Лекция 6

Цепи синусоидального тока

Действующие значения синусоидального напряжения и тока

Математически действующее значение функции представляет собой ее среднеквадратичное значение

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}. \qquad \textbf{\textit{(3.33)}}$$

Аналогично выражаются и действующие значения электрических величин

$$\begin{cases} U = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u^2(t)dt}; \\ I = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i^2(t)dt}, \end{cases} \tag{3.34}$$

где ***u***, ***i*** **–** мгновенные значения напряжения, тока;

T **–** период функции.

Пусть, например, напряжение представляется в виде $u = U_m \sin(\omega t)$. Подстановка этой функции в ***(3.34)*** дает:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (U_m^2 \sin^2 \omega t)dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Действующее значение меньше амплитудного в $\sqrt{2}$ раз.

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \qquad \textbf{\textit{(3.35)}}$$

На щитках электрических машин и аппаратов переменного тока в качестве номинальных указываются действующие значения напряжений и токов.

Измерительные приборы измеряют действующие значения соответствующих величин.

Комплексные действующие значения или **комплексы напряжений и токов:**

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}; \qquad \dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}; \qquad \dot{E} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}};$$

Мгновенная мощность

$$\boldsymbol{p = u\, i} \qquad \textbf{(3.36)}$$

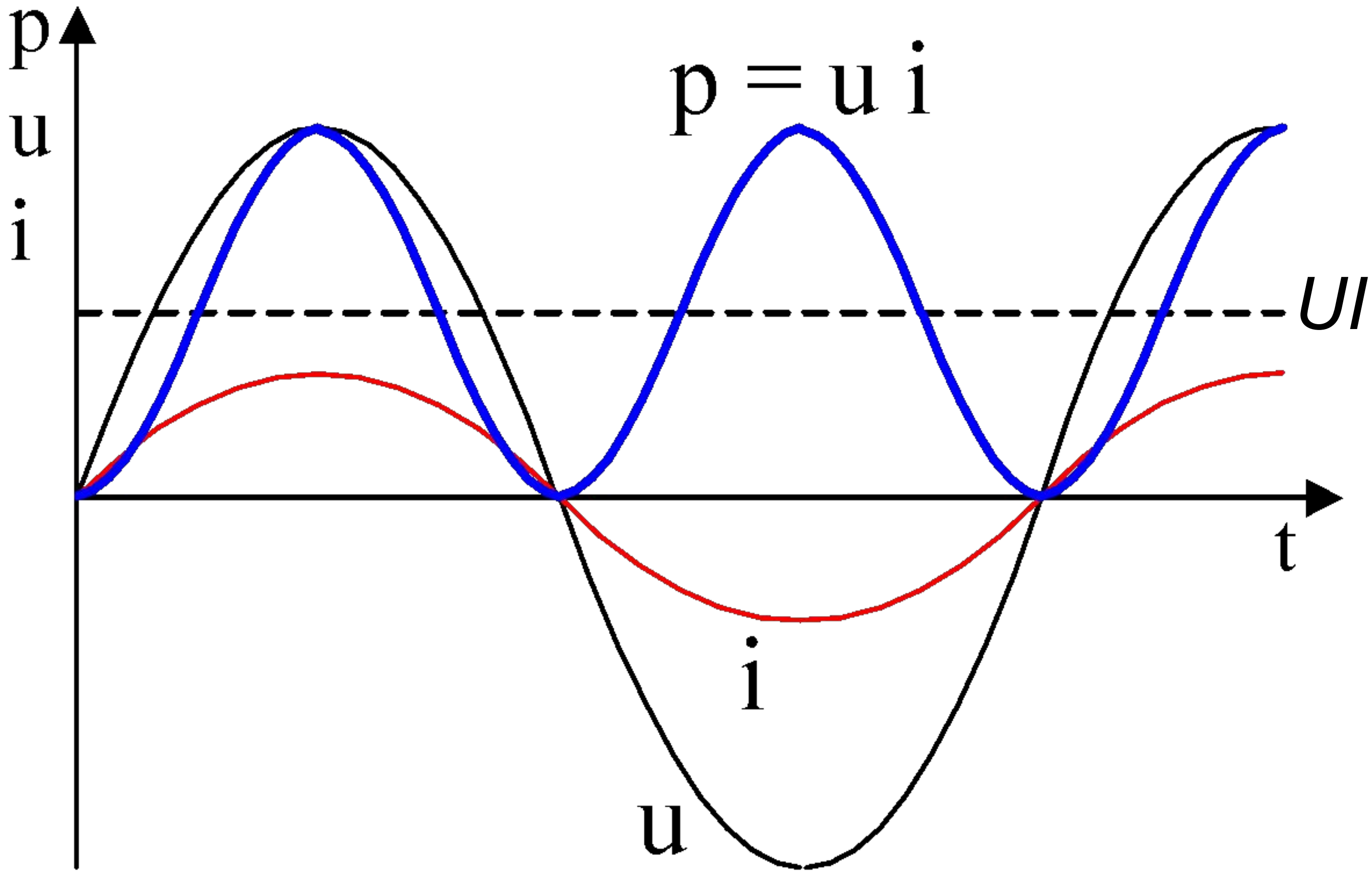
$$u = U_m \sin\omega t, \qquad i = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

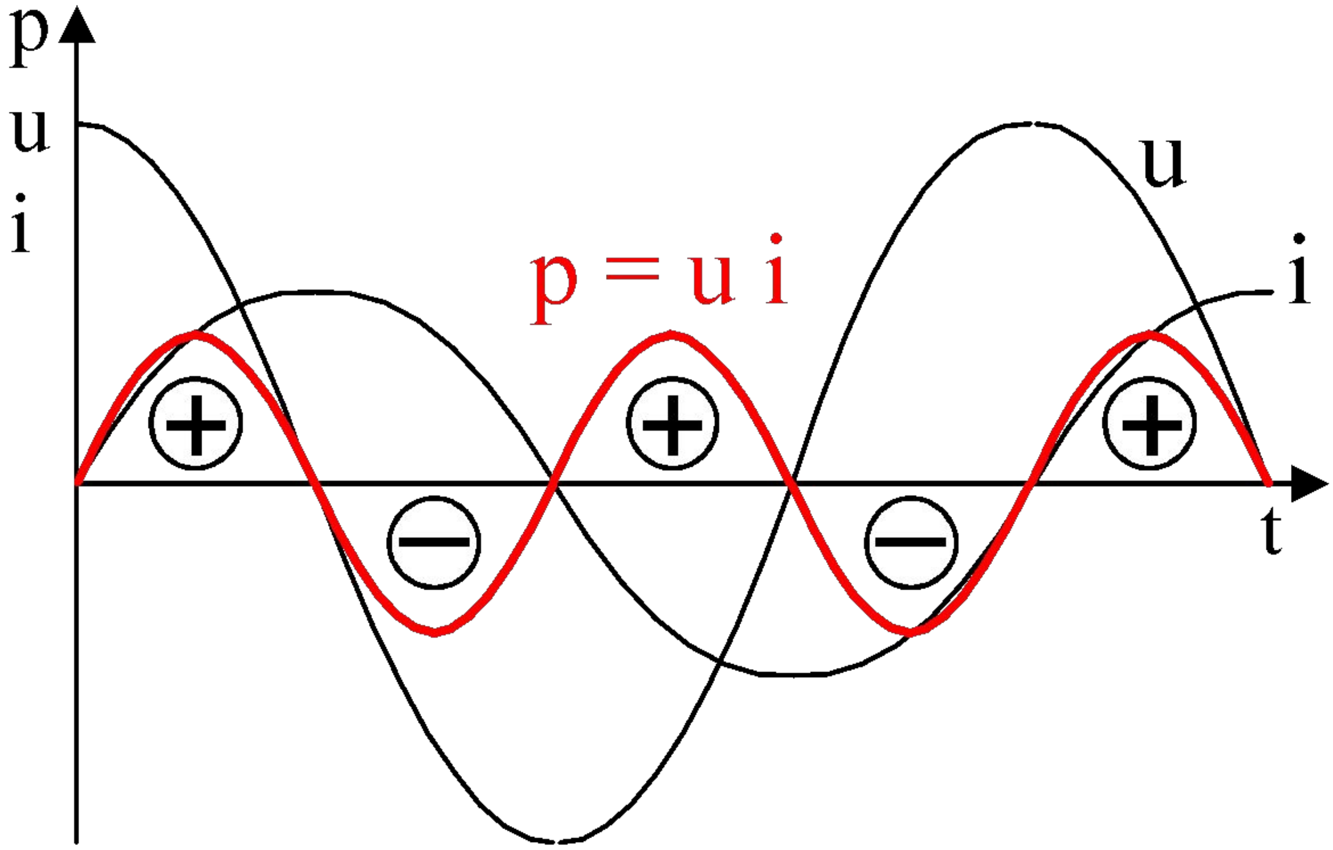
$$p = ui = U_m \sin\omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) =$$
$$= U_m I_m \sin\omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi).$$

$$p = \frac{1}{2} U_m I_m \left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)\right] = \\ = UI\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)\right]. \qquad \textit{(3.37)}$$

Мгновенная мощность является периодической функцией, изменяющейся с двойной частотой по отношению к частоте напряжения и тока.

Мгновенная мощность для сопротивления *r не имеет отрицательных значений*.





В индуктивности *L* угол сдвига фаз φ=π/2, поэтому в ***(3.37)*** cos φ = 0 и кривая мгновенной мощности симметрична относительно оси времени.

Это значит, что в части периода энергия поступает от источника в индуктивность, в другой – возвращается источнику.

Активная мощность

Активная мощность определена как среднее значение мгновенной мощности:

$$P = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} p\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} ui\,dt. \qquad \textbf{\textit{(3.38)}}$$

$$P = UI\cos\varphi. \qquad \textbf{\textit{(3.39)}}$$

Произведение

$$UI = S$$

есть **полная мощность**, поэтому активная мощность записывается также в виде:

$$P = S\cos\varphi \qquad \textbf{\textit{(3.40)}}$$

Единица измерения активной мощности – ватт (Вт); полная мощность измеряется в вольт-амперах (ВА).

Реактивная мощность определяется формулой

$$Q = UI\sin\varphi.$$

Единица измерения Q – вольт-ампер реактивный (вар).

Мощность в комплексной форме или комплексная мощность

Комплексная мощность представляет собой произведение комплекса напряжения на сопряженный комплекс тока:

$$\dot{S} = \dot{U}\overset{*}{I}. \qquad \textbf{\textit{(3.41)}}$$

Пусть $\dot{U} = Ue^{j\beta};\ \dot{I} = Ie^{j\alpha};\ \overset{*}{I} = Ie^{-j\alpha}.$

Осуществим подстановку этих значений в ***(3.41)***:

$$\dot{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = Ue^{j\beta} \cdot Ie^{-j\alpha} = UIe^{j(\beta-\alpha)} =$$

$$= UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi =$$

$$= P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2}\, e^{j\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}} = Se^{j\varphi}$$

Коэффициент мощности –

это отношение активной мощности к полной:

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S}.$$

Баланс мощностей

$$S_{ист} = S_{потр};$$

$$P_{ист} + jQ_{ист} = P_{потр} + jQ_{потр};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{ист} = P_{потр}; \\ Q_{ист} = Q_{потр}. \end{cases}$$

Мощности $\mathbf{P}_{\mathbf{ист}}$ и $\mathbf{Q}_{\mathbf{ист}}$ определяются через входное напряжение и входной ток:

$$\begin{cases} P_{ист} = U_{вх} I_{вх} \cos\varphi_{вх}; \\ Q_{ист} = U_{вх} I_{вх} \sin\varphi_{вх}. \end{cases}$$

С использованием выражения для комплексной мощности получим:

$$\dot{S} = \dot{U}_{вх} \overset{*}{I}_{вх} = U_{вх} I_{вх} \cos\varphi_{вх} + jU_{вх} I_{вх} \sin\varphi_{вх}.$$

Составляющие $\mathbf{P}_{\mathbf{потр}}$ и $\mathbf{Q}_{\mathbf{потр}}$ удобно записывать поэлементно:

$$\begin{cases} P_{потр} = \sum_{k} I_k^2 r_k; \\ Q_{потр} = \sum_{k} I_k^2 x_k. \end{cases}$$

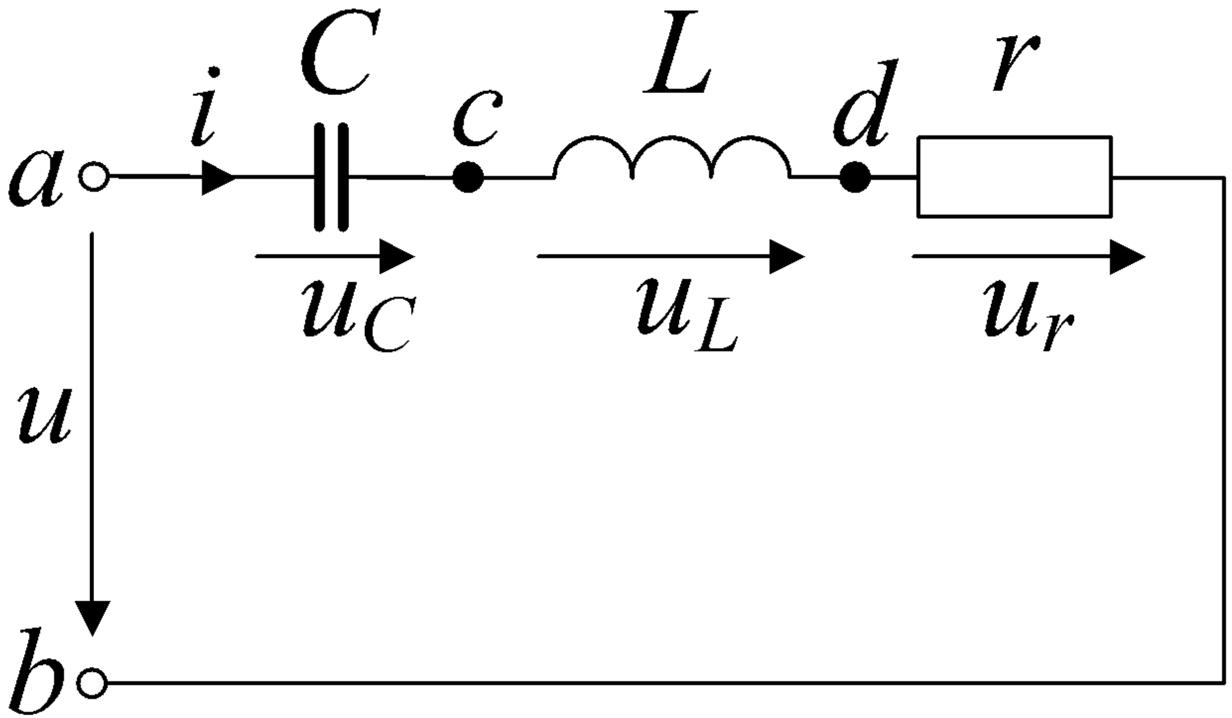
При этом следует учитывать, что все составляющие активной мощности $\mathbf{P}_{\mathbf{потр}}$ положительны. Слагаемые $\mathbf{Q}_{\mathbf{потр}}$ имеют разные знаки:

– индуктивные составляющие $\mathbf{I^2_k x_{Lk}}$ имеют знак **«плюс»**;

– емкостные составляющие $\mathbf{I^2_k x_{Ck}}$ **– «минус»**.

Комплексные соотношения для трехэлементных электрических цепей

Рассмотрим схему с последовательным соединением элементов ***r***, ***L*** и ***C***.



Записываем уравнение для мгновенных значений по второму закону Кирхгофа:

$$u_r + u_L + u_C = u$$

или

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = u. \qquad \textbf{\textit{(3.42)}}$$

Пусть

$$\begin{cases} u = U_m \sin(\omega t + \beta); \\ i = I_m \sin(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

Условимся использовать запись по комплексным действующим значениям, которые в данном случае имеют вид:

$$\dot{U} = U e^{j\beta}; \quad \dot{I} = I e^{j\alpha};$$

тогда уравнению ***(3.42)*** в комплексной форме будет соответствовать уравнение:

$$r\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dot{U} \qquad \textbf{\textit{(3.43)}}$$

С учетом $\frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$ уравнение ***(3.43)*** преобразуется в следующей последовательности:

$$\left(r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I} = \dot{U};$$

$$(r + jx_L - jx_C)\dot{I} = \dot{U};$$

$$(r + jx)\dot{I} = \dot{U};$$

$$Z\dot{I} = \dot{U},$$

где $x = x_L - x_C$ – реактивное сопротивление;

$$Z = r + jx = \sqrt{r^2 + x^2} \cdot e^{j\operatorname{arctg}\frac{x}{r}} = ze^{j\varphi} -$$

комплексное сопротивление цепи;

$z = \sqrt{r^2 + x^2}$ – полное сопротивление или модуль комплексного сопротивления;

$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{r}$ – аргумент комплексного сопротивления, представляющий собой угол сдвига фаз между входным напряжением и током.

Установленные здесь закономерности имеют общий характер и сводятся к следующему:

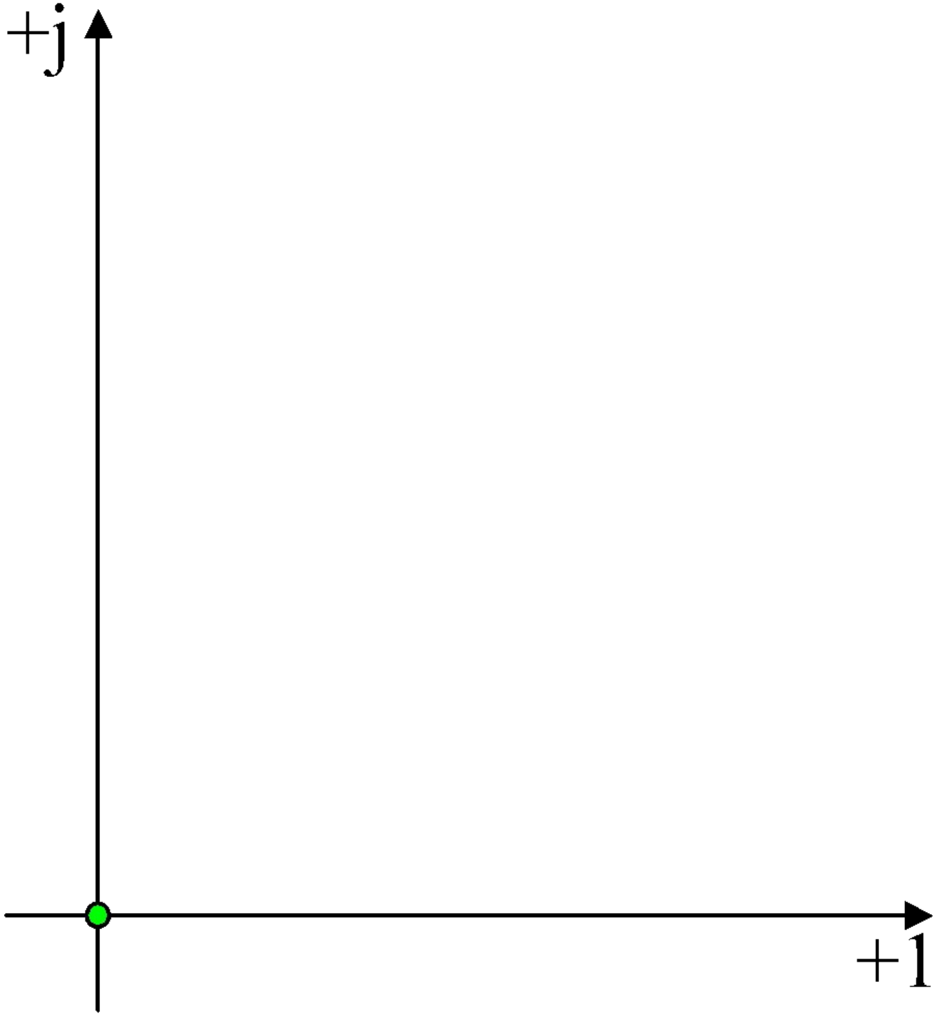
1. Индуктивное и емкостное сопротивления в состав общего реактивного сопротивления входят с разными знаками (индуктивное – с плюсом, емкостное – с минусом).

2. Модуль комплексного сопротивления есть полное сопротивление.

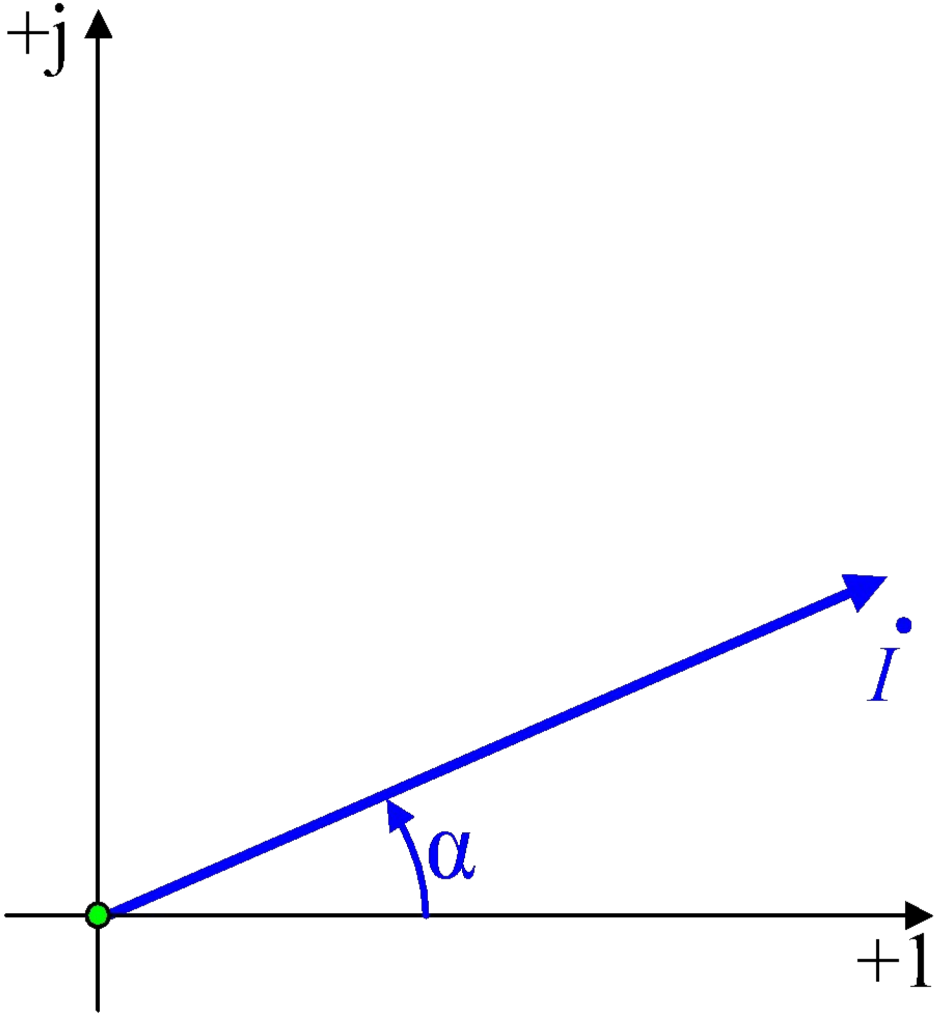
3. Аргументом комплексного сопротивления всегда является угол сдвига фаз между соответствующими напряжением и током.

Результатом решения ***(3.43)*** является комплексное действующее значение тока (комплекс тока), по которому легко записывается мгновенное значение:

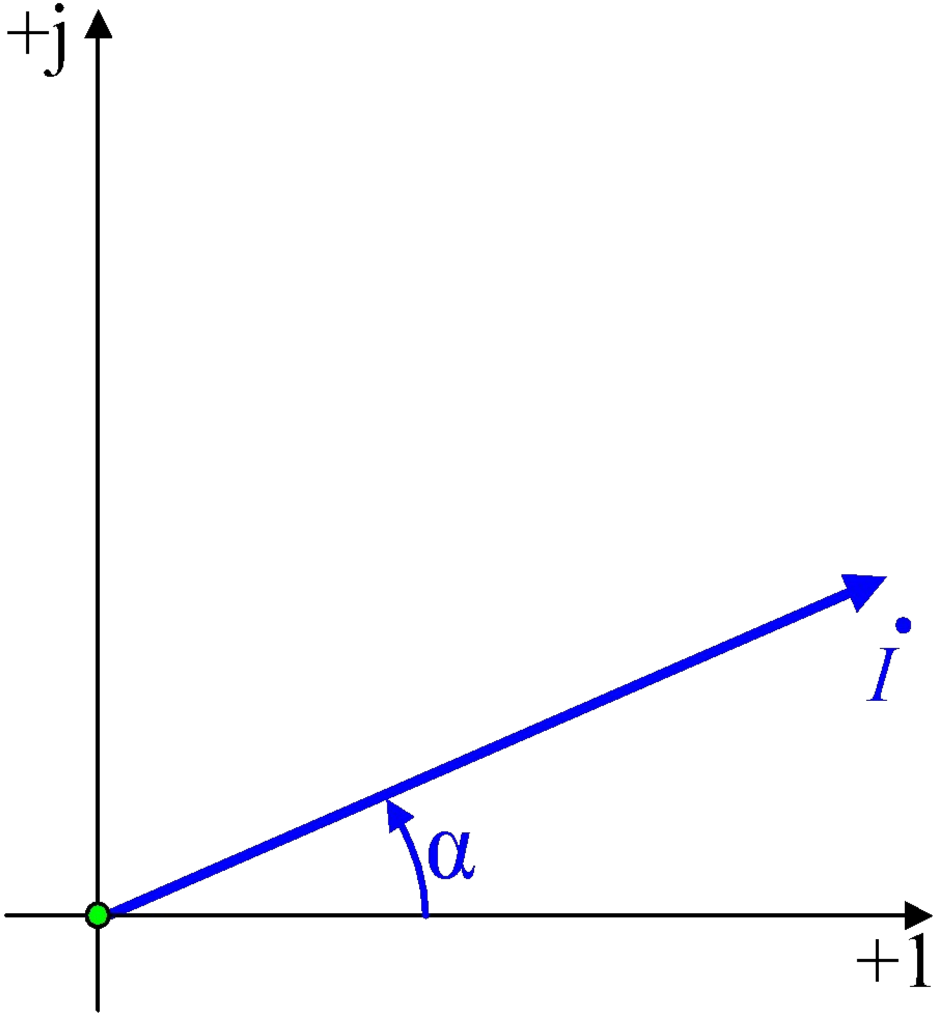
$$\dot{U} = \frac{\dot{I}}{Z} \rightarrow i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha).$$



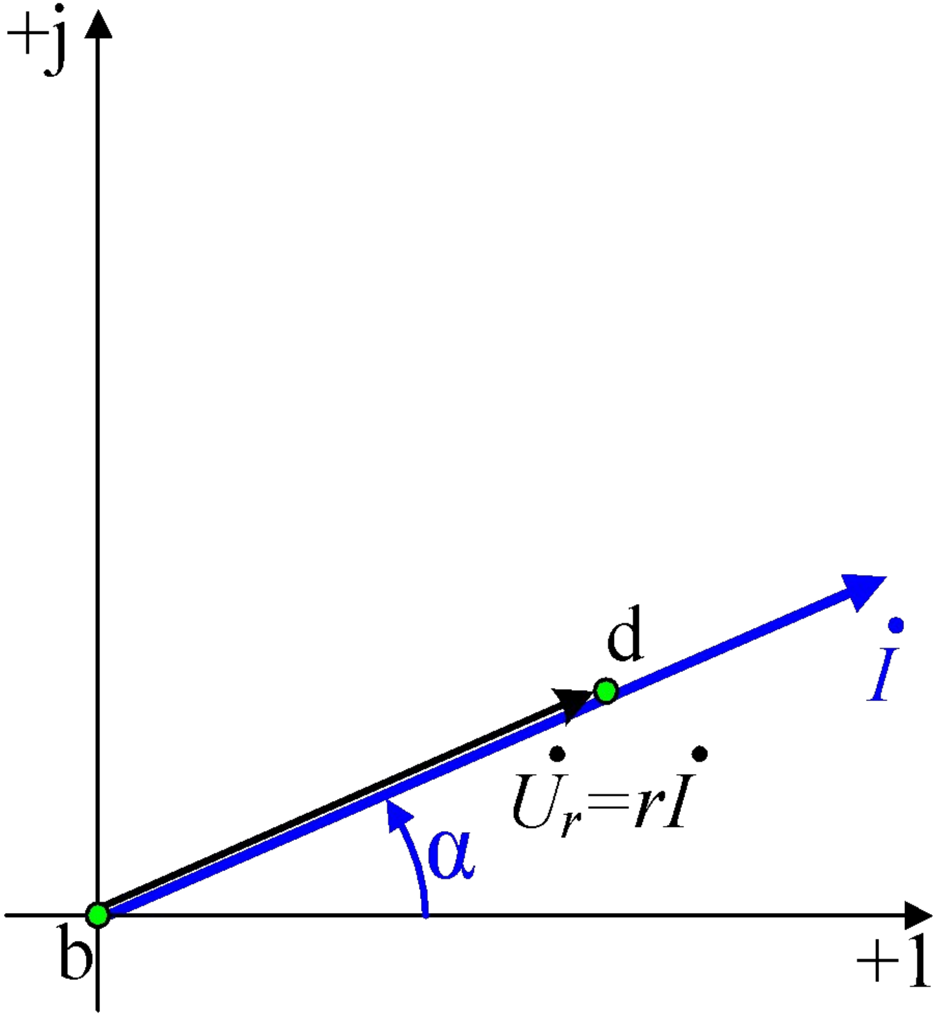
Для построения векторной диаграммы выбирают масштабы действующих значений тока и напряжений (модулей комплексов).



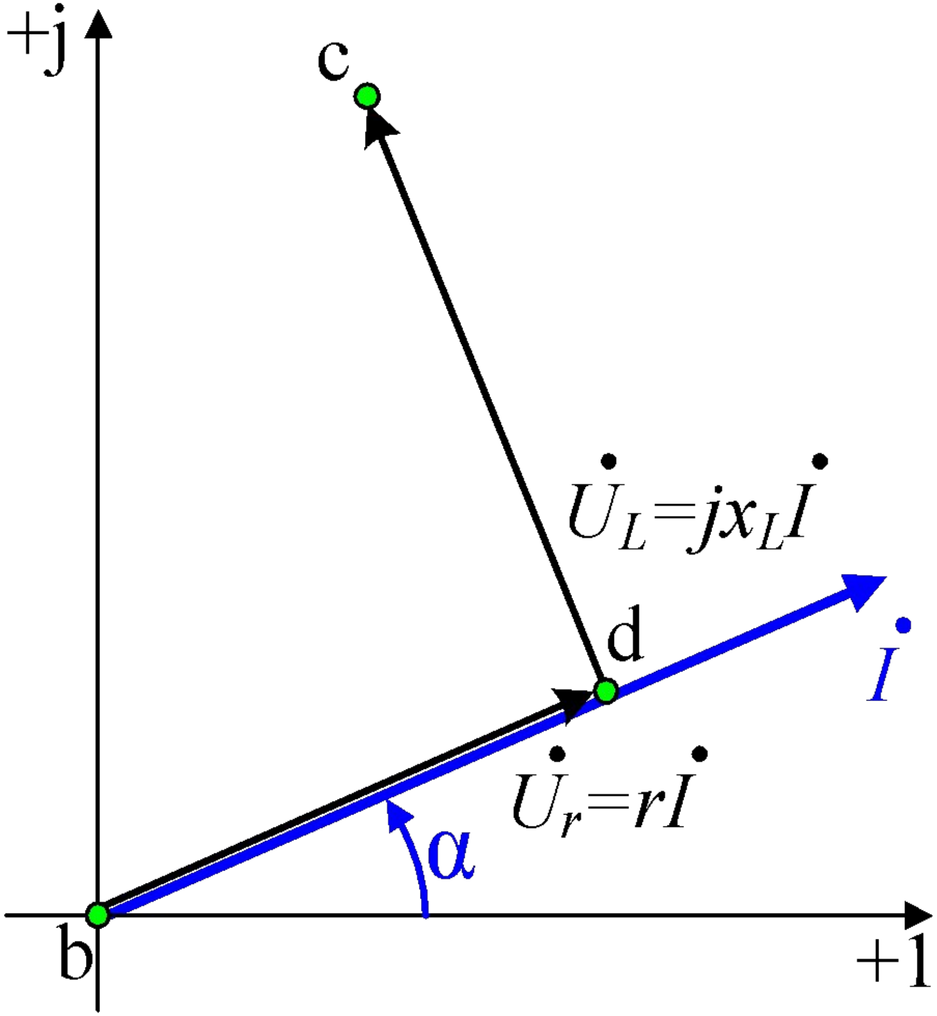
Общей величиной для всех элементов является ток ***I***. Поэтому вектор тока на данной диаграмме является исходным или базовым.



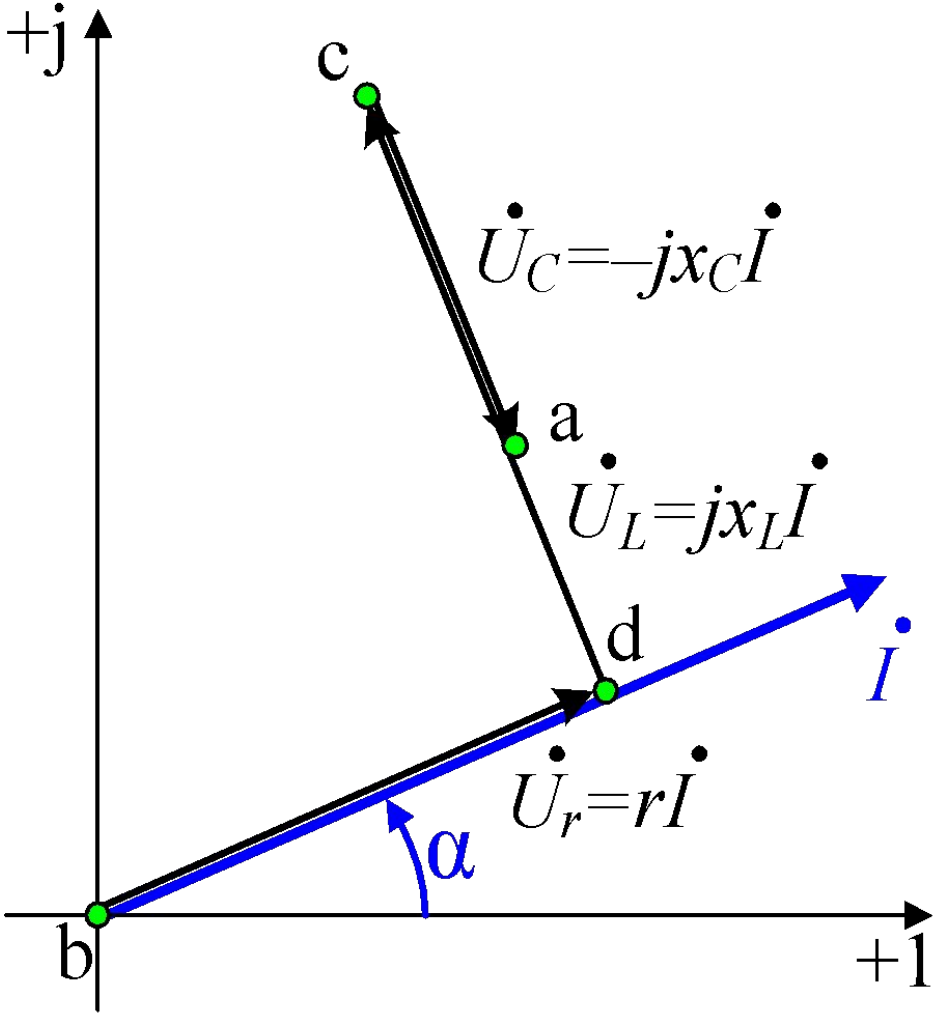
Векторы падений напряжения ориентированы относительно вектора тока с учетом фазовых соотношений для элементов ***r***, ***L*** и ***C***.



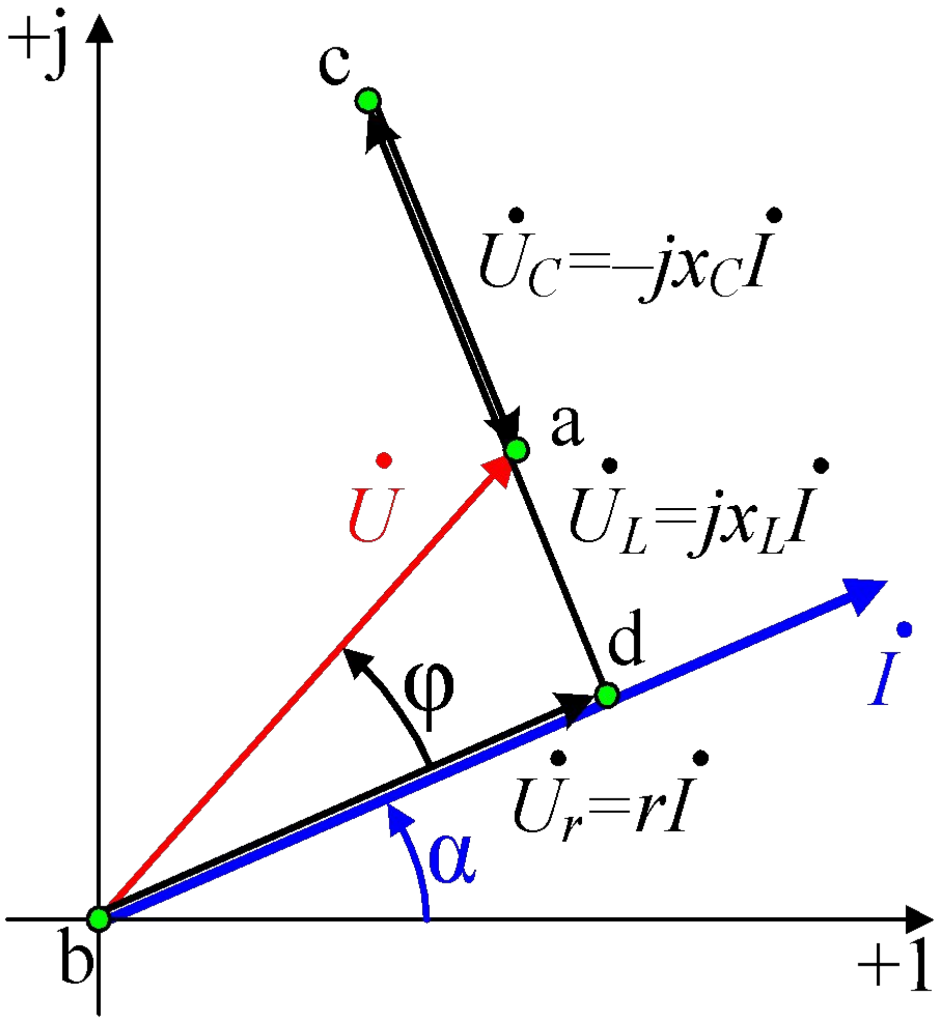
В сопротивлении ***r*** напряжение и ток совпадают по фазе.



В индуктивности напряжение опережает ток на 90º.



В емкости напряжение отстает от тока на 90º.



Направление обхода контура выбрано против тока. Векторы падений напряжения на векторной диаграмме соответствуют расположению элементов на схеме, т.е. последовательно из точки **b** отложены векторы $\boldsymbol{U_r}$, $\boldsymbol{U_L}$, и $\boldsymbol{U_C}$. Геометрическая сумма этих векторов равна приложенному напряжению ***U***.

Векторные диаграммы такого типа называются **топографическими векторными диаграммами.**

Главная их особенность – соответствие расположения векторов падений напряжений расположению элементов на схеме.

Построенная векторная диаграмма соответствует случаю, когда индуктивное сопротивление $\boldsymbol{x_L}$, равное $\boldsymbol{\omega L}$, превышает емкостное $\boldsymbol{x_C}$, равное $\boldsymbol{1/(\omega C)}$, поэтому падение напряжения на индуктивности $\boldsymbol{U_L=x_L I}$, больше падения напряжения $\boldsymbol{U_C=x_C I}$, угол $\boldsymbol{\varphi}$ положителен, напряжение по фазе опережает ток и относительно входных зажимов схема воспринимается как активно-индуктивная.