Эйлер (1707-1783 гг) – крупный математик, физик, механик, астроном

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

Пространственные векторы в асинхронном двигателе

$$
\begin{cases}
u_a = \dfrac{U_m}{2}\cdot(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = \dfrac{U_m}{2}\cdot[\cos\omega t + j\sin\omega t + \cos(-\omega t) + j\sin(-\omega t)] = \\
= \dfrac{U_m}{2}\cdot[\cos\omega t + j\sin\omega t + \cos\omega t - j\sin\omega t] = U_m\cdot\cos\omega t; \\
u_b = \dfrac{U_m}{2}\cdot(e^{j(\omega t-120)} + e^{-j(\omega t-120)}) = \dfrac{U_m}{2}\cdot[e^{j\omega t}e^{-j120} + e^{-j\omega t}e^{j120}] = \\
= \dfrac{U_m}{2}\cdot[(\cos\omega t + j\sin\omega t)\cdot(\cos 120 + j\sin 120) + (\cos\omega t - j\sin\omega t)\cdot(\cos 120 + j\sin 120)] = \\
= \dfrac{U_m}{2}\cdot[\cos\omega t\cdot\cos 120 + j\cos\omega t\cdot\sin 120 + j\sin\omega t\cdot\cos 120 + \sin\omega t\cdot\sin 120 + \cos\omega t\cdot\cos 120 + \\
+ j\cos\omega t\cdot\sin 120 - j\sin\omega t\cdot\cos 120 + \sin\omega t\cdot\sin 120] = \\
= \dfrac{U_m}{2}\cdot[2\cdot\cos\omega t\cdot\cos 120 + 2\cdot\sin\omega t\cdot\sin 120] = U_m\cdot\cos(\omega t - 120); \\
u_c = \dfrac{U_m}{2}\cdot(e^{j(\omega t+120)} + e^{-j(\omega t+120)}) = \dfrac{U_m}{2}\cdot[e^{j\omega t}e^{j120} + e^{-j\omega t}e^{-j120}] = \\
= \dfrac{U_m}{2}\cdot[(\cos\omega t + j\sin\omega t)\cdot(\cos 120 + j\sin 120) + (\cos\omega t - j\sin\omega t)\cdot(\cos 120 - j\sin 120)] = \\
= \dfrac{U_m}{2}\cdot[\cos\omega t\cdot\cos 120 + j\cos\omega t\cdot\sin 120 + j\sin\omega t\cdot\cos 120 - \sin\omega t\cdot\sin 120 + \cos\omega t\cdot\cos 120 - \\
+ j\cos\omega t\cdot\sin 120 - j\sin\omega t\cdot\cos 120 - \sin\omega t\cdot\sin 120] = \\
= \dfrac{U_m}{2}\cdot[2\cdot\cos\omega t\cdot\cos 120 - 2\cdot\sin\omega t\cdot\sin 120] = U_m\cdot\cos(\omega t + 120).
\end{cases}
$$

$$\vec{U} = \frac{2}{3}\cdot[u_a\cdot\vec{a}_1 + u_b\cdot\vec{a}_2 + u_c\cdot\vec{a}_3],$$

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = 1\cdot e^{j0}; \\ \vec{a}_2 = 1\cdot e^{j120} = -0,5 + j\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 + j0,866; \\ \vec{a}_3 = 1\cdot e^{-j120} = -0,5 - j\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 - j0,866. \end{cases}$$

Переход от мгновенных значений напряжений к пространственному вектору $\vec{U}_S$

Итак, система уравнений в степенной форме имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_a = \dfrac{U_m}{2}\cdot(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}); \\ u_b = \dfrac{U_m}{2}\cdot(e^{j\omega t}\cdot e^{-j120} + e^{-j\omega t}\cdot e^{j120}); \\ u_c = \dfrac{U_m}{2}\cdot(e^{j\omega t}\cdot e^{j120} + e^{-j\omega t}\cdot e^{-j120}). \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{1}\cdot e^{j0}; \\ \vec{a}_2 = \vec{1}\cdot e^{j120} = -0,5 + j\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 + j0,866; \\ \vec{a}_3 = \vec{1}\cdot e^{-j120} = -0,5 - j\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 - j0,866. \end{cases} \qquad (4)$$

(4) $\vec{U} = \frac{2}{3}\cdot[u_a\cdot\vec{a}_1 + u_b\cdot\vec{a}_2 + u_c\cdot\vec{a}_3]$,

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{1}\cdot e^{j0}; \\ \vec{a}_2 = \vec{1}\cdot e^{j120} = -0,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 + j0,866; \\ \vec{a}_3 = \vec{1}\cdot e^{-j120} = -0,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 - j0,866. \end{cases}$$

Переход от мгновенных значений напряжений к пространственному вектору $\vec{U}_S$

$$\vec{U}_S = \frac{2}{3}\cdot[u_a\cdot\vec{a}_1 + u_b\cdot\vec{a}_2 + u_c\cdot\vec{a}_3], \qquad (3)$$

$$\vec{U}_S = \frac{2}{3}\cdot[u_a\cdot\vec{a}_1 + u_b\cdot\vec{a}_2 + u_c\cdot\vec{a}_3] = \frac{2}{3}\cdot\frac{U_M}{2}\cdot[(\underbrace{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}_{u_a})\cdot\underbrace{\vec{1}\cdot e^{j0}}_{\vec{a}_1} +$$

$$+(\underbrace{e^{j\omega t}\cdot e^{-j120} + e^{-j\omega t}\cdot e^{j120}}_{u_b})\cdot\underbrace{\vec{1}\cdot e^{j120}}_{\vec{a}_2} + (\underbrace{e^{j\omega t}\cdot e^{j120} + e^{-j\omega t}\cdot e^{-j120}}_{u_c})\cdot\underbrace{\vec{1}\cdot e^{-j120}}_{\vec{a}_3}] =$$

$$= \frac{U_M}{3}\cdot[\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j\omega t} + \vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{-j\omega t} + \vec{1}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{-j120}\cdot e^{j120} + \vec{1}\cdot e^{-j\omega t}\cdot e^{j120}\cdot e^{j120} +$$

$$+\vec{1}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j120}\cdot e^{-j120} + \vec{1}\cdot e^{-j\omega t}\cdot e^{-j120}\cdot e^{-j120}] = \frac{U_M}{3}\cdot[\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j\omega t} + \vec{1}\cdot e^{-j\omega t} +$$

$$+\vec{1}\cdot e^{j\omega t} + \vec{1}\cdot e^{-j\omega t}\cdot e^{-j120} + \vec{1}\cdot e^{j\omega t} + \vec{1}\cdot e^{-j\omega t}\cdot e^{-j240}] = \frac{U_M}{3}\cdot[3\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j\omega t} +$$

$$+e^{-j\omega t}\cdot(\underbrace{\vec{1} + \vec{1}\cdot e^{-j120} + \vec{1}\cdot e^{-j240}}_{=0})] = U_M\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j\omega t}.$$

$$\vec{U}_S = \frac{2}{3}\cdot[u_a\cdot\vec{a}_1 + u_b\cdot\vec{a}_2 + u_c\cdot\vec{a}_3], \tag{3}$$

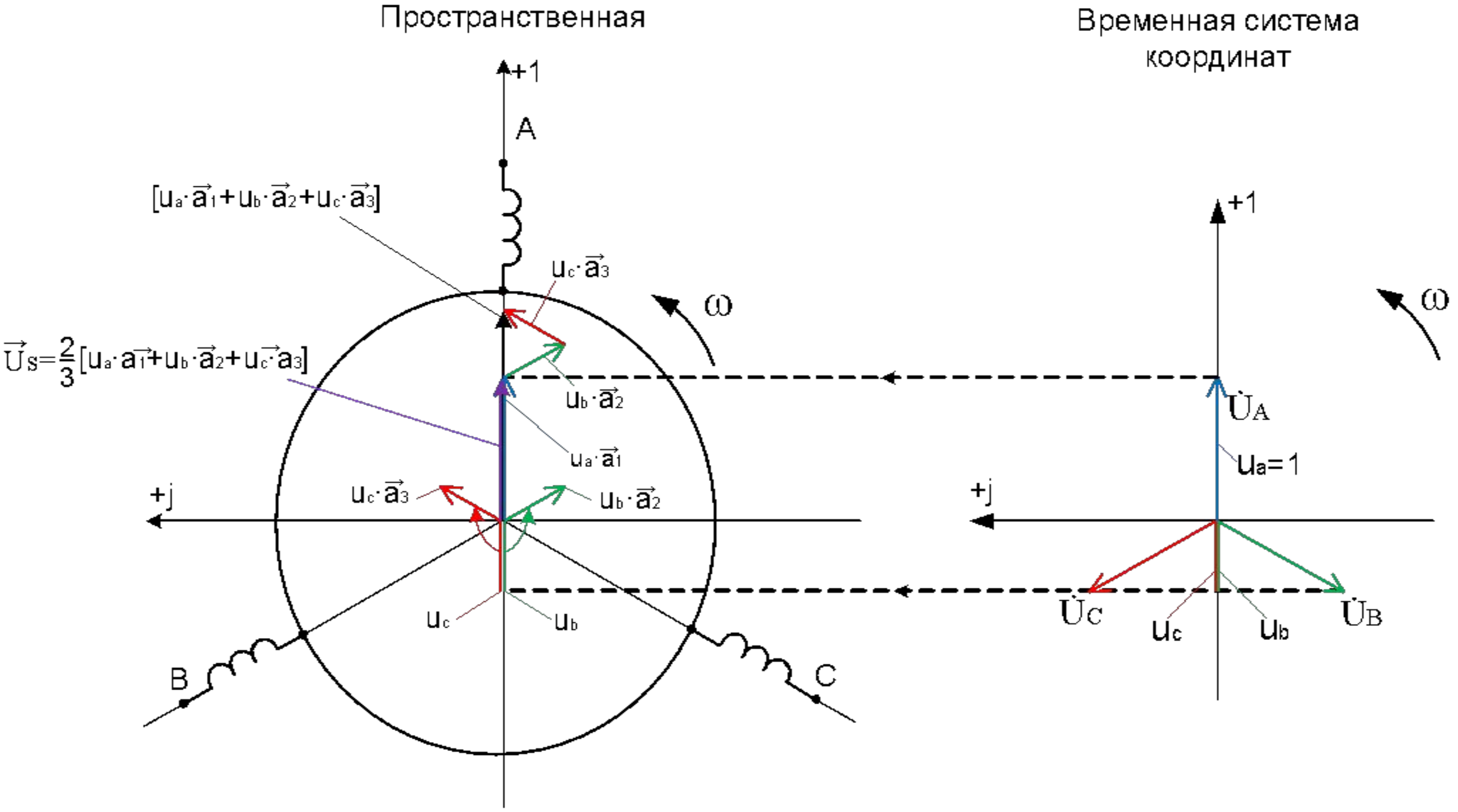

Рис. 2. Геометрический смысл построения пространственного вектора по составляющим и

Основные уравнения асинхронного двигателя в фазных переменных статора и ротора

Обобщенная асинхронная машина показана на рис. 3.

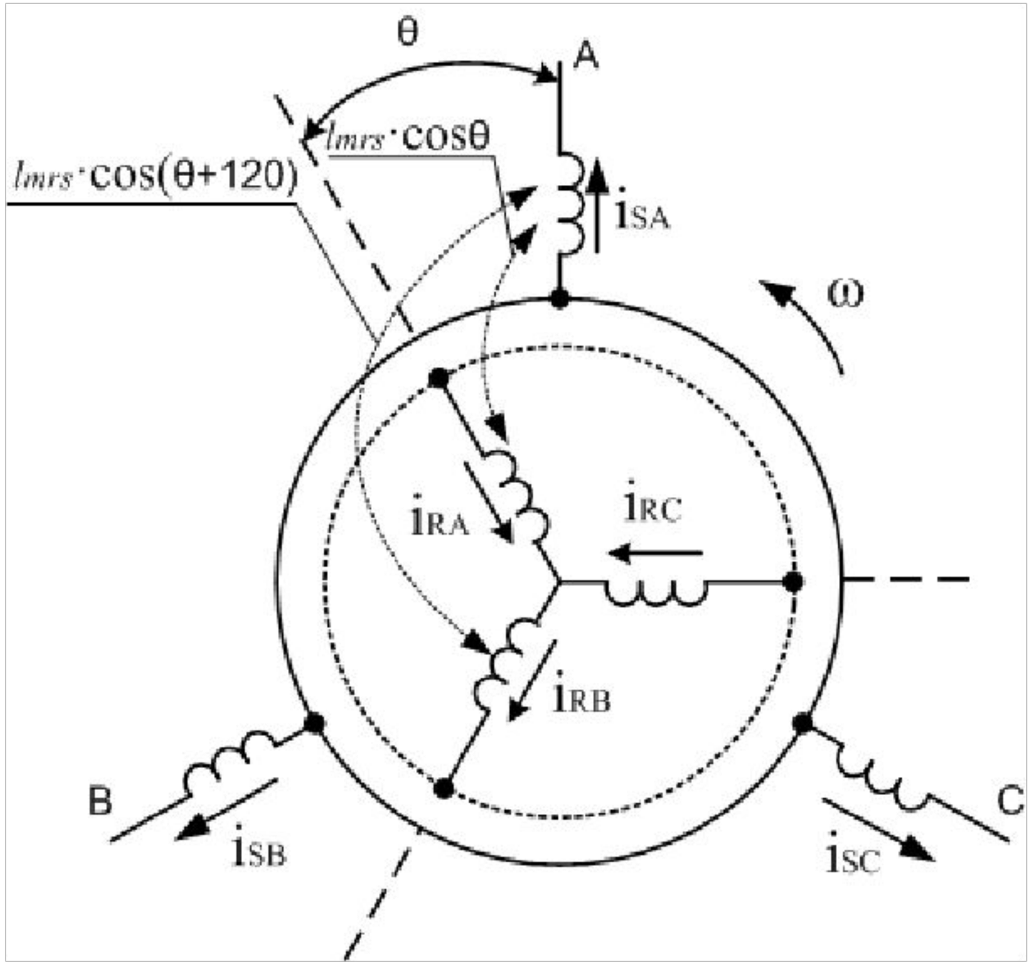

Рис. 3. Обобщённая асинхронная машина

R_s, l_s, l_{ms} – параметры статорной обмотки,

R_r, l_r, l_{mr} – параметры роторной обмотки,

$|l_{msr}|=|l_{mrs}|=|l_m|$ – коэффициенты взаимоиндуктивности при совпадении магнитных осей статора и ротора $(\theta = 0)$.

Преобразование балансов напряжений в фазных переменных в соответствующий баланс пространственных векторов

$$\begin{cases} u_{sa} = i_{sa} \cdot R_s + \dfrac{d\psi_{sa}}{dt}; & (5) \\ u_{sb} = i_{sb} \cdot R_s + \dfrac{d\psi_{sb}}{dt}; & (6) \\ u_{sc} = i_{sc} \cdot R_s + \dfrac{d\psi_{sc}}{dt}; & (7) \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{2}{3} \cdot [u_{sa} \cdot \vec{a}_1 + u_{sb} \cdot \vec{a}_2 + u_{sc} \cdot \vec{a}_3]}_{\vec{U}_S} = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot [i_{sa} \cdot \vec{a}_1 + i_{sb} \cdot \vec{a}_2 + i_{sc} \cdot \vec{a}_3]}_{\vec{I}_S} \cdot R_S + \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{2}{3} \cdot (\psi_{sa} \cdot \vec{a}_1 + \psi_{sb} \cdot \vec{a}_2 + \psi_{sc} \cdot \vec{a}_3)}_{\vec{\Psi}_S}\Big].$$

$$\boxed{\vec{U}_S = \vec{I}_S \cdot R_S + \frac{d\vec{\psi}_S}{dt}} \qquad (17)$$

$$+\begin{cases} u_{ra} = i_{ra} \cdot R_r + \dfrac{d\psi_{ra}}{dt} & \Big| \times \vec{a}_1 \cdot \left(2/3\right); \\ u_{rb} = i_{rb} \cdot R_r + \dfrac{d\psi_{rb}}{dt} & \Big| \times \vec{a}_2 \cdot \left(2/3\right); \\ u_{rc} = i_{rc} \cdot R_r + \dfrac{d\psi_{rc}}{dt} & \Big| \times \vec{a}_3 \cdot \left(2/3\right). \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{2}{3} \cdot [u_{ra} \cdot \vec{a}_1 + u_{rb} \cdot \vec{a}_2 + u_{rc} \cdot \vec{a}_3]}_{\vec{U}_r} = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot [i_{ra} \cdot \vec{a}_1 + i_{rb} \cdot \vec{a}_2 + i_{rc} \cdot \vec{a}_3]}_{\vec{I}_r} \cdot R_S + \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{2}{3} \cdot (\psi_{ra} \cdot \vec{a}_1 + \psi_{rb} \cdot \vec{a}_2 + \psi_{rc} \cdot \vec{a}_3)}_{\vec{\Psi}_r}\Big].$$

$$\boxed{\vec{U}_R = \vec{I}_R \cdot R_r + \frac{d\vec{\psi}_r}{dt}} \qquad (18)$$

(20)

Вектор потокосцепления статора АД

$$\begin{cases} \psi_{sa} = l_s \cdot i_{sa} + l_{ms} \cdot (i_{sb} + i_{sc}) + (l_{mrs} \cos\theta) \cdot i_{ra} + (l_{mrs} \cos(\theta + 120)) \cdot i_{rb} + (l_{mrs} \cos(\theta + 240)) \cdot i_{rc}; \\ \psi_{sb} = l_s \cdot i_{sb} + l_{ms} \cdot (i_{sa} + i_{sc}) + (l_{mrs} \cos(\theta + 240)) \cdot i_{ra} + (l_{mrs} \cos\theta) \cdot i_{rb} + (l_{mrs} \cos(\theta + 120)) \cdot i_{rc}; \\ \psi_{sc} = l_s \cdot i_{sc} + l_{ms} \cdot (i_{sa} + i_{sb}) + (l_{mrs} \cos(\theta + 120)) \cdot i_{ra} + (l_{mrs} \cos(\theta + 240)) \cdot i_{rb} + (l_{mrs} \cos\theta) \cdot i_{rc}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_{sa} = l_s \cdot i_{sa} + l_{ms} \cdot (i_{sb} + i_{sc}) + l_{mrs} \cdot [\cos\theta \cdot i_{ra} + \cos(\theta + 120) \cdot i_{rb} + \cos(\theta + 240) \cdot i_{rc}] \\ \psi_{sb} = l_s \cdot i_{sb} + l_{ms} \cdot (i_{sa} + i_{sc}) + l_{mrs} \cdot [\cos(\theta + 240) \cdot i_{ra} + \cos\theta \cdot i_{rb} + \cos(\theta + 120) \cdot i_{rc}] \\ \psi_{sc} = \underbrace{l_s \cdot i_{sc}}_{\psi_{ls}} + \underbrace{l_{ms} \cdot (i_{sa} + i_{sb})}_{\psi_{lms}} + \underbrace{l_{mrs} \cdot [\cos(\theta + 120) \cdot i_{ra} + \cos(\theta + 240) \cdot i_{rb} + \cos\theta \cdot i_{rc}]}_{\psi_{lmrs}} \end{cases} \quad (20$$

Цель

$$\vec{\psi}_s = L_s \cdot \vec{I}_s + (L_m \cdot e^{j\theta}) \cdot \vec{I}_r.$$

Вектор потокосцепления статора АД (продолжение)

$$\begin{cases} i_{sa} = I_{ms}\cdot\cos(\omega t-\phi_{is}) = \dfrac{I_{ms}}{2}\cdot\left(e^{j(\omega t-\phi_{is})}\cdot 1 + e^{-j(\omega t-\phi_{is})}\cdot 1\right) \\ i_{sb} = I_{ms}\cdot\cos(\omega t-\phi_{is}-120) = \dfrac{I_{ms}}{2}\cdot\left(e^{j(\omega t-\phi_{is})}\cdot e^{-j120} + e^{-j(\omega t-\phi_{is})}\cdot e^{j120}\right) \\ i_{sc} = I_{ms}\cdot\cos(\omega t-\phi_{is}-240) = \dfrac{I_{ms}}{2}\cdot\left(e^{j(\omega t-\phi_{is})}\cdot e^{-j240} + e^{-j(\omega t-\phi_{is})}\cdot e^{j240}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{ra} = I_{mr}\cdot\cos(\omega t-\phi_{ir}) = \dfrac{I_{mr}}{2}\cdot\left(e^{j(\omega t-\phi_{ir})}\cdot 1 + e^{-j(\omega t-\phi_{ir})}\cdot 1\right) \\ i_{rb} = I_{mr}\cdot\cos(\omega t-\phi_{ir}-120) = \dfrac{I_{mr}}{2}\cdot\left(e^{j(\omega t-\phi_{ir})}\cdot e^{-j120} + e^{-j(\omega t-\phi_{ir})}\cdot e^{j120}\right) \\ i_{rc} = I_{mr}\cdot\cos(\omega t-\phi_{ir}-240) = \dfrac{I_{mr}}{2}\cdot\left(e^{j(\omega t-\phi_{ir})}\cdot e^{-j240} + e^{-j(\omega t-\phi_{ir})}\cdot e^{j240}\right) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\cos\theta = \dfrac{1}{2}\cdot\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta} \right) & = \\
\cos(\theta - 120) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(e^{j(\theta-120)} + e^{-j(\theta-120)} \right) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(e^{j\theta}\cdot e^{-j120} + e^{-j\theta}\cdot e^{j120} \right) & = \\
\cos(\theta - 240) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(e^{j(\theta-240)} + e^{-j(\theta-240)} \right) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(e^{j\theta}\cdot e^{-j240} + e^{-j\theta}\cdot e^{j240} \right) & =
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{l}
= \dfrac{1}{2}\cdot \\
= \dfrac{1}{2}\cdot \\
= \dfrac{1}{2}\cdot
\end{array}
\begin{vmatrix} e^{j\theta} \\ e^{j\theta} \\ e^{j\theta} \end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix} 1 \\ e^{-j120} \\ e^{-j240} \end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\cdot\ e^{-j\theta} \\ \dfrac{1}{2}\cdot\ e^{-j\theta} \\ \dfrac{1}{2}\cdot\ e^{-j\theta} \end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix} 1 \\ e^{j120} \\ e^{j240} \end{vmatrix}
$$

$$\psi_{ls} = l_s \cdot (i_{sa} \cdot a_1 + i_{sb} \cdot a_2 + i_{sc} \cdot a_3) = l_s \cdot [\underbrace{\frac{I_{ms}}{2} \cdot (e^{j(\omega t-\phi_{is})} + e^{-j(\omega t-\phi_{is})})}_{i_{sa}} \cdot \underbrace{\vec{1} \cdot e^{j0}}_{a_1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{I_{ms}}{2} \cdot (e^{j(\omega t-\phi_{is}-120)} + e^{-j(\omega t-\phi_{is}-120)})}_{i_{sb}} \cdot \underbrace{\vec{1} \cdot e^{j120}}_{a_2} + \underbrace{\frac{I_{ms}}{2} \cdot (e^{j(\omega t-\phi_{is}-240)} + e^{-j(\omega t-\phi_{is}-240)})}_{i_{sc}} \cdot \underbrace{\vec{1} \cdot e^{j240}}_{a_3}] =$$

$$= \frac{I_{ms}}{2} \cdot l_s \cdot [e^{j(\omega t-\phi_{is})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} + e^{-j(\omega t-\phi_{is})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} + e^{j(\omega t-\phi_{is})} \cdot e^{-j120} \cdot \vec{1} \cdot e^{j120} + e^{-j(\omega t-\phi_{is})} \cdot e^{j120} \cdot \vec{1} \cdot e^{j120} +$$

$$+ e^{j(\omega t-\phi_{is})} \cdot e^{-j240} \cdot \vec{1} \cdot e^{j240} + e^{-j(\omega t-\phi_{is})} \cdot e^{j240} \cdot \vec{1} \cdot e^{j240}] =$$

$$= \frac{I_{ms}}{2} \cdot l_s \cdot (e^{j(\omega t-\phi_{is})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} + e^{-j(\omega t-\phi_{is})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} +$$
$$+ e^{j(\omega t-\phi_{is})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j(120-120)} + e^{-j(\omega t-\phi_{is})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j(120+120)} +$$
$$+ e^{j(\omega t-\phi_{is})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j(240-240)} + e^{-j(\omega t-\phi_{is})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j(240+240)}) =$$

$$= \frac{I_{ms}}{2} \cdot l_s \cdot [3 \cdot e^{j(\omega t-\phi_{is})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} + e^{-j(\omega t-\phi_{is})} \cdot \underbrace{(\vec{1} \cdot e^{j0} + \vec{1} \cdot e^{j240} + \vec{1} \cdot e^{j480})}_{0}] = \frac{3}{2} \cdot l_s \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\omega t-\varphi_{is})}.$$

Для второго столбца:

$$\vec{\psi}_{lms} = l_{ms} \cdot [\underbrace{(i_{sb} + i_{sc})}_{-i_{sa}} \cdot \vec{a}_1 + \underbrace{(i_{sa} + i_{sc})}_{-i_{sb}} \cdot \vec{a}_2 + \underbrace{(i_{sa} + i_{sb})}_{-i_{sc}} \cdot \vec{a}_3] = -l_{ms} \cdot (i_{sa} \cdot \vec{a}_1 + i_{sb} \cdot \vec{a}_2 + i_{sc} \cdot \vec{a}_3) =$$

$$= \left(-\frac{3}{2} \cdot l_{ms} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{is})} \right).$$

Наконец, для третьего столбца:

$$\vec{\psi}_{lmrs}(t) = l_{mrs} \cdot [\vec{A}_s + \vec{B}_s + \vec{C}_s],$$

где $\vec{A}_s = \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot [i_{ra} \cdot \cos\theta + i_{rb} \cdot \cos(\theta + 120) + i_{rc} \cdot \cos(\theta + 240)];$

$$\vec{B}_s = \vec{1} \cdot e^{j120} \cdot [i_{ra} \cdot \cos(\theta + 240) + i_{rb} \cdot \cos\theta + i_{rc} \cdot \cos(\theta + 120)];$$

$$\vec{C}_s = \vec{1} \cdot e^{j240} \cdot [i_{ra} \cdot \cos(\theta + 120) + i_{rb} \cdot \cos(\theta + 240) + i_{rc} \cdot \cos\theta].$$

$$\vec{A}_s = \vec{1}\cdot e^{j0}\cdot(i_{ra}\cdot\cos\theta + i_{rb}\cdot\cos(\theta+120)+i_{rc}\cdot\cos(\theta+240)) =$$

$$= \vec{1}\cdot e^{j0}\cdot[\underbrace{\frac{I_{mr}}{2}\cdot(e^{j(\omega t-\phi_{ir})}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir})})}_{i_{ra}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j\theta}+e^{-j\theta})}_{\cos\theta}+\underbrace{\frac{I_{mr}}{2}\cdot(e^{j(\omega t-\phi_{ir}-120)}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-120)})}_{i_{rb}}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta+120)}+e^{-j(\theta+120)})}_{\cos(\theta+120)}+\underbrace{\frac{I_{mr}}{2}\cdot(e^{j(\omega t-\phi_{ir}-240)}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-240)})}_{i_{rc}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta+240)}+e^{-j(\theta+240)})}_{\cos(\theta+240)}] = \frac{I_{mr}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\times$$

$$\begin{array}{lllllllll}
\times[& e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot 1 & + & e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot 1 & + & e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot 1 & + & e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot 1 & + \\
+ & e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j(-120+120)} & + & e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{j(-120-120)} & + & e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{j(120+120)} & + & e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j(120-120)} & + \\
+ & e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j(-240+240)} & + & e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{j(-240-240)} & + & e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{j(240+240)} & + & e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j(240-240)} &] =
\end{array}$$

$$= \frac{I_{mr}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot[3\cdot e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}+e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot(1+e^{-j240}+e^{-j480})+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot(1+e^{j240}+e^{j480})+$$

$$+3\cdot e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}] = (\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{-j\phi_{ir}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{j\omega t}+(\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j\phi_{ir}}\cdot e^{-j\theta})\cdot e^{-j\omega t},$$

где $(1+e^{j240}+e^{j480}) = (1+e^{j120}+e^{j240}) = 0.$

$$\vec{B}_s = \vec{1}\cdot e^{j120}\cdot(i_{ra}\cdot\cos(\theta+240)+i_{rb}\cdot\cos\theta+i_{rc}\cdot\cos(\theta+120))=$$

$$=\vec{1}\cdot e^{j120}\cdot[\underbrace{\frac{I_{mr}}{2}\cdot(e^{j(\omega t-\phi_{ir})}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir})})}_{i_{ra}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta+240)}+e^{-j(\theta+240)})}_{\cos(\theta+240)}+\underbrace{\frac{I_{mr}}{2}\cdot(e^{j(\omega t-\phi_{ir}-120)}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-120)})}_{i_{rb}}\cdot$$

$$\underbrace{\cdot\frac{1}{2}\cdot(e^{j\theta}+e^{-j\theta})}_{\cos\theta}+\underbrace{\frac{I_{mr}}{2}\cdot(e^{j(\omega t-\phi_{ir}-240)}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-240)})}_{i_{rc}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta+120)}+e^{-j(\theta+120)})}_{\cos(\theta+120)}]=\frac{I_{mr}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j120}\times$$

$$\begin{array}{l}\times[e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j240}+e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{-j240}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{j240}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{-j240}+\\ +e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{-j120}+e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{-j120}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{+j120}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j120}+\\ +e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j(-240+120)}+e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{j(-240-120)}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{j(240+120)}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j(240-120)}]=\end{array}$$

$$=\frac{I_{mr}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j120}\cdot[e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot(e^{j240}+e^{-j120}+e^{-j120})+e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot(e^{-j240}+e^{-j120}+e^{-j360})+$$

$$=e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot(e^{j240}+e^{j120}+e^{j360})+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot(e^{-j240}+e^{j120}+e^{j120})]=$$

$$=(\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{-j\phi_{ir}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{j\omega t}+(\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j240}\cdot e^{j\phi_{ir}}\cdot e^{-j\theta})\cdot e^{-j\omega t}.$$

$$\vec{C}_s = \vec{1}\cdot e^{j240}\cdot(i_{ra}\cdot\cos(\theta+120)+i_{rb}\cdot\cos(\theta+240)+i_{rc}\cdot\cos\theta)) =$$

$$= \vec{1}\cdot e^{j240}\cdot[\underbrace{\frac{I_{mr}}{2}\cdot(e^{j(\omega t-\phi_{ir})}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir})})}_{i_{ra}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta+120)}+e^{-j(\theta+120)})}_{\cos(\theta+120)}+\underbrace{\frac{I_{mr}}{2}\cdot(e^{j(\omega t-\phi_{ir}-120)}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-120)})}_{i_{rb}}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta+240)}+e^{-j(\theta+240)})}_{\cos(\theta+240)}+\underbrace{\frac{I_{mr}}{2}\cdot(e^{j(\omega t-\phi_{ir}-240)}+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-240)})}_{i_{rc}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j\theta}+e^{-j\theta})]}_{\cos\theta}=\frac{I_{mr}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j240}\times$$

$$\begin{aligned}
\times[\,& e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j120} &&+ e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{-j120} &&+ e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{j120} &&+ e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{-j120} &&+\\
+\,& e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j(-120+240)} &&+ e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{j(-120-240)} &&+ e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{-j(-120-240)} &&+ e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{-j(-120+240)} &&+\\
+\,& e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{-j240} &&+ e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{-j240} &&+ e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot e^{j240} &&+ e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot e^{j240} &&]=
\end{aligned}$$

$$=\frac{I_{mr}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j120}\cdot[e^{j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot(e^{j120}+e^{j120}+e^{-j240})+e^{j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot(e^{-j120}+e^{-j360}+e^{-j240})+$$

$$+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}-\theta)}\cdot(e^{j120}+e^{j360}+e^{j240})+e^{-j(\omega t-\phi_{ir}+\theta)}\cdot(e^{-j120}+e^{j360}+e^{j-120})]=$$

$$=(\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j360}\cdot e^{-j\phi_{ir}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{j\omega t}+(\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j120}\cdot e^{j\phi_{ir}}\cdot e^{-j\theta})\cdot e^{-j\omega t}.$$

$$
\vec{A}_s + \vec{B}_s + \vec{C}_s = [(\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot \vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{-j\phi_{ir}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{j\omega t} + (\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot \vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j\phi_{ir}}\cdot e^{-j\theta})\cdot e^{-j\omega t}] +
$$

$$
+[(\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot \vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{-j\phi_{ir}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{j\omega t} + (\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot \vec{1}\cdot e^{j120}\cdot e^{j\phi_{ir}}\cdot e^{-j\theta})\cdot e^{-j\omega t}] +
$$

$$
+[(\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot \vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{-j\phi_{ir}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{j\omega t} + (\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot \vec{1}\cdot e^{j240}\cdot e^{j\phi_{ir}}\cdot e^{-j\theta})\cdot e^{-j\omega t}] =
$$

$$
= (\frac{9}{4}\cdot I_{mr}\cdot \vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{-j\phi_{ir}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{j\omega t} + \frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot \vec{1}\cdot e^{j\phi_{ir}}\cdot e^{-j\theta}\cdot (e^{j0} + e^{j240} + e^{j120})\cdot e^{-j\omega t} =
$$

$$
= (\frac{9}{4}\cdot I_{mr}\cdot \vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{-j\phi_{ir}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{j\omega t}.
$$

$$\vec{\psi}_{lmrs} = l_{mrs} \cdot [\vec{A}_s + \vec{B}_s + \vec{C}_s] = (\frac{9}{4} \cdot I_{mr} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{ir}} \cdot e^{j\theta}) \cdot e^{j\omega t}.$$

$$\vec{\psi}_s = \frac{2}{3} \cdot (a_1 \cdot \vec{\psi}_{sa} + a_2 \cdot \vec{\psi}_{sb} + a_3 \cdot \vec{\psi}_{sc}) = \frac{2}{3} \cdot (\vec{\psi}_{ls}(t) + \vec{\psi}_{lms}(t) + \vec{\psi}_{lmrs}(t)) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot [(\frac{3}{2} \cdot I_{ms} \cdot l_s \cdot \vec{1} \cdot e^{-j\phi_{is}}) \cdot e^{j\omega t} - (\frac{3}{2} \cdot I_{ms} \cdot l_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{-j\phi_{is}}) \cdot e^{j\omega t} + (\frac{9}{4} \cdot I_{mr} \cdot l_{mrs} \cdot \vec{1} \cdot e^{-j\phi_{ir}} \cdot e^{j\theta}) \cdot$$

$$\cdot e^{j\omega t}] = [(l_s - l_{ms}) \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{-j\phi_{is}} + \frac{3}{2} \cdot l_{mrs} \cdot I_{mr} \cdot \vec{1} \cdot e^{-j\phi_{ir}} \cdot e^{j\theta}] \cdot e^{j\omega t}.$$

Обозначим $l_S - l_{mS} = L_S$; $\frac{3}{2} \cdot l_{mrs} = L_m$; $\vec{I}_s = I_{ms} \cdot \vec{\mathbf{1}} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{is})}$; $\vec{I}_r = I_{mr} \cdot \vec{\mathbf{1}} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{ir})}$.

Окончательно, вектор потокосцепления статора [1]:

$$\vec{\psi}_s = L_s \cdot \vec{I}_s + (L_m \cdot e^{j\theta}) \cdot \vec{I}_r. \tag{21}$$

Вектор потокосцепления ротора АД

$$\begin{cases} \psi_{ra} = l_r \cdot i_{ra} + l_{mr} \cdot (i_{sb} + i_{sc}) + (l_{msr} \cos(-\theta)) \cdot i_{sa} + (l_{msr} \cos(120 - \theta)) \cdot i_{sb} + (l_{msr} \cos(240 - \theta)) \cdot i_{sc}; \\ \psi_{rb} = l_r \cdot i_{rb} + l_{mr} \cdot (i_{sa} + i_{sc}) + (l_{msr} \cos(240 - \theta)) \cdot i_{sa} + (l_{msr} \cos(-\theta)) \cdot i_{sb} + (l_{msr} \cos(120 - \theta)) \cdot i_{sc}; \\ \psi_{rc} = l_r \cdot i_{rc} + l_{mr} \cdot (i_{sa} + i_{sb}) + (l_{msr} \cos(120 - \theta)) \cdot i_{sa} + (l_{msr} \cos(240 - \theta)) \cdot i_{sb} + (l_{msr} \cos(-\theta)) \cdot i_{sc}. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{ra} = \\ \psi_{rb} = \\ \psi_{rc} = \end{array} \right. \underbrace{\begin{array}{l} l_r \cdot i_{ra} \\ l_r \cdot i_{rb} \\ l_r \cdot i_{rc} \end{array}}_{\psi_{lr}} \begin{array}{l} + \\ + \\ + \end{array} \underbrace{\begin{array}{l} l_{mr} \cdot (i_{sb} + i_{sc}) \\ l_{mr} \cdot (i_{sa} + i_{sc}) \\ l_{mr} \cdot (i_{sa} + i_{sb}) \end{array}}_{\psi_{lmr}} \begin{array}{l} + \\ + \\ + \end{array} \underbrace{\begin{array}{l} l_{msr} \cdot [\cos(-\theta) \cdot i_{sa} + \cos(-\theta + 120) \cdot i_{sb} + \cos(-\theta + 240) \cdot i_{sc}] \\ l_{msr} \cdot [\cos(-\theta + 240) \cdot i_{sa} + \cos(-\theta) \cdot i_{sb} + \cos(-\theta + 120) \cdot i_{sc}] \\ l_{msr} \cdot [\cos(-\theta + 120) \cdot i_{sa} + \cos(-\theta + 240) \cdot i_{sb} + \cos(-\theta) \cdot i_{sc}] \end{array}}_{\psi_{lmsr}} \qquad (23)$$

Цель

$$\vec{\psi}_r = L_r \cdot \vec{I}_r + (L_m \cdot e^{-j\theta}) \cdot \vec{I}_s$$

Пространственный вектор для первого столбца $\vec{\Psi}_{lr}$:

$$\vec{\psi}_{lr} = l_r \cdot (i_{ra} \cdot \vec{a}_1 + i_{rb} \cdot \vec{a}_2 + i_{rc} \cdot \vec{a}_3) = l_r \cdot [\underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\omega t - \phi_{ir})} + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})})}_{i_{sa}} \cdot \underbrace{\vec{1} \cdot e^{j0}}_{a_1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\omega t - \phi_{ir} - 120)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - 120)})}_{i_{sb}} \cdot \underbrace{\vec{1} \cdot e^{j120}}_{a_2} + \underbrace{\frac{I_{mr}}{2} \cdot (e^{j(\omega t - \phi_{ir} - 240)} + e^{-j(\omega t - \phi_{is} - 240)})}_{i_{sc}} \cdot \underbrace{\vec{1} \cdot e^{j240}}_{a_3}] =$$

$$\begin{aligned} = \frac{I_{mr}}{2} \cdot l_r \cdot (& e^{j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} + \\ + & e^{j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j(120-120)} + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j(120+120)} + \\ + & e^{j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j(240-240)} + e^{-j(\omega t - \phi_{ir})} \cdot \vec{1} \cdot e^{j(240+240)}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{I_{mr}}{2} \cdot l_r \cdot [e^{j(\omega t - \phi_{is})} \cdot (\vec{1} \cdot e^{j0} + \vec{1} \cdot e^{j0} + \vec{1} \cdot e^{j0}) + e^{-j(\omega t - \phi_{is})} \cdot \underbrace{(\vec{1} \cdot e^{j0} + \vec{1} \cdot e^{j240} + \vec{1} \cdot e^{j120})}_{0}] =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot l_r \cdot I_{mr} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{ir})}.$$

Пространственный вектор для второго столбца системы уравнений (23):

$$\vec{\psi}_{lmr} = l_{mr} \cdot [\vec{a}_1 \cdot (i_{rb} + i_{rc}) + \vec{a}_2 \cdot (i_{ra} + i_{rc}) + \vec{a}_3 \cdot (i_{ra} + i_{rb})] = -l_{mr} \cdot (\vec{a}_1 \cdot i_{ra} + \vec{a}_2 \cdot i_{rb} + \vec{a}_3 \cdot i_{rc}) =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot l_{mr} \cdot I_{mr} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{ir})}.$$

Пространственный вектор для третьего столбца (23):

$$\vec{\psi}_{lmsr} = l_{msr} \cdot [\vec{A}_r + \vec{B}_r + \vec{C}_r],$$

где
$$\vec{A}_r = \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot (i_{sa} \cdot \cos\theta + i_{sb} \cdot \cos(\theta - 120) + i_{sc} \cdot \cos(\theta - 240));$$
$$\vec{B}_r = \vec{1} \cdot e^{j120} \cdot (i_{sa} \cdot \cos(\theta - 240) + i_{sb} \cdot \cos\theta + i_{sc} \cdot \cos(\theta - 120));$$
$$\vec{C}_r = \vec{1} \cdot e^{j240} \cdot (i_{sa} \cdot \cos(\theta - 120) + i_{sb} \cdot \cos(\theta - 240) + i_{sc} \cdot \cos\theta).$$

$$\vec{A}_r = \vec{1}\cdot e^{j0}\cdot(i_{sa}\cdot\cos\theta + i_{sb}\cdot\cos(\theta-120) + i_{sc}\cdot\cos(\theta-240)) =$$

$$= \vec{1}\cdot e^{j0}(\underbrace{\frac{I_{ms}}{2}\cdot e^{j(wt-\phi_{is})} + e^{-j(wt-\phi_{is})})}_{i_{sa}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j\theta}\cdot e^{-j\theta})}_{\cos\theta} + \underbrace{\frac{I_{ms}}{2}(e^{j(wt-\phi_{is}-120)} + e^{-j(wt-\phi_{is}-120)})}_{i_{sb}}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta-120)}\cdot e^{-j(\theta-120)})}_{\cos(\theta-120)} + \underbrace{\frac{I_{ms}}{2}(e^{j(wt-\phi_{is}-240)} + e^{-j(wt-\phi_{is}-240)})}_{i_{sc}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta-240)}\cdot e^{-j(\theta-240)})}_{\cos(\theta-120)} = \frac{I_{ms}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\times$$

$$\begin{array}{l}
\times[\, e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot 1 + e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot 1 + e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot 1 + e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot 1 + \\
+ e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{-j(120+120)} + e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{-j(120-120)} + e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{j(120-120)} + e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{j(120+120)} + \\
+ e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{-j(240+240)} + e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{-j(240-240)} + e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{j(240-240)} + e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{j(240+240)}\,] =
\end{array}$$

$$= \frac{I_{ms}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot[e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot(1+e^{-j240}+e^{-j480}) + 3\cdot e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)} + 3\cdot e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)} +$$

$$+ e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot(1+e^{j240}+e^{j480})] = (\frac{3}{4}\cdot I_{ms}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{-j\phi_{is}}\cdot e^{-j\theta})\cdot e^{j\omega t} + (\frac{3}{4}\cdot I_{ms}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j\phi_{is}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{-j\omega t}.$$

$$\vec{B}_r=\vec{1}\cdot e^{j120}\cdot(i_{sa}\cdot\cos(\theta-240)+i_{sb}\cdot\cos\theta+i_{sc}\cdot\cos(\theta-120))=$$

$$=\vec{1}\cdot e^{j120}\underbrace{(\frac{I_{ms}}{2}\cdot e^{j(wt-\phi_{is})}+e^{-j(wt-\phi_{is})})}_{i_{sa}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta-240)}\cdot e^{-j(\theta-240)})}_{\cos(\theta\text{-}240)}+\underbrace{\frac{I_{ms}}{2}(e^{j(wt-\phi_{is}-120)}+e^{-j(wt-\phi_{is}-120)})}_{i_{sb}}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j\theta}\cdot e^{-j\theta})}_{\cos\theta}+\underbrace{\frac{I_{ms}}{2}(e^{j(wt-\phi_{is}-240)}+e^{-j(wt-\phi_{is}-240)})}_{i_{sc}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta-120)}\cdot e^{-j(\theta-120)})}_{\cos(\theta\text{-}120)}=\frac{I_{ms}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j120}\times$$

$$\begin{aligned}
\times[&e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{-j240}+e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{j240}+e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{-j240}+e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{j240}+\\
+&e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{-j120}+e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{-j120}+e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{j120}+e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{j120}+\\
+&e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{-j(240+120)}+e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{-j(240-120)}+e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{j(240-120)}+e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{j(240+120)}]=
\end{aligned}$$

$$=\frac{I_{ms}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j120}\cdot[e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot(e^{-j240}+e^{-j120}+e^{-j360})+3\cdot e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{-j120}+3\cdot e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{j120}+$$

$$+e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot(e^{j240}+e^{j120}+e^{j360})]=(\frac{3}{4}\cdot I_{ms}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{-j\phi_{is}}\cdot e^{-j\theta})\cdot e^{j\omega t}+(\frac{3}{4}\cdot I_{ms}\cdot\vec{1}\cdot e^{j240}\cdot e^{j\phi_{is}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{-j\omega t}.$$

$$\vec{C}_r = \vec{1}\cdot e^{j240}\cdot(i_{sa}\cdot\cos(\theta-120)+i_{sb}\cdot\cos(\theta-240)+i_{sc}\cdot\cos\theta)) =$$

$$=\vec{1}\cdot e^{j240}(\underbrace{\frac{I_{ms}}{2}\cdot e^{j(wt-\phi_{is})}+e^{-j(wt-\phi_{is})})}_{i_{sa}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta-120)}\cdot e^{-j(\theta-120)})}_{\cos(\theta\text{-}120)}+\underbrace{\frac{I_{ms}}{2}(e^{j(wt-\phi_{is}-120)}+e^{-j(wt-\phi_{is}-120)})}_{i_{sb}}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j(\theta-240)}\cdot e^{-j(\theta-240)})}_{\cos(\theta\text{-}240)}+\underbrace{\frac{I_{ms}}{2}(e^{j(wt-\phi_{is}-240)}+e^{-j(wt-\phi_{is}-240)})}_{i_{sc}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(e^{j\theta}\cdot e^{-j\theta})}_{\cos\theta}=\frac{I_{ms}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j240}\cdot$$

$$\begin{array}{l}
\cdot[e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{-j120}+e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{j120}+e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{-j120}+e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{j120}+\\
+e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{-j(120+240)}+e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{-j(120-240)}+e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{j(120-240)}+e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{j(120+240)}+\\
+e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{-j240}+e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{-j240}+e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{j240}+e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot e^{j240}]=
\end{array}$$

$$=\frac{I_{ms}}{4}\cdot\vec{1}\cdot e^{j240}\cdot[e^{j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot(e^{-j120}+e^{-j360}+e^{-j240})+3\cdot e^{j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{j120}+3\cdot e^{-j(wt-\phi_{is}-\theta)}\cdot e^{-j120}+$$

$$+e^{-j(wt-\phi_{is}+\theta)}\cdot(e^{j120}+e^{j360}+e^{j240})]=(\frac{3}{4}\cdot I_{ms}\cdot\vec{1}\cdot e^{j360}\cdot e^{-j\phi_{is}}\cdot e^{-j\theta})\cdot e^{j\omega t}+(\frac{3}{4}\cdot I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j120}\cdot e^{j\phi_{is}}\cdot e^{j\theta})\cdot e^{-j\omega t}.$$

$$\vec{A}_r + \vec{B}_r + \vec{C}_r = [(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\varphi_{is}} \cdot e^{-j\theta}) \cdot e^{j\omega t} + (\frac{3}{4} \cdot I_{mr} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{j\varphi_{is}} \cdot e^{j\theta}) \cdot e^{-j\omega t}] +$$

$$+ [(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\varphi_{is}} \cdot e^{-j\theta}) \cdot e^{j\omega t} + (\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j240} \cdot e^{j\varphi_{is}} \cdot e^{j\theta}) \cdot e^{-j\omega t}] +$$

$$+ [(\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j360} \cdot e^{-j\varphi_{is}} \cdot e^{-j\theta}) \cdot e^{j\omega t} + (\frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j120} \cdot e^{j\varphi_{is}} \cdot e^{j\theta}) \cdot e^{-j\omega t}] =$$

$$= (\frac{9}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{-j\phi_{is}} \cdot e^{-j\theta}) \cdot e^{j\omega t} + \frac{3}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j\phi_{is}} \cdot e^{j\theta} \cdot (e^{j0} + e^{j240} + e^{j120}) \cdot e^{-j\omega t} =$$

$$= \frac{9}{4} \cdot I_{ms} \cdot \vec{1} \cdot e^{j0} \cdot e^{j(\omega t - \phi_{is})} \cdot e^{-j\theta}.$$

$$\vec{\psi}_{lmsr} = l_{msr}\cdot[\vec{A}_r + \vec{B}_r + \vec{C}_r] = \frac{9}{4}\cdot(l_{msr}\cdot e^{-j\theta})\cdot I_{ms}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j(\omega t-\phi_{ir})}.$$

$$\vec{\psi}_r = \frac{2}{3}\cdot(\vec{\psi}_{ra}\cdot a_1 + \vec{\psi}_{rb}\cdot a_2 + \vec{\psi}_{rc}\cdot a_3) = \frac{2}{3}\cdot(\vec{\psi}_{lr} + \vec{\psi}_{lmr} + \vec{\psi}_{lmsr}) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot(\frac{3}{2}\cdot l_r\cdot I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j(\omega t-\phi_{ir})} - \frac{3}{2}\cdot l_{mr}\cdot I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j(\omega t-\phi_{ir})} + \frac{9}{4}\cdot(l_{msr}\cdot e^{-j\theta})\cdot I_{ms}\cdot\vec{1}\cdot e^{j(\omega t-\phi_{is})}] =$$

$$= (l_r - l_{mr})\cdot I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j(\omega t-\phi_{ir})} + (\frac{3}{2}\cdot l_{msr}\cdot e^{-j\theta})\cdot I_{ms}\cdot\vec{1}\cdot e^{j0}\cdot e^{j(\omega t-\phi_{is})}.$$

Обозначим $\vec{I}_r = I_{mr}\cdot\vec{1}\cdot e^{j(\omega t-\phi_{ir})}$; $\vec{I}_s = I_{ms}\cdot\vec{1}\cdot e^{j(\omega t-\phi_{is})}$; $l_r - l_{mr} = L_r$; $\frac{3}{2}\cdot l_{msr} = L_m$.

Окончательно, вектор потокосцепления ротора:

$$\boxed{\vec{\psi}_r = L_r\cdot\vec{I}_r + (L_m\cdot e^{-j\theta})\cdot\vec{I}_s} \qquad (24)$$

Векторные уравнения АД в различных системах координат

Исходные уравнения

$$
\begin{cases}
\vec{U}_S = \vec{I}_S \cdot R_S + \dfrac{d\vec{\psi}_S}{dt}; \\
\vec{U}_R = \vec{I}_R \cdot R_R + \dfrac{d\vec{\psi}_R}{dt}; \\
\vec{\psi}_S = L_S \cdot \vec{I}_S + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot \vec{I}_R; \\
\vec{\psi}_R = L_S \cdot \vec{I}_R + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot \vec{I}_S.
\end{cases}
$$

Цель

$$
\begin{cases}
\vec{U}_S = \vec{I}_S \cdot R_S + \dfrac{d\vec{\psi}_S}{dt} + j\Omega_k \cdot \vec{\psi}_S; \\
\vec{U}_R = \vec{I}_R \cdot R_R + \dfrac{d\vec{\psi}_{RK}}{dt} + j \cdot (\Omega_k - \Omega) \cdot \vec{\psi}_R; \\
\vec{\psi}_S = L_S \cdot \vec{I}_S + L_m \cdot \vec{I}_R; \\
\vec{\psi}_{RK} = L_R \cdot \vec{I}_R + L_m \cdot \vec{I}_S.
\end{cases}
$$

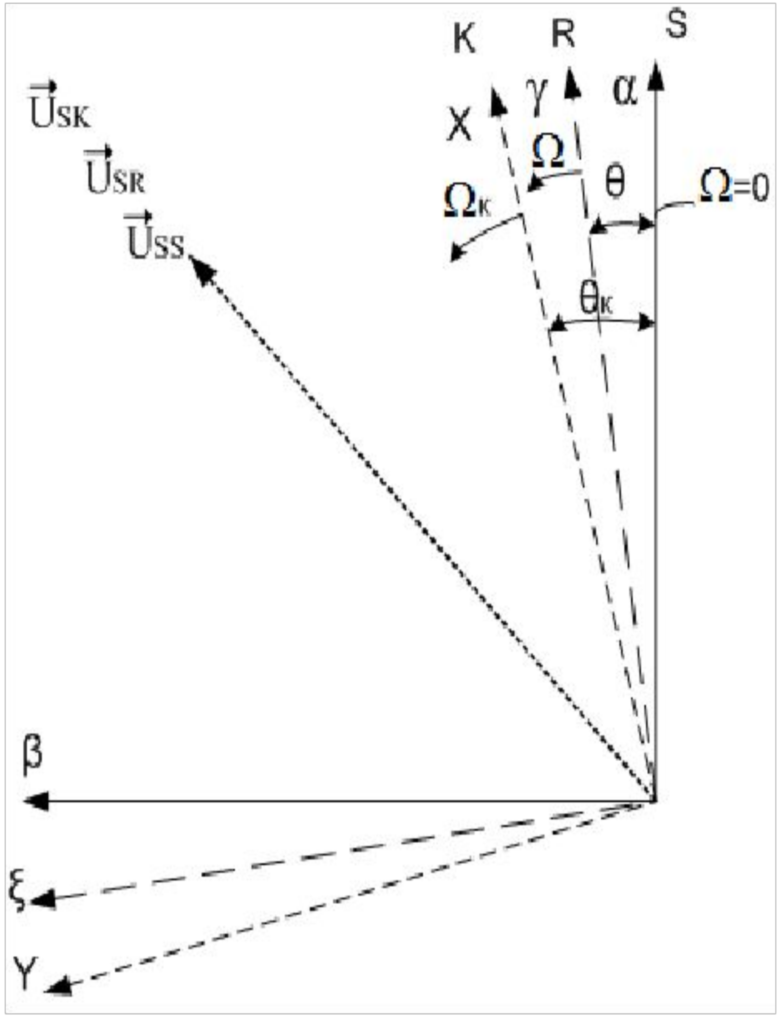

Рис. 4. Система координат S.R.K.

$S[\alpha;\beta]$ – неподвижная система координат статора $(\omega = 0)$;

$R[\gamma;\xi]$ – система координат, связанная с ротором;

θ - угол сдвига системы координат R по отношению к S, причем $\Omega = \dfrac{d\theta}{dt}$;

$K[x;y]$ – произвольная система координат, θ_k - угол сдвига к неподвижной системе S ($\Omega_k = \dfrac{d\theta_k}{dt}$);

$\vec{U}_{SS}$ – пространственный вектор напряжения статора.

$\vec{U}_{SR}$ и $\vec{U}_{SK}$ – этот же пространственный вектор напряжения статора в системах координат ротора R и K соответственно.

Связь между векторами в разных системах координат:

$$\begin{cases} \vec{U}_{SS} = \vec{U}_{SR} \cdot e^{j\theta} = \vec{U}_{SK} \cdot e^{j\theta_k}; \\ \vec{U}_{SR} = \vec{U}_{SS} \cdot e^{-j\theta} = \vec{U}_{SK} \cdot e^{j(\theta_k - \theta)}; \\ \vec{U}_{SK} = \vec{U}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k} = \vec{U}_{SR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)}. \end{cases}$$

Система уравнений (25) – (28) примет следующий вид:

$$\vec{U}_{SS} = \vec{I}_{SS} \cdot R_S + \frac{d\vec{\psi}_{SS}}{dt}, \qquad (29)$$

где $\vec{U}_{SS}$, $\vec{I}_{SS}$, $\vec{\psi}_{SS}$ – записаны в не подвижной системе координат статора S.

$$\vec{U}_{RR} = \vec{I}_{RR} \cdot R_R + \frac{d\vec{\psi}_{RR}}{dt}, \qquad (30)$$

где $\vec{U}_{RR}$, $\vec{I}_{RR}$, $\vec{\psi}_{RR}$ – пространственные векторы роторных величин в роторной системе координат R.

$$\vec{\psi}_{SS} = L_S \cdot \vec{I}_{SS} + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot \vec{I}_{RR}, \qquad (31)$$

где $\vec{\psi}_{SS}$, $\vec{I}_{SS}$ – векторы потокосцепления и ток статора в неподвижной системе координат S, а $\vec{I}_{RR}$ – в роторной системе координат сдвинутой в неподвижной системе на угол Θ.

$$\vec{\psi}_{RR} = L_R \cdot \vec{I}_{RR} + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot \vec{I}_{SS}, \qquad (32)$$

Приведение уравнений к системе координат вращающейся с произвольной скоростью ω_k

Уравнение (24) умножим на $e^{-j\theta_k}$ и сразу выразим $\vec{\psi}_{SS} = \vec{\psi}_{SK} \cdot e^{j\theta}$:

$$\vec{U}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k} = (\vec{I}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k}) \cdot R_S + e^{-j\theta_k} \cdot \frac{d(\vec{\psi}_{SK} \cdot e^{j\theta})}{dt};$$

$$\vec{U}_{SK} = \vec{I}_{SK} \cdot R_S + \frac{d\vec{\psi}_{SK}}{dt} \cdot e^{-j\theta_k} \cdot e^{j\theta_k} + j\frac{\theta_k}{dt} \cdot \vec{\psi}_{SK} \cdot e^{-j\theta_k} \cdot e^{j\theta_k};$$

$$\vec{U}_{SK} = \vec{I}_{SK} \cdot R_S + \frac{d\vec{\psi}_{SK}}{dt} + j\frac{\theta_k}{dt} \cdot \vec{\psi}_{SK}.$$

Уравнение (25) умножим на $e^{-j(\theta_k - \theta)}$:

$$\vec{U}_{RR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)} = \vec{I}_{RR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)} \cdot R_R + e^{-j(\theta_k - \theta)} \cdot \frac{d(\vec{\psi}_{RK} \cdot e^{j(\theta_k - \theta)})}{dt};$$

$$\vec{U}_{RK} = \vec{I}_{RK} \cdot R_R + e^{-j(\theta_k - \theta)} \cdot e^{j(\theta_k - \theta)} \cdot \frac{d\vec{\psi}_{RK}}{dt} + j \cdot (\frac{\theta_k}{dt} - \frac{\theta}{dt}) \cdot \vec{\psi}_{RK} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)} \cdot e^{j(\theta_k - \theta)};$$

$$\vec{U}_{RK} = \vec{I}_{RK} \cdot R_R + \frac{d\vec{\psi}_{RK}}{dt} + j \cdot (\Omega_k - \Omega) \cdot \vec{\psi}_{RK}.$$

Уравнение (26) умножим на $e^{-j\theta_k}$, тогда

$$\vec{\psi}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k} = L_S \cdot (\vec{I}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k}) + L_m \cdot e^{j\theta} \cdot \vec{I}_{RR} \cdot e^{-j\theta_k}$$, т.к. $\vec{I}_{RR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)} = \vec{I}_{RK}$, то

$$\vec{\psi}_{SK} = L_S \cdot \vec{I}_{SK} + L_m \cdot \vec{I}_{RK}.$$

Уравнение(27) умножим на $e^{-j(\theta_k - \theta)}$, тогда

$$\vec{\psi}_{RR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)} = L_R \cdot (\vec{I}_{RR} \cdot e^{-j(\theta_k - \theta)}) + L_m \cdot e^{-j\theta} \cdot (\vec{I}_{SS} \cdot e^{-j\theta_k}) \cdot e^{j\theta};$$

$$\vec{\psi}_{RK} = L_R \cdot \vec{I}_{RK} + L_m \cdot \vec{I}_{SK}.$$

$$\begin{cases} \vec{U}_{SK} = \vec{I}_{SK} \cdot R_S + \dfrac{d\vec{\psi}_{SK}}{dt} + j\Omega_k \cdot \vec{\psi}_{SK}; \\ \vec{U}_{RK} = \vec{I}_{RK} \cdot R_R + \dfrac{d\vec{\psi}_{RK}}{dt} + j \cdot (\Omega_k - \Omega) \cdot \vec{\psi}_{RK}; \\ \vec{\psi}_{SK} = L_S \cdot \vec{I}_{SK} + L_m \cdot \vec{I}_{RK}; \\ \vec{\psi}_{RK} = L_R \cdot \vec{I}_R + L_m \cdot \vec{I}_S. \end{cases}$$