

Лекция 6

Цепи синусоидального тока

Действующие значения синусоидального напряжения и тока

Математически действующее значение функции
представляет собой ее среднеквадратичное
значение

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}. \quad (3.33)$$

Аналогично выражаются и действующие значения электрических величин

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt};$$

(3.34)

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt},$$

где u , i – мгновенные значения напряжения, тока;
 T – период функции.

Пусть, например, напряжение представляется в виде $u = U_m \sin(\omega t)$. Подстановка этой функции в **(3.34)** дает:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (U_m^2 \sin^2 \omega t) dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Действующее значение меньше амплитудного в $\sqrt{2}$ раз.

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.35)$$

На щитках электрических машин и аппаратов переменного тока в качестве номинальных указываются действующие значения напряжений и токов.

Измерительные приборы измеряют действующие значения соответствующих величин.

Комплексные действующие значения или комплексы напряжений и токов:

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}; \quad \dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}; \quad \dot{E} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}};$$

Мгновенная мощность

$$\mathbf{p = u i} \quad (3.36)$$

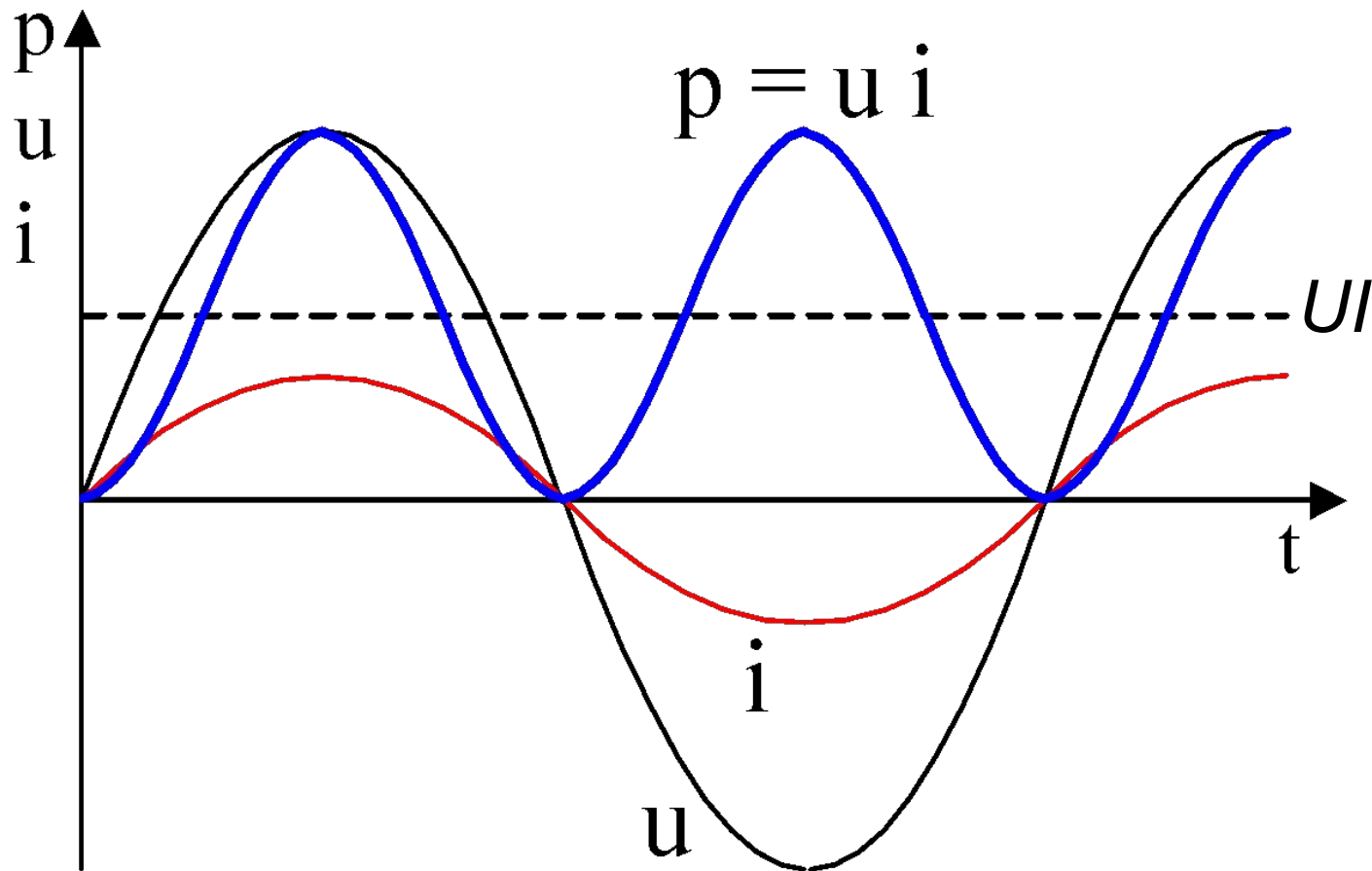
$$u = U_m \sin \omega t, \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

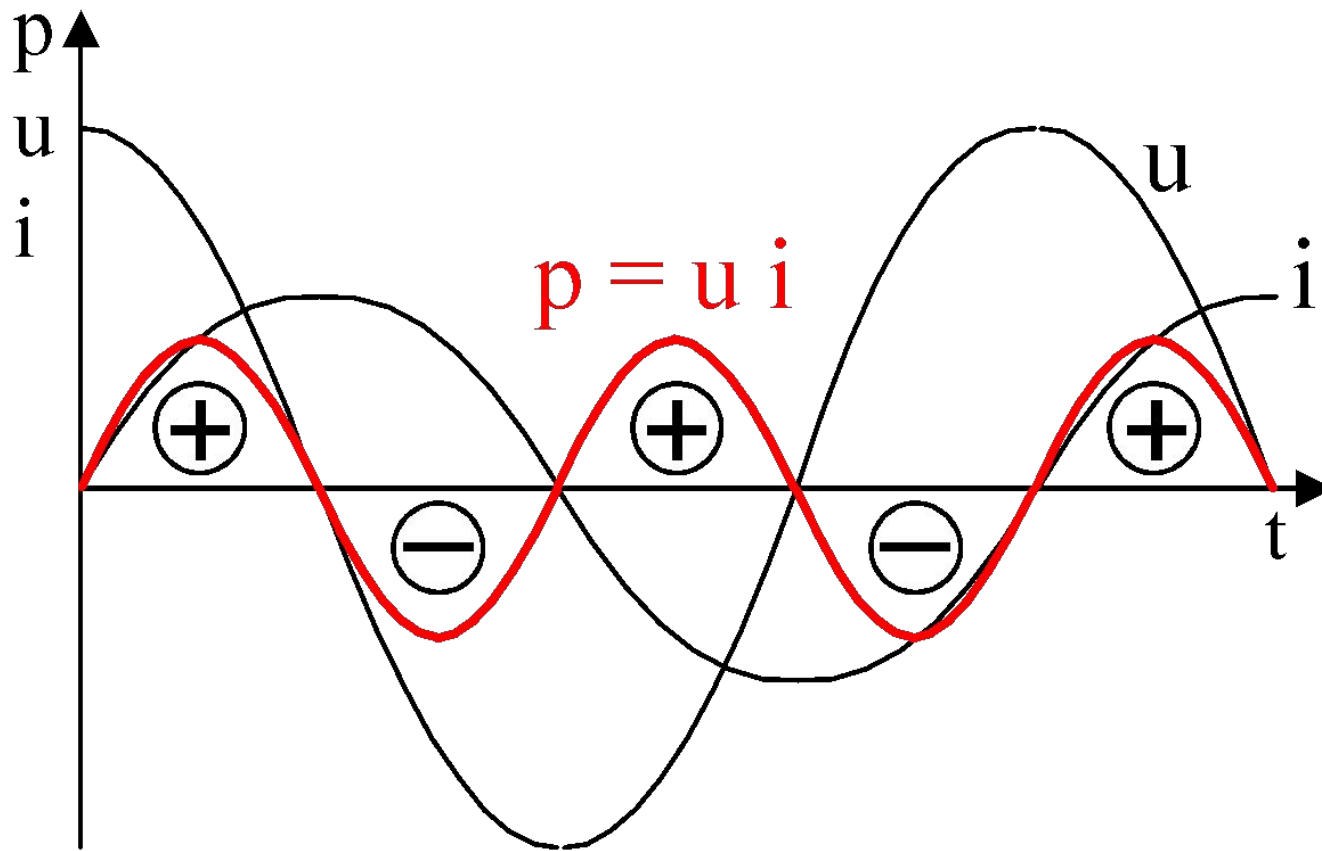
$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = \\ &= UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Мгновенная мощность является периодической функцией, изменяющейся с двойной частотой по отношению к частоте напряжения и тока.

Мгновенная мощность для сопротивления r не имеет отрицательных значений.





В индуктивности L угол сдвига фаз $\varphi = \pi/2$, поэтому в (3.37) $\cos \varphi = 0$ и кривая мгновенной мощности симметрична относительно оси времени.

Это значит, что в части периода энергия поступает от источника в индуктивность, в другой – возвращается источнику.

Активная мощность определена как среднее значение мгновенной мощности:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (3.38)$$

$$P = UI \cos \varphi. \quad (3.39)$$

Произведение

$$UI = S$$

есть **полная мощность**, поэтому активная мощность записывается также в виде:

$$P = S \cos \varphi \quad (3.40)$$

Единица измерения активной мощности – ватт (Вт); полная мощность измеряется в вольт-амперах (ВА).

Реактивная мощность определяется формулой

$$Q = UI \sin \varphi.$$

Единица измерения Q – вольт-ампер реактивный (вар).

Мощность в комплексной форме или комплексная мощность

Комплексная мощность представляет собой произведение комплекса напряжения на сопряженный комплекс тока:

$$\dot{S} = \dot{U} \dot{I}^* \quad (3.41)$$

Пусть $\dot{U} = Ue^{j\beta}$; $\dot{I} = Ie^{j\alpha}$; $\dot{I}^* = Ie^{-j\alpha}$.

Осуществим подстановку этих значений в **(3.41)**:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \dot{U}\dot{I}^* = Ue^{j\beta} \cdot Ie^{-j\alpha} = UIe^{j(\beta-\alpha)} = \\ &= UIe^{j\varphi} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = \\ &= P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} e^{j\arctg\frac{Q}{P}} = Se^{j\varphi} \end{aligned}$$

Коэффициент мощности –

это отношение активной мощности к
полной:

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S}.$$

$$S_{\text{ист}} = S_{\text{потр}};$$
$$P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} = P_{\text{потр}} + jQ_{\text{потр}};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}; \\ Q_{\text{ист}} = Q_{\text{потр}}. \end{cases}$$

Мощности $P_{\text{ист}}$ и $Q_{\text{ист}}$ определяются через входное напряжение и входной ток: 19

$$\begin{cases} P_{\text{ист}} = U_{\text{вх}} I_{\text{вх}} \cos \varphi_{\text{вх}}; \\ Q_{\text{ист}} = U_{\text{вх}} I_{\text{вх}} \sin \varphi_{\text{вх}}. \end{cases}$$

С использованием выражения для комплексной мощности получим:

$$\dot{S} = \dot{U}_{\text{вх}}^* I_{\text{вх}} = U_{\text{вх}} I_{\text{вх}} \cos \varphi_{\text{вх}} + j U_{\text{вх}} I_{\text{вх}} \sin \varphi_{\text{вх}}.$$

Составляющие $P_{\text{потр}}$ и $Q_{\text{потр}}$ удобно записывать поэлементно:

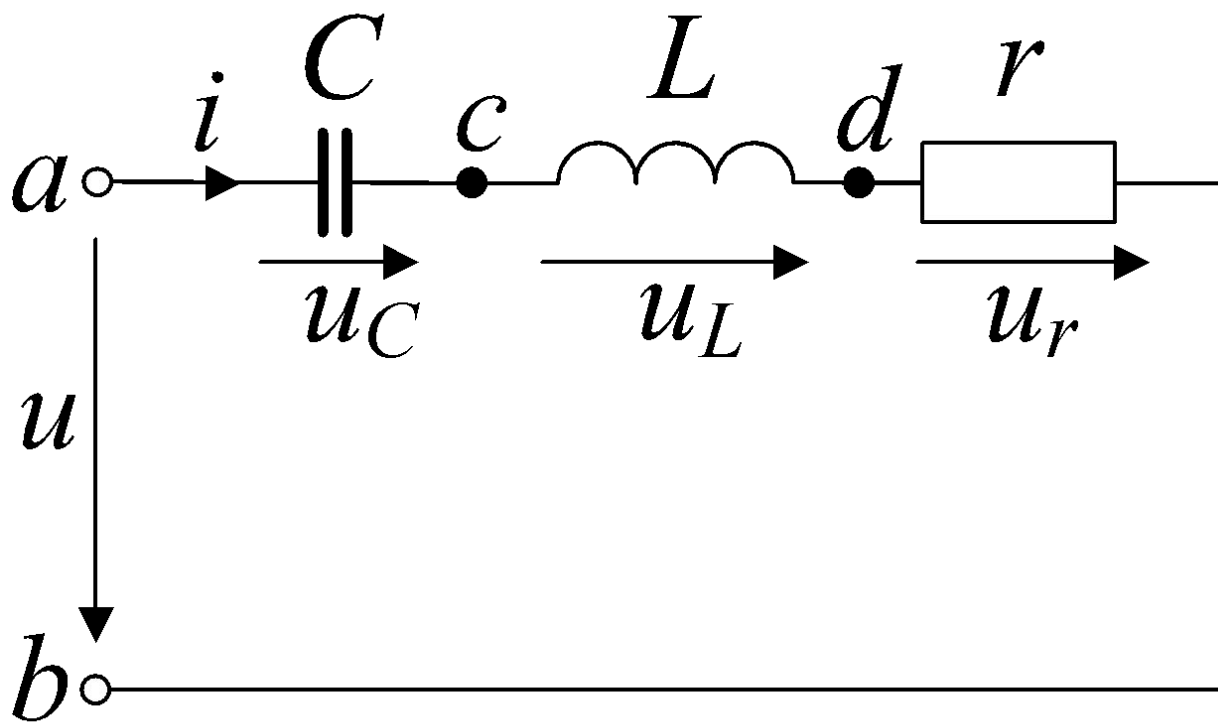
$$\begin{cases} P_{\text{потр}} = \sum_k I_k^2 r_k; \\ Q_{\text{потр}} = \sum_k I_k^2 x_k. \end{cases}$$

При этом следует учитывать, что все составляющие активной мощности $P_{\text{потр}}$ положительны. Слагаемые $Q_{\text{потр}}$ имеют разные знаки:

- индуктивные составляющие $I_k^2 x_{Lk}$ имеют знак **«ПЛЮС»**;
- емкостные составляющие $I_k^2 x_{Ck}$ – **«МИНУС»**.

Комплексные соотношения для трехэлементных электрических цепей

Рассмотрим схему с последовательным соединением элементов r , L и C .



Записываем уравнение для мгновенных значений по второму закону Кирхгофа:

$$u_r + u_L + u_C = u$$

или

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u. \quad (3.42)$$

Пусть

$$\begin{cases} u = U_m \sin(\omega t + \beta); \\ i = I_m \sin(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

Условимся использовать запись по комплексным действующим значениям, которые в данном случае имеют вид:

$$\dot{U} = U e^{j\beta}; \quad \dot{I} = I e^{j\alpha};$$

тогда уравнению **(3.42)** в комплексной форме будет соответствовать уравнение:

$$r\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \dot{U} \quad \text{(3.43)}$$

С учетом $\frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$ уравнение **(3.43)**

преобразуется в следующей последовательности:

$$\left(r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) \dot{I} = \dot{U};$$

$$(r + jX_L - jX_C) \dot{I} = \dot{U};$$

$$(r + jX) \dot{I} = \dot{U};$$

$$Z \dot{I} = \dot{U},$$

где $X = X_L - X_C$ – реактивное сопротивление;

$$Z = r + jX = \sqrt{r^2 + X^2} \cdot e^{j \arctg \frac{X}{r}} = ze^{j\varphi} -$$

комплексное сопротивление цепи;

$z = \sqrt{r^2 + X^2}$ – полное сопротивление или модуль комплексного сопротивления;

$\varphi = \arctg \frac{X}{r}$ – аргумент комплексного

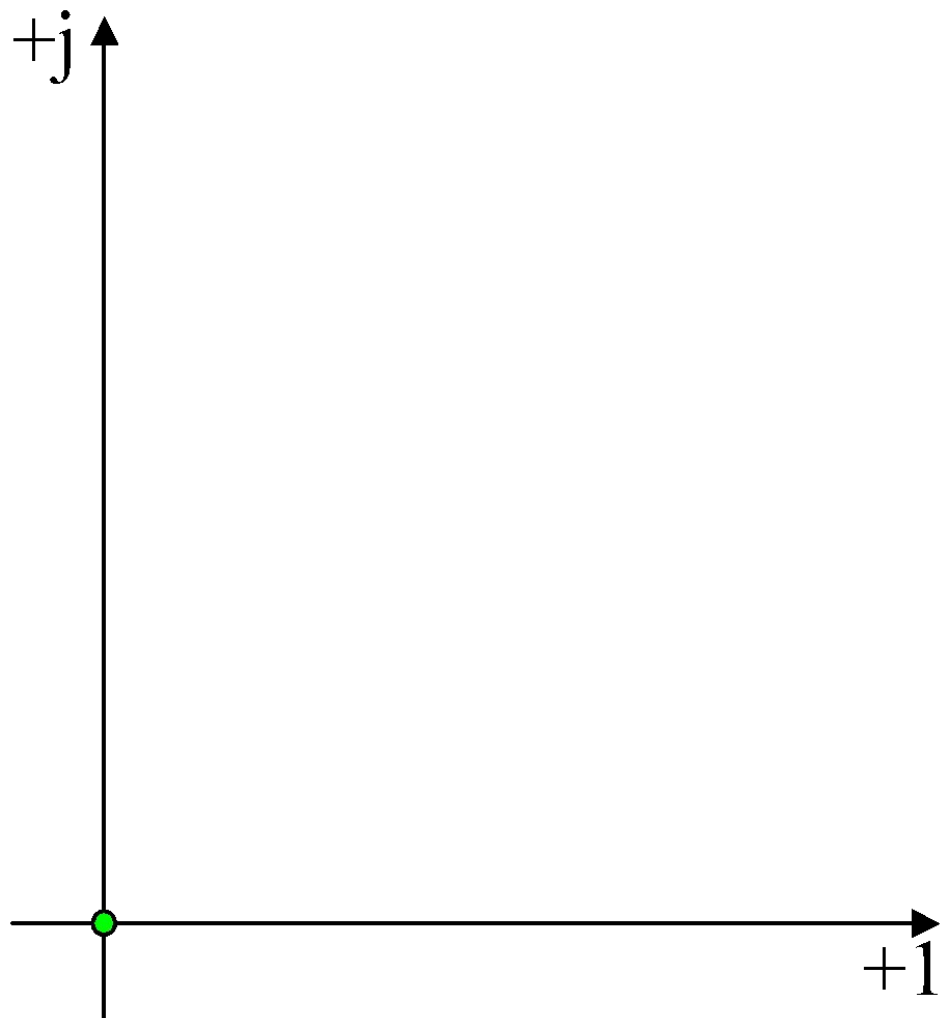
сопротивления, представляющий собой угол сдвига фаз между входным напряжением и током.

Установленные здесь закономерности имеют общий характер и сводятся к следующему:

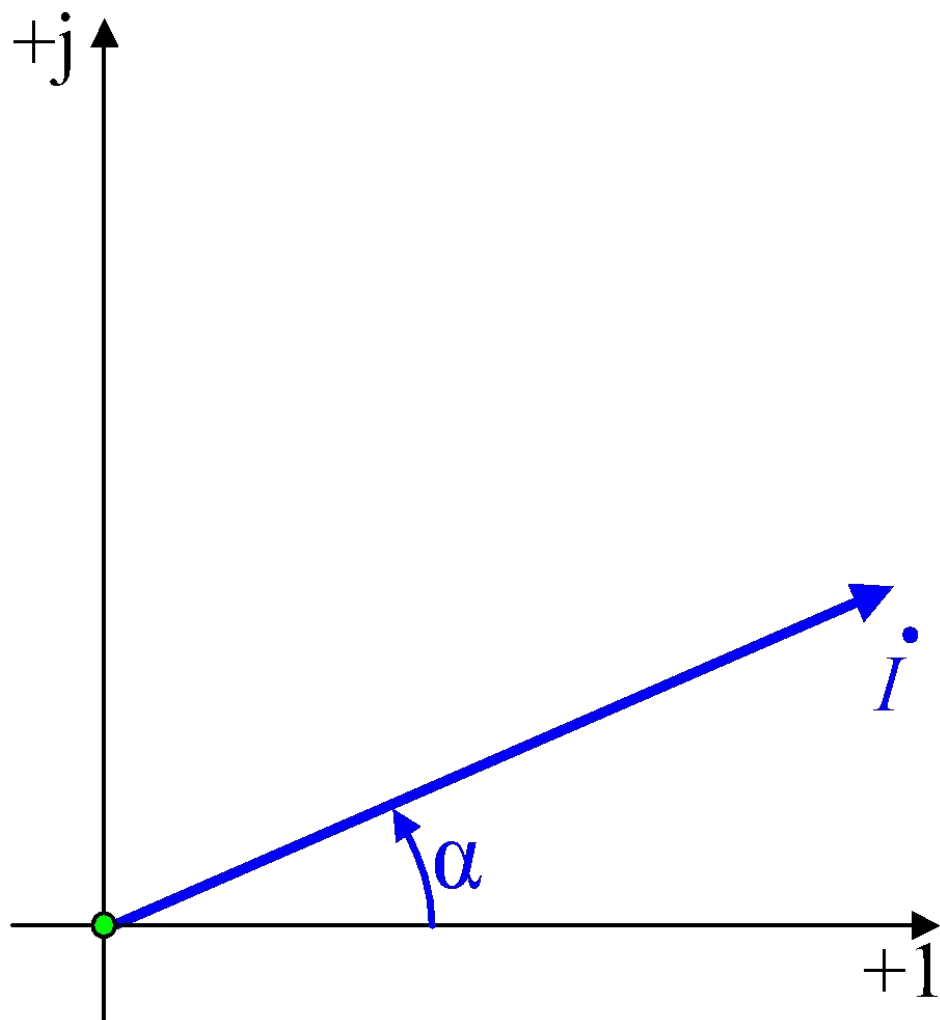
- 1.** Индуктивное и емкостное сопротивления в состав общего реактивного сопротивления входят с разными знаками (индуктивное – с плюсом, емкостное – с минусом).
- 2.** Модуль комплексного сопротивления есть полное сопротивление.
- 3.** Аргументом комплексного сопротивления всегда является угол сдвига фаз между соответствующими напряжением и током.

Результатом решения (3.43) является комплексное действующее значение тока (комплекс тока), по которому легко записывается мгновенное значение:

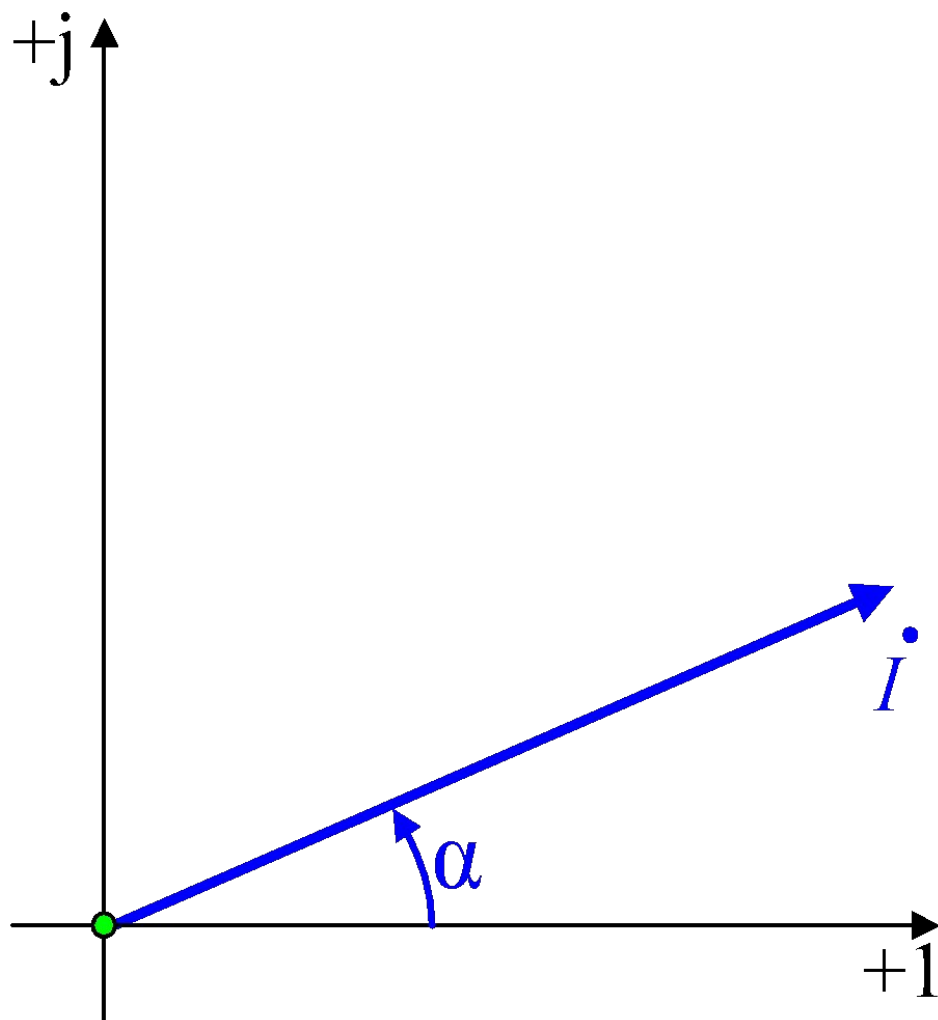
$$\dot{U} = \frac{\dot{i}}{Z} \rightarrow i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha).$$



Для построения
векторной диаграммы
выбирают масштабы
действующих значений
тока и напряжений
(модулей комплексов).

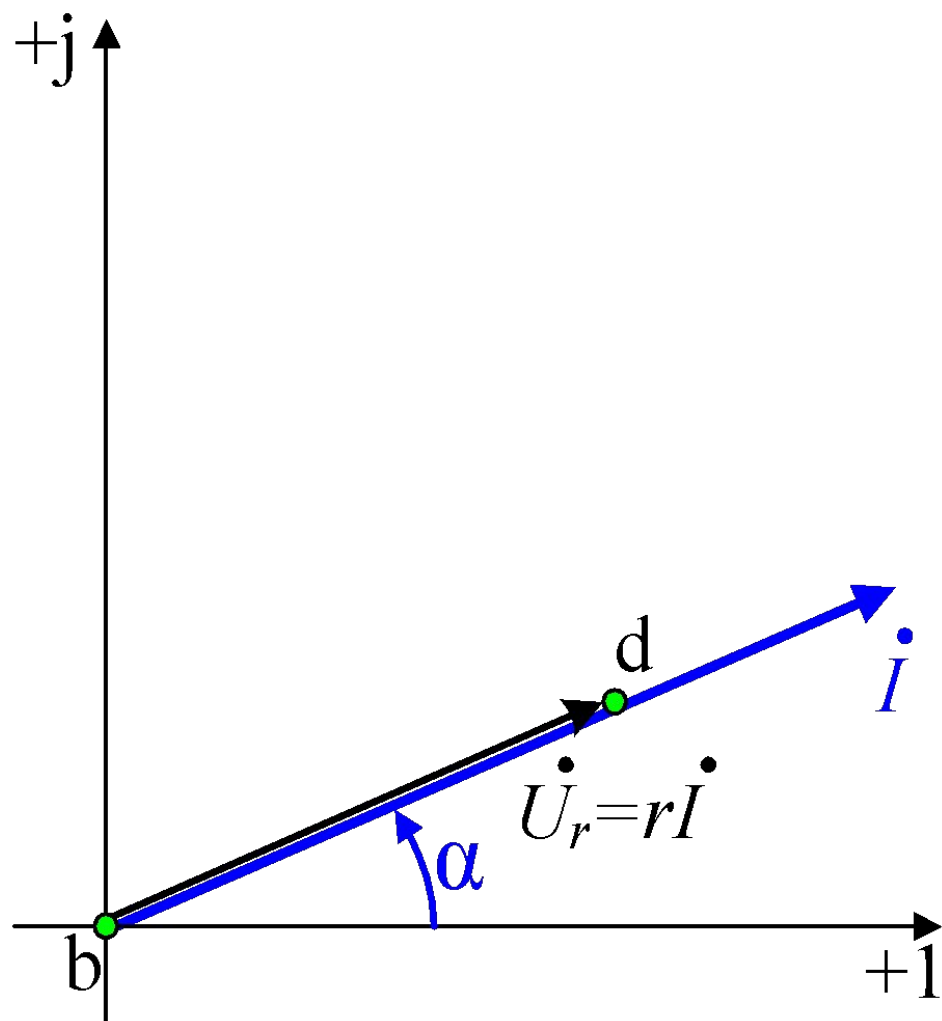


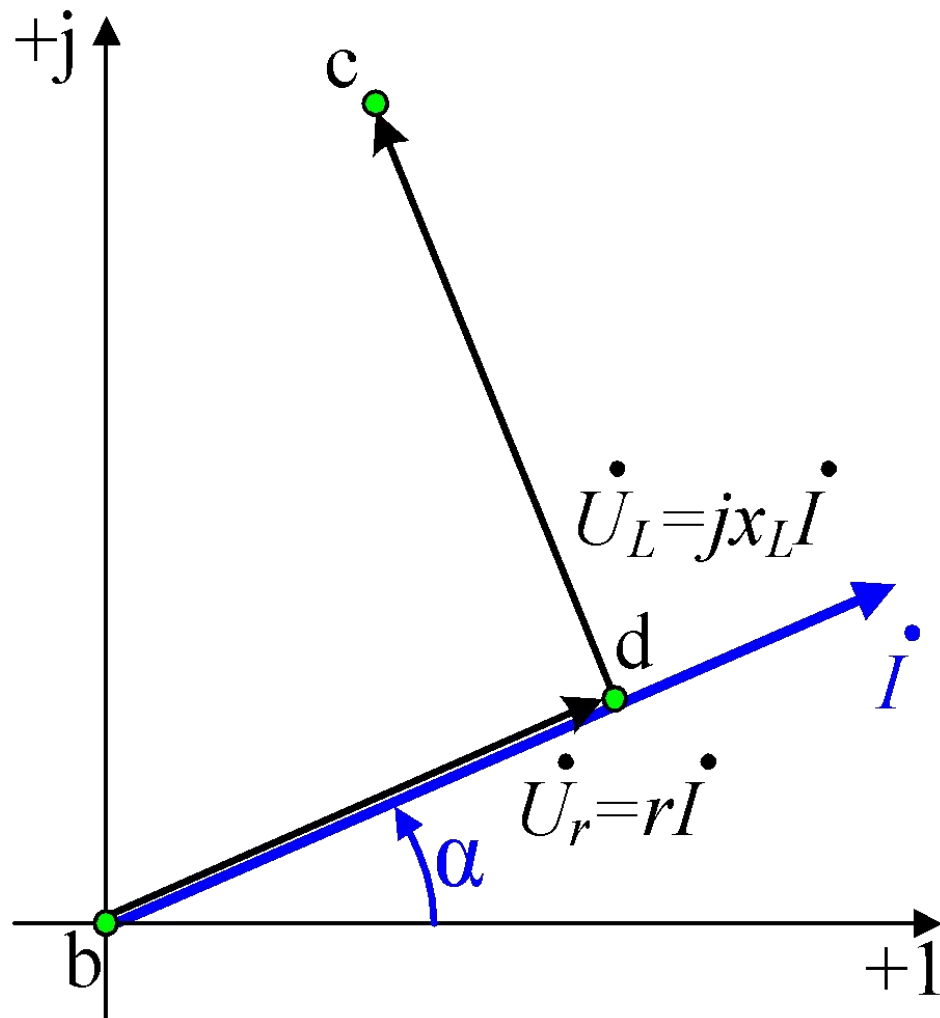
Общей величиной для всех элементов является ток I . Поэтому вектор тока на данной диаграмме является исходным или базовым.



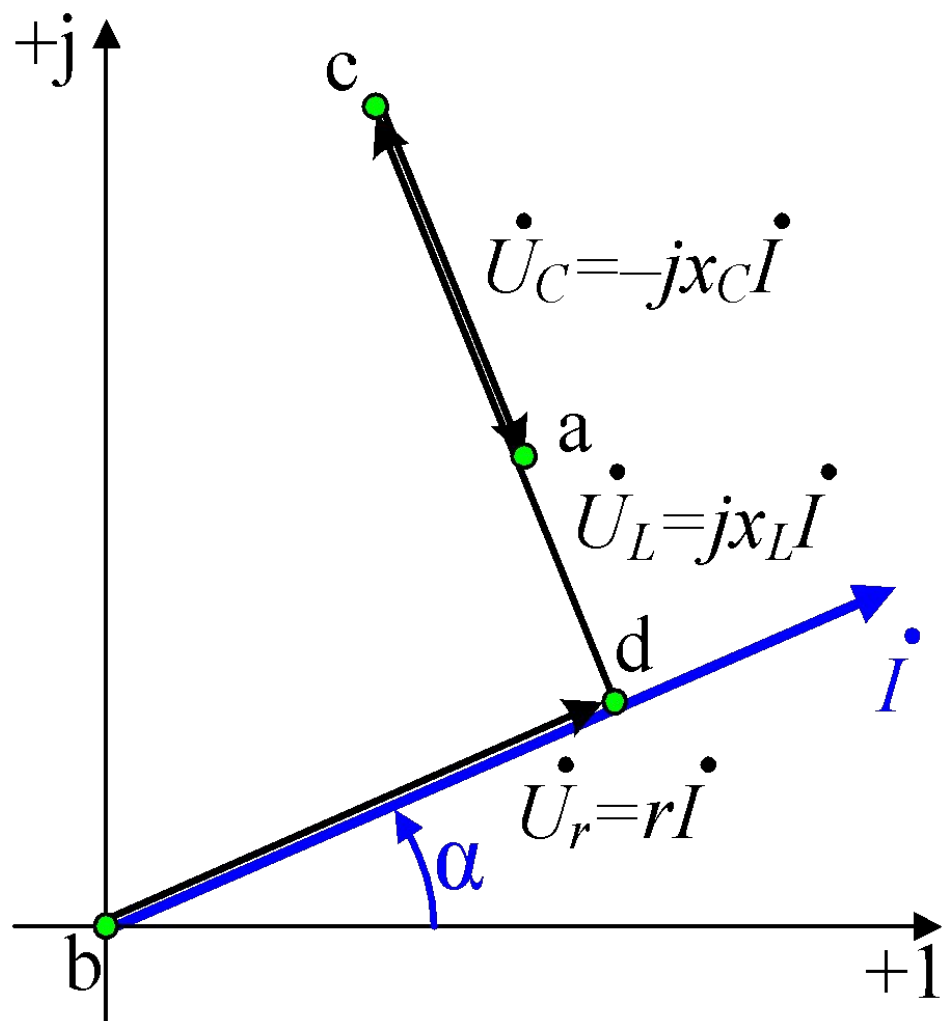
Векторы падений
напряжения
ориентированы
относительно вектора
тока с учетом фазовых
соотношений для
элементов r , L и C .

В сопротивлении r
напряжение и ток
совпадают по фазе.

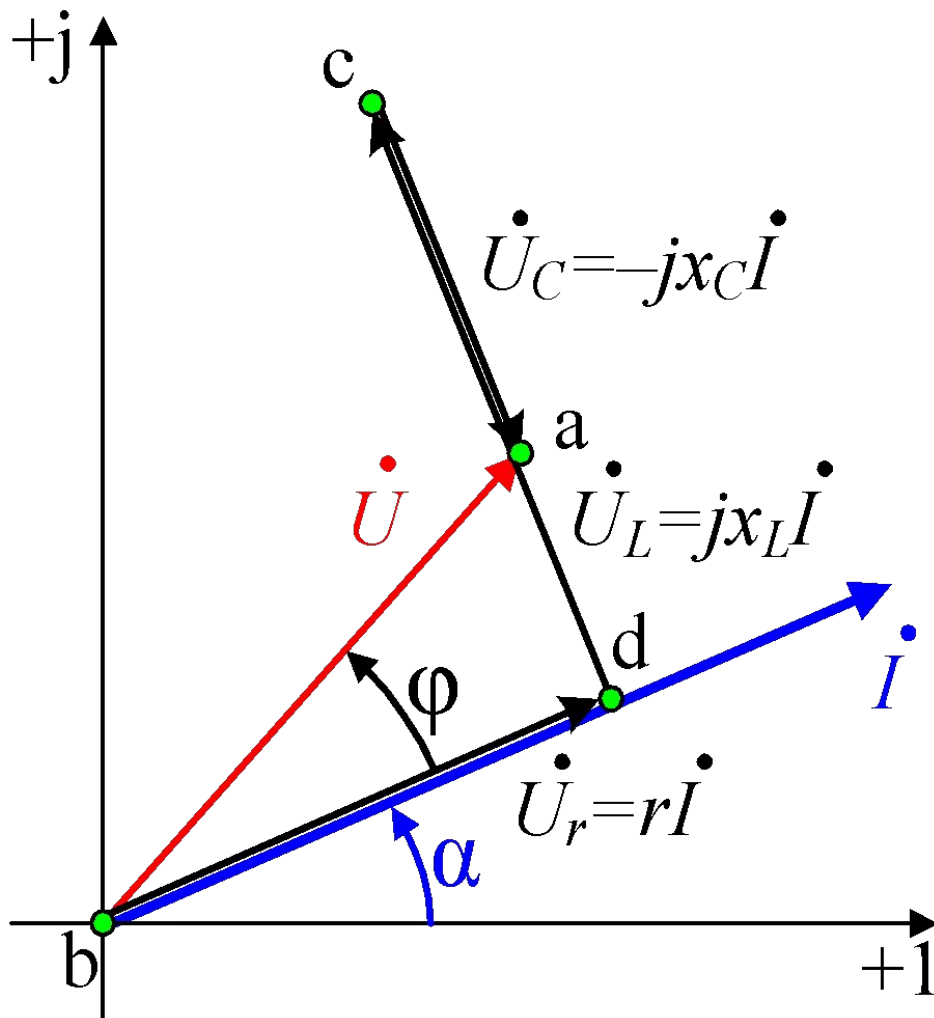




В индуктивности
напряжение опережает
ток на 90° .



В емкости напряжение
отстает от тока на 90° .



Направление обхода контура выбрано против тока. Векторы падений напряжения на векторной диаграмме соответствуют расположению элементов на схеме, т.е.

последовательно из точки **b** отложены векторы U_r , U_L , и U_C . Геометрическая сумма этих векторов равна приложенному напряжению U .

Векторные диаграммы такого типа называются **топографическими векторными диаграммами**.

Главная их особенность – соответствие расположения векторов падений напряжений расположению элементов на схеме.

Построенная векторная диаграмма соответствует случаю, когда индуктивное сопротивление x_L , равное ωL , превышает емкостное x_C , равное $1/(\omega C)$, поэтому падение напряжения на индуктивности $U_L = x_L I$, больше падения напряжения $U_C = x_C I$, угол φ положителен, напряжение по фазе опережает ток и относительно входных зажимов схема воспринимается как активно-индуктивная.