 - \theta)) \cdot i_{sc}; \\ \psi_{rb} = l_r \cdot i_{rb} + l_{mr} \cdot (i_{sa} + i_{sc}) + (l_{msr} \cos(240 - \theta)) \cdot i_{sa} + (l_{msr} \cos(-\theta)) \cdot i_{sb} + (l_{msr} \cos(120 - \theta)) \cdot i_{sc}; \\ \psi_{rc} = l_r \cdot i_{rc} + l_{mr} \cdot (i_{sa} + i_{sb}) + (l_{msr} \cos(120 - \theta)) \cdot i_{sa} + (l_{msr} \cos(240 - \theta)) \cdot i_{sb} + (l_{msr} \cos(-\theta)) \cdot i_{sc}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_{ra} = \underbrace{l_r \cdot i_{ra}}_{\psi_{lr}} + \underbrace{l_{mr} \cdot (i_{sb} + i_{sc})}_{\psi_{lmr}} + \underbrace{l_{msr} \cdot [\cos(-\theta) \cdot i_{sa} + \cos(-\theta + 120) \cdot i_{sb} + \cos(-\theta + 240) \cdot i_{sc}]}_{\psi_{lmsr}} \\ \psi_{rb} = \underbrace{l_r \cdot i_{rb}}_{\psi_{lr}} + \underbrace{l_{mr} \cdot (i_{sa} + i_{sc})}_{\psi_{lmr}} + \underbrace{l_{msr} \cdot [\cos(-\theta + 240) \cdot i_{sa} + \cos(-\theta) \cdot i_{sb} + \cos(-\theta + 120) \cdot i_{sc}]}_{\psi_{lmsr}} \\ \psi_{rc} = \underbrace{l_r \cdot i_{rc}}_{\psi_{lr}} + \underbrace{l_{mr} \cdot (i_{sa} + i_{sb})}_{\psi_{lmr}} + \underbrace{l_{msr} \cdot [\cos(-\theta + 120) \cdot i_{sa} + \cos(-\theta + 240) \cdot i_{sb} + \cos(-\theta) \cdot i_{sc}]}_{\psi_{lmsr}} \end{cases} \quad (23)$$

Цель

$$\psi_r = L_r \cdot I_r + (L_m \cdot e^{-j\theta}) \cdot I_s$$

Пространственный вектор для первого столбца Ψ_{lr} :

$$\begin{aligned}
 \Psi_{lr} &= l_r \cdot (i_{ra} \cdot a_1 + i_{rb} \cdot a_2 + i_{rc} \cdot a_3) = l_r \cdot \left[\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\omega t - \phi_{ir})} + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})}) \cdot 1 \cdot e^{j0} + \right. \\
 &+ \frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\omega t - \phi_{ir} - 120)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - 120)}) \cdot 1 \cdot e^{j120} + \frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\omega t - \phi_{ir} - 240)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - 240)}) \cdot 1 \cdot e^{j240} \left. \right] = \\
 &= \frac{I_{mr}}{2} \cdot l_r \cdot \left(e^{j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot 1 \cdot e^{j0} + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot 1 \cdot e^{j0} + \right. \\
 &+ e^{j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot 1 \cdot e^{j(120 - 120)} + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot 1 \cdot e^{j(120 + 120)} + \\
 &+ e^{j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot 1 \cdot e^{j(240 - 240)} + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot 1 \cdot e^{j(240 + 240)} \left. \right) = \\
 &= \frac{I_{mr}}{2} \cdot l_r \cdot [e^{j(\omega t - \phi_{is})} \cdot (1 \cdot e^{j0} + 1 \cdot e^{j0} + 1 \cdot e^{j0}) + e^{-j(\omega t - \phi_{is})} \cdot (1 \cdot e^{j0} + 1 \cdot e^{j240} + 1 \cdot e^{j120})] = \\
 &= \frac{3}{2} \cdot l_r \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{ir})}.
 \end{aligned}$$

Пространственный вектор для второго столбца системы уравнений (23):

$$\begin{aligned} \Psi_{l_{mr}} &= l_{mr} \cdot [a_1 \cdot (i_{rb} + i_{rc}) + a_2 \cdot (i_{ra} + i_{rc}) + a_3 \cdot (i_{ra} + i_{rb})] = -l_{mr} \cdot (a_1 \cdot i_{ra} + a_2 \cdot i_{rb} + a_3 \cdot i_{rc}) = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot l_{mr} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{ir})}. \end{aligned}$$

Пространственный вектор для третьего столбца (23):

$$\Psi_{l_{msr}} = l_{msr} \cdot [A_r + B_r + C_r],$$

где

$$\begin{aligned} A_r &= 1 \cdot e^{j0} \cdot (i_{sa} \cdot \cos \theta + i_{sb} \cdot \cos(\theta - 120) + i_{sc} \cdot \cos(\theta - 240)); \\ B_r &= 1 \cdot e^{j120} \cdot (i_{sa} \cdot \cos(\theta - 240) + i_{sb} \cdot \cos \theta + i_{sc} \cdot \cos(\theta - 120)); \\ C_r &= 1 \cdot e^{j240} \cdot (i_{sa} \cdot \cos(\theta - 120) + i_{sb} \cdot \cos(\theta - 240) + i_{sc} \cdot \cos \theta). \end{aligned}$$

$$\overline{A_r} = 1 \cdot e^{j0} \cdot (i_{sa} \cdot \cos \theta + i_{sb} \cdot \cos(\theta - 120) + i_{sc} \cdot \cos(\theta - 240)) =$$

$$= 1 \cdot e^{j0} \left(\frac{I_{ms}}{2} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{is})} + e^{-j(\omega t - \phi_{is})} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{j\theta} \cdot e^{-j\theta}) + \frac{I_{ms}}{2} \left(e^{j(\omega t - \phi_{is} - 120)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - 120)} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta - 120)} \cdot e^{-j(\theta - 120)}) + \frac{I_{ms}}{2} \left(e^{j(\omega t - \phi_{is} - 240)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - 240)} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta - 240)} \cdot e^{-j(\theta - 240)}) = \frac{I_{ms}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j0} \times$$

$$\left[\begin{aligned} & \left(e^{j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} + e^{j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} + e^{j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \right) \cdot \left(e^{-j(120 + 120)} + e^{-j(240 + 240)} \right) \\ & + \left(e^{j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} + e^{j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} + e^{j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} \right) \cdot \left(e^{-j(120 - 120)} + e^{-j(240 - 240)} \right) \\ & + \left(e^{-j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} \right) \cdot \left(e^{j(120 - 120)} + e^{j(240 - 240)} \right) \\ & + \left(e^{-j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \right) \cdot \left(e^{j(120 + 120)} + e^{j(240 + 240)} \right) \end{aligned} \right] =$$

$$= \frac{I_{ms}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot [e^{j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \cdot (1 + e^{-j240} + e^{-j480}) + 3 \cdot e^{j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} + 3 \cdot e^{-j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \cdot (1 + e^{j240} + e^{j480})] = \left(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{is}} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{j\alpha t} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j\phi_{is}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{-j\alpha t}.$$

$$B_r = 1 \cdot e^{j120} \cdot (i_{sa} \cdot \cos(\theta - 240) + i_{sb} \cdot \cos\theta + i_{sc} \cdot \cos(\theta - 120)) =$$

$$= 1 \cdot e^{j120} \left(\underbrace{\frac{I_{ms}}{2} \cdot (e^{j(wt-\phi_{is})} + e^{-j(wt-\phi_{is})})}_{i_{sa}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta-240)} \cdot e^{-j(\theta-240)})}_{\cos(\theta-240)} + \underbrace{\frac{I_{ms}}{2} \cdot (e^{j(wt-\phi_{is}-120)} + e^{-j(wt-\phi_{is}-120)})}_{i_{sb}} \right).$$

$$\cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j\theta} \cdot e^{-j\theta})}_{\cos\theta} + \underbrace{\frac{I_{ms}}{2} \cdot (e^{j(wt-\phi_{is}-240)} + e^{-j(wt-\phi_{is}-240)})}_{i_{sc}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta-120)} \cdot e^{-j(\theta-120)})}_{\cos(\theta-120)} = \frac{I_{ms}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j120} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)} & \cdot & e^{-j240} & + & e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)} & \cdot & e^{j240} & + & e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)} & \cdot & e^{-j240} & + & e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)} & \cdot & e^{j240} \\ + & e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)} & \cdot & e^{-j120} & + & e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)} & \cdot & e^{-j120} & + & e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)} & \cdot & e^{j120} & + & e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)} & \cdot & e^{j120} \\ + & e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)} & \cdot & e^{-j(240+120)} & + & e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)} & \cdot & e^{-j(240-120)} & + & e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)} & \cdot & e^{j(240-120)} & + & e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)} & \cdot & e^{j(240+120)} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{I_{ms}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j120} \cdot [e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)} \cdot (e^{-j240} + e^{-j120} + e^{-j360}) + 3 \cdot e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)} \cdot e^{-j120} + 3 \cdot e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)} \cdot e^{j120} +$$

$$+ e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)} \cdot (e^{j240} + e^{j120} + e^{j360})] = \left(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{is}} \cdot e^{-j\theta}\right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j240} \cdot e^{j\phi_{is}} \cdot e^{j\theta}\right) \cdot e^{-j\omega t}.$$

$$C_r = 1 \cdot e^{j240} \cdot (i_{sa} \cdot \cos(\theta - 120) + i_{sb} \cdot \cos(\theta - 240) + i_{sc} \cdot \cos \theta) =$$

$$= 1 \cdot e^{j240} \left(\underbrace{\frac{I_{ms}}{2} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{is})} + e^{-j(\omega t - \phi_{is})}}_{i_{sa}} \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta - 120)} \cdot e^{-j(\theta - 120)})}_{\cos(\theta - 120)} + \underbrace{\frac{I_{ms}}{2} (e^{j(\omega t - \phi_{is} - 120)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - 120)})}_{i_{sb}}$$

$$\cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j(\theta - 240)} \cdot e^{-j(\theta - 240)})}_{\cos(\theta - 240)} + \underbrace{\frac{I_{ms}}{2} (e^{j(\omega t - \phi_{is} - 240)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - 240)})}_{i_{sc}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (e^{j\theta} \cdot e^{-j\theta})}_{\cos \theta} = \frac{I_{ms}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j240} \cdot$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \left. \begin{array}{l} e^{j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \\ + e^{j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \\ + e^{j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} e^{-j120} \\ e^{-j(120+240)} \\ e^{-j240} \end{array} \right\} & + & \left. \begin{array}{l} e^{j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} \\ + e^{j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} \\ + e^{j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} e^{j120} \\ e^{-j(120-240)} \\ e^{-j240} \end{array} \right\} & + & \left. \begin{array}{l} e^{-j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} \\ + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} \\ + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} e^{-j120} \\ e^{j(120-240)} \\ e^{j240} \end{array} \right\} & + & \left. \begin{array}{l} e^{-j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \\ + e^{-j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \\ + e^{-j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} e^{j120} \\ e^{j(120+240)} \\ e^{j240} \end{array} \right\} & + & \left. \begin{array}{l} e^{j120} \\ + e^{j(120+240)} \\ + e^{j240} \end{array} \right\} & = \end{array}$$

$$= \frac{I_{ms}}{4} \cdot 1 \cdot e^{j240} \cdot [e^{j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \cdot (e^{-j120} + e^{-j360} + e^{-j240}) + 3 \cdot e^{j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} \cdot e^{j120} + 3 \cdot e^{-j(\omega t - \phi_{is} - \theta)} \cdot e^{-j120} +$$

$$+ e^{-j(\omega t - \phi_{is} + \theta)} \cdot (e^{j120} + e^{j360} + e^{j240})] = \left(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j360} \cdot e^{-j\phi_{is}} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j120} \cdot e^{j\phi_{is}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{-j\omega t}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}_r + \vec{B}_r + \vec{C}_r &= \left[\left(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{is}} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{j\phi_{is}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{-j\omega t} \right] + \\
&+ \left[\left(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{is}} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j240} \cdot e^{j\phi_{is}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{-j\omega t} \right] + \\
&+ \left[\left(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j360} \cdot e^{-j\phi_{is}} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} + \left(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j120} \cdot e^{j\phi_{is}} \cdot e^{j\theta} \right) \cdot e^{-j\omega t} \right] = \\
&= \left(\frac{9}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{is}} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot e^{j\omega t} + \frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j\phi_{is}} \cdot e^{j\theta} \cdot (e^{j0} + e^{j240} + e^{j120}) \cdot e^{-j\omega t} = \\
&= \frac{9}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{is})} \cdot e^{-j\theta} .
\end{aligned}$$

$$\Psi_{lmsr} = l_{msr} \cdot [A_r + B_r + C_r] = \frac{9}{4} \cdot (l_{msr} \cdot e^{-j\theta}) \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\alpha t - \phi_{is})}.$$

$$\begin{aligned} \Psi_r &= \frac{2}{3} \cdot (\Psi_{ra} \cdot a_1 + \Psi_{rb} \cdot a_2 + \Psi_{rc} \cdot a_3) = \frac{2}{3} \cdot (\Psi_{lr} + \Psi_{lmr} + \Psi_{lmsr}) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot l_r \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\alpha t - \phi_{ir})} - \frac{3}{2} \cdot l_{mr} \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\alpha t - \phi_{ir})} + \frac{9}{4} \cdot (l_{msr} \cdot e^{-j\theta}) \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j(\alpha t - \phi_{is})} \right) = \\ &= (l_r - l_{mr}) \cdot I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\alpha t - \phi_{ir})} + \left(\frac{3}{2} \cdot l_{msr} \cdot e^{-j\theta} \right) \cdot I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\alpha t - \phi_{is})}. \end{aligned}$$

Обозначим $I_r = I_{mr} \cdot 1 \cdot e^{j(\alpha t - \phi_{ir})}$; $I_s = I_{ms} \cdot 1 \cdot e^{j(\alpha t - \phi_{is})}$; $l_r - l_{mr} = L_r$; $\frac{3}{2} \cdot l_{msr} = L_m$.

Окончательно, вектор потокосцепления ротора:

$$\boxed{\Psi_r = L_r \cdot I_r + (L_m \cdot e^{-j\theta}) \cdot I_s} \quad (24)$$

Векторные уравнения АД в различных системах координат

Исходные уравнения

$$\begin{cases} \vec{U}_S = \vec{I}_S \cdot R_S + \frac{d\vec{\psi}_S}{dt}; \\ \vec{U}_R = \vec{I}_R \cdot R_R + \frac{d\vec{\psi}_R}{dt}; \\ \vec{\psi}_S = L_S \cdot \vec{I}_S + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot \vec{I}_R; \\ \vec{\psi}_R = L_S \cdot \vec{I}_R + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot \vec{I}_S. \end{cases}$$

Цель

$$\begin{cases} \vec{U}_S = \vec{I}_S \cdot R_S + \frac{d\vec{\psi}_S}{dt} + j\Omega_k \cdot \vec{\psi}_S; \\ \vec{U}_R = \vec{I}_R \cdot R_R + \frac{d\vec{\psi}_{RK}}{dt} + j \cdot (\Omega_k - \Omega) \cdot \vec{\psi}_R; \\ \vec{\psi}_S = L_S \cdot \vec{I}_S + L_m \cdot \vec{I}_R; \\ \vec{\psi}_{RK} = L_R \cdot \vec{I}_R + L_m \cdot \vec{I}_S. \end{cases}$$

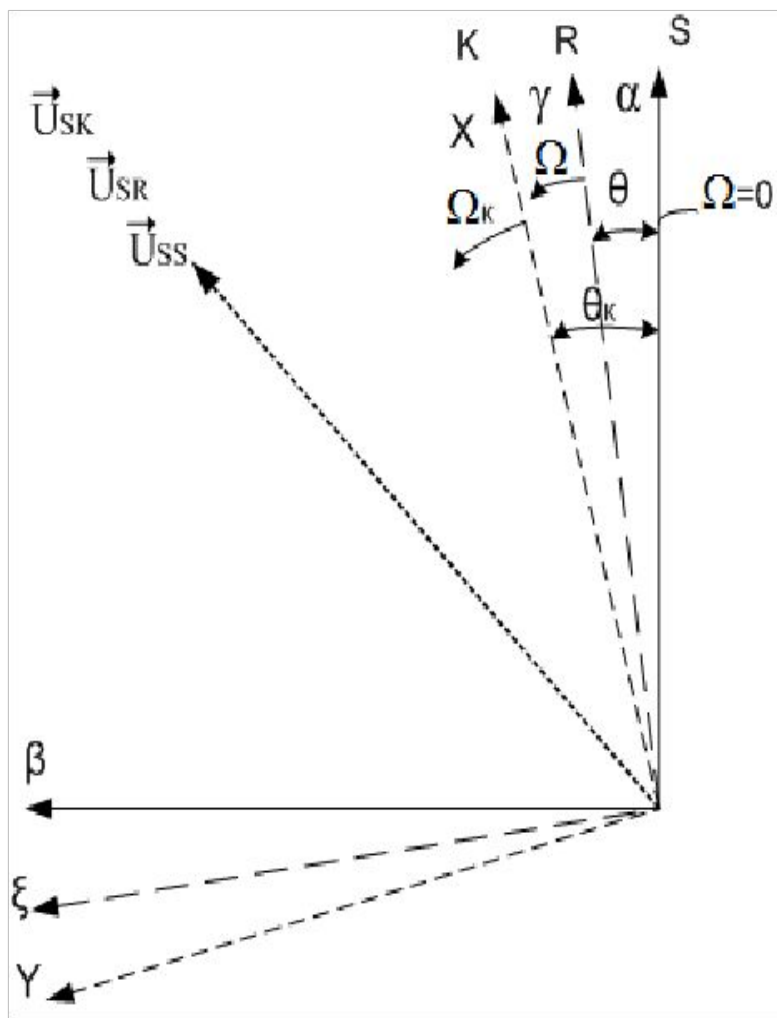


Рис. 4. Система координат S.R.K.

$S[\alpha; \beta]$ – неподвижная система координат статора ($\omega = 0$);

$R[\gamma; \xi]$ – система координат, связанная с ротором; θ - угол сдвига системы координат R по отношению к S, причем $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$;

$K[x; y]$ – произвольная система координат, θ_k - угол сдвига к неподвижной системе S ($\Omega_k = \frac{d\theta_k}{dt}$);

\vec{U}_{SS} – пространственный вектор напряжения статора.

\vec{U}_{SR} и \vec{U}_{SK} – этот же пространственный вектор напряжения статора в системах координат ротора R и K соответственно.

Связь между векторами в разных системах координат:

$$\begin{cases} \vec{U}_{SS} = \vec{U}_{SR} \cdot e^{j\theta} = \vec{U}_{SK} \cdot e^{j\theta_k}; \\ \vec{U}_{SR} = \vec{U}_{SS} \cdot e^{-j\theta} = \vec{U}_{SK} \cdot e^{j(\theta_k - \theta)}; \\ \vec{U}_{SK} = \vec{U}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k} = \vec{U}_{SR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)}. \end{cases}$$

Система уравнений (25) – (28) примет следующий вид:

$$\vec{U}_{SS} = I_{SS} \cdot R_S + \frac{d\psi_{SS}}{dt}, \quad (29)$$

где \vec{U}_{SS} , I_{SS} , ψ_{SS} – записаны в неподвижной системе координат статора S .

$$\vec{U}_{RR} = I_{RR} \cdot R_R + \frac{d\psi_{RR}}{dt}, \quad (30)$$

где \vec{U}_{RR} , I_{RR} , ψ_{RR} – пространственные векторы роторных величин в роторной системе координат R .

$$\psi_{SS} = L_S \cdot I_{SS} + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot I_{RR}, \quad (31)$$

где ψ_{SS} , I_{SS} – векторы потокосцепления и ток статора в неподвижной системе координат S , а I_{RR} – в роторной системе координат сдвинутой в неподвижной системе на угол Θ .

$$\psi_{RR} = L_R \cdot I_{RR} + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot I_{SS}, \quad (32)$$

Приведение уравнений к системе координат вращающейся с произвольной скоростью ω_k

Уравнение (24) умножим на $e^{-j\theta_k}$ и сразу выразим $\vec{\psi}_{SS} = \vec{\psi}_{SK} \cdot e^{j\theta}$:

$$\vec{U}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k} = (\vec{I}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k}) \cdot R_S + e^{-j\theta_k} \cdot \frac{d(\vec{\psi}_{SK} \cdot e^{j\theta})}{dt};$$

$$\vec{U}_{SK} = \vec{I}_{SK} \cdot R_S + \frac{d\vec{\psi}_{SK}}{dt} \cdot e^{-j\theta_k} \cdot e^{j\theta_k} + j \frac{\theta_k}{dt} \cdot \vec{\psi}_{SK} \cdot e^{-j\theta_k} \cdot e^{j\theta_k};$$

$$\vec{U}_{SK} = \vec{I}_{SK} \cdot R_S + \frac{d\vec{\psi}_{SK}}{dt} + j \frac{\theta_k}{dt} \cdot \vec{\psi}_{SK}.$$

Уравнение (25) умножим на $e^{-j(\theta_k - \theta)}$:

$$\vec{U}_{RR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)} = \vec{I}_{RR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)} \cdot R_R + e^{-j(\theta_k - \theta)} \cdot \frac{d(\vec{\psi}_{RK} \cdot e^{j(\theta_k - \theta)})}{dt};$$

$$\vec{U}_{RK} = \vec{I}_{RK} \cdot R_R + e^{-j(\theta_k - \theta)} \cdot e^{j(\theta_k - \theta)} \cdot \frac{d\vec{\psi}_{RK}}{dt} + j \cdot \left(\frac{\theta_k}{dt} - \frac{\theta}{dt} \right) \cdot \vec{\psi}_{RK} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)} \cdot e^{j(\theta_k - \theta)};$$

$$\boxed{\boxed{U}}_{RK} = \boxed{I}_{RK} \cdot R_R + \frac{d\boxed{\psi}_{RK}}{dt} + j \cdot (\Omega_k - \Omega) \cdot \boxed{\psi}_{RK}.$$

Уравнение (26) умножим на $e^{-j\theta_k}$, тогда

$$\vec{\psi}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k} = L_S \cdot (\vec{I}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k}) + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot \vec{I}_{RR} \cdot e^{-j\theta_k}, \text{ т.к. } \vec{I}_{RR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)} = \vec{I}_{RK}, \text{ то}$$

$$\vec{\psi}_{SK} = L_S \cdot \vec{I}_{SK} + L_m \cdot \vec{I}_{RK}.$$

Уравнение(27) умножим на $e^{-j(\theta_k - \theta)}$, тогда

$$\vec{\psi}_{RR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)} = L_R \cdot (\vec{I}_{RR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)}) + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot (\vec{I}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k}) \cdot e^{j\theta};$$

$$\vec{\psi}_{RK} = L_R \cdot \vec{I}_{RK} + L_m \cdot \vec{I}_{SK}.$$

$$\begin{cases} U_{SK} = I_{SK} \cdot R_S + \frac{d\psi_{SK}}{dt} + j\Omega_k \cdot \psi_{SK}; \\ U_{RK} = I_{RK} \cdot R_R + \frac{d\psi_{RK}}{dt} + j \cdot (\Omega_k - \Omega) \cdot \psi_{RK}; \\ \psi_{SK} = L_S \cdot I_{SK} + L_m \cdot I_{RK}; \\ \psi_{RK} = L_R \cdot I_{RK} + L_m \cdot I_S. \end{cases}$$