Методы обработки экспериментальных данных

Обработка результатов косвенных измерений

Постановка задачи

Если измеряемая величина U определяется путем прямых измерений некоторых величин $x, y, \ldots$, значения которых связаны с U функциональной зависимостью $U = f(x, y, \ldots)$, то действительное значение $<U>$ определяется как:

$$<U> = f(<x>, <y>, \ldots)\,. \qquad (1)$$

Приращение функции $\Delta_k U$, обусловленное изменением одного из аргументов, например x, находится как:

$$\Delta_x U = f(<x> + \Delta x, <y>, \ldots) - f(<x>, <y>, \ldots)\,. \qquad (2)$$

Если Δx - мало, то в интервале $[<x> - \Delta x, <x> + \Delta x]$ функцию $U = f(x)$ можно считать линейной и положить, что:

$$\Delta_x U \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Delta x\,. \qquad (3)$$

Постановка задачи

Полная погрешность ΔU косвенных измерений U рассчитывается либо с путем квадратичного суммирования, либо суммированием по модулю ее составляющих, вносимых каждым аргументом:

$$\Delta U = \sqrt{(\Delta_x)^2 + (\Delta_y)^2 + \ldots} \qquad (4)$$

$$\Delta U = \left|\Delta_x\right| + \left|\Delta_y\right| + \ldots \qquad (5)$$

Возможны два способа обработки косвенных измерений. Либо путем вычисления производных, либо путем расчета приращений измеряемой величины по ее аргументам.

В наиболее простых случаях расчет погрешности можно выполнить сложением абсолютных величин погрешностей, используя таблицу формул погрешностей косвенных измерений.

Таблица формул погрешностей косвенных измерений

Функциональная связь	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$u = x + y$	$\Delta u = \Delta x + \Delta y$	$\delta u = (\Delta x + \Delta y)/(x + y)$
$u = x - y$	$\Delta u = \Delta x + \Delta y$	$\delta u = (\Delta x + \Delta y)/(x - y)$
$u = xy$	$\Delta u = y\Delta x + x\Delta y$	$\delta u = \delta x + \delta y$
$u = x/y$	$\Delta u = u\delta u$	$\delta u = \delta x + \delta y$
$u = x^n$	$\Delta u = u\delta u$	$\delta u = n\delta x$
$u = \sqrt[n]{x}$	$\Delta u = u\delta u$	$\delta u = \delta x/n$
$u = e^x$	$\Delta u = u\Delta x$	$\delta u = \Delta x$
$u = \ln(x)$	$\Delta u = \delta x$	$\delta u = \delta x/u$
$u = \sin(x)$	$\Delta u = \cos(x)\Delta x$	$\delta u = ctg(x)\Delta x$
$u = \cos(x)$	$\Delta u = \sin(x)\Delta x$	$\delta u = tg(x)\Delta x$
$u = tg(x)$	$\Delta u = \Delta x/\cos^2(x)$	$\delta u = 2\Delta x/\sin(2x)$
$u = ctg(x)$	$\Delta u = \Delta x/\sin^2(x)$	$\delta u = 2\Delta x/\sin(2x)$

Алгоритм обработки результатов косвенных измерений

- 1. **По известной зависимости измеряемой величины от ее аргументов, значения которых найдены с помощью прямых измерений, вычислить действительное значение функции -** формула (1).
- 2. **Вычислить составляющие погрешности как приращения функции по каждому аргументу -** формула (2)

  или

  найти частные производные по всем аргументам и вычислить составляющие погрешности - формула (3).
- 3. **Вычислить полную погрешность функции -** формула (4) **или** формула (5).
- 4. **После округлений результат обработки измерений записать в форме:**

$$U = \langle U \rangle \pm \Delta U; \quad \delta = \frac{\Delta U}{\langle U \rangle} \cdot 100\%; \quad \mathrm{P}, \alpha.$$

Объединение результатов нескольких серий измерений

Если результаты M измерений представлены в виде:

$$x = < x_1 > \pm \Delta x_1,\ x = < x_2 > \pm \Delta x_2, \ldots x = < x_M > \pm \Delta x_M,$$

то наилучшее значение $< x >$ и его погрешность Δx вычисляются по формулам:

$$< x > = \frac{\sum_{m=1}^{M} w_m x_m}{\sum_{m=1}^{M} w_m},\ \Delta x = \left(\sum_{m=1}^{M} w_m \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где $w_m = \dfrac{1}{(\Delta x)^2}$ - статистический вес каждой серии измерений.

Пример обработки результатов косвенных измерений

- Прямыми измерениями найдены значения массы m, радиуса R, и линейной скорости V равномерного вращения по окружности материальной точки. Необходимо оценить значение центробежной силы F, действующей на материальную точку.
- m=310±6 г; R=104±5 мм; V=30±1 м/с.

$$F = \frac{mV^2}{R}$$

Алгоритм, использующий вычисление производных измеряемой величины по ее аргументам

- Вычисляем среднее значение силы

$$\langle F \rangle = \frac{\langle m \rangle \cdot \langle v \rangle^2}{\langle R \rangle} = \frac{0.31 \cdot 30^2}{0.104} = 2683\,\text{Н} \approx 2.68\,\text{кН}.$$

- Находим частные производные и вычисляем их значения при средних значениях аргументов

$$\frac{\partial F}{\partial m} = \frac{\langle v \rangle^2}{\langle R \rangle} = \frac{30^2}{104} = 8.65\,\frac{\text{Н}}{\text{г}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial R} = -\frac{\langle m \rangle \cdot \langle v \rangle^2}{\langle R \rangle^2} = -\frac{310 \cdot 30^2}{104^2} = -25.8\,\frac{\text{Н}}{\text{мм}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{2 \cdot \langle m \rangle \cdot \langle v \rangle}{\langle R \rangle} = \frac{2 \cdot 310 \cdot 30}{104} = 179\,\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$$

Алгоритм, использующий вычисление производных измеряемой величины по ее аргументам

- Вычисляем составляющие погрешности от каждого аргумента

$$\Delta F_m = \left|\frac{\partial F}{\partial m}\right| \cdot \Delta m = 8.65 \cdot 6 = 51.9\ \text{Н},$$

$$\Delta F_R = \left|\frac{\partial F}{\partial R}\right| \cdot \Delta R = 25.8 \cdot 5 = 129\ \text{Н},$$

$$\Delta F_v = \left|\frac{\partial F}{\partial v}\right| \cdot \Delta v = 179 \cdot 1 = 179\ \text{Н}.$$

Алгоритм, использующий вычисление производных измеряемой величины по ее аргументам

- Вычисляем полную погрешность
  абсолютную

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_m{}^2 + \Delta F_R{}^2 + \Delta F_v{}^2} =$$

$$= \sqrt{51.9^2 + 129^2 + 179^2} = 227\ \text{Н} \approx 0.2\ \text{кН}$$

относительную

$$\delta F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} = \frac{0.2}{2.7} = 7\%$$

- После округления записываем результат косвенных измерений

$$F = 2.7 \pm 0.2\ \text{кН}, \qquad \delta F = 7\% .$$

Алгоритм, использующий вычисление приращений измеряемой величины по ее аргументам

- Вычисляем среднее значение силы

$$\langle F \rangle = \frac{\langle m \rangle \cdot \langle v \rangle^2}{\langle R \rangle} = \frac{0.31 \cdot 30^2}{0.104} = 2683\,\text{Н} \approx 2.68\,\text{кН}$$

- Вычисляем приращения функции по её аргументам

$$\Delta F_m = \left| F(m + \Delta m, R, v) - F(m, R, v) \right| = \left| \frac{(0.31 + 0.006) \cdot 30^2}{0.104} - 2683 \right| = 51.6\,\text{Н}$$

$$\Delta F_m = \left| F(m, R + \Delta R, v) - F(m, R, v) \right| = \left| \frac{0.31 \cdot 30^2}{0.104 + 0.005} - 2683 \right| = 123\,\text{Н},$$

$$\Delta F_m = \left| F(m, R, v + \Delta v) - F(m, R, v) \right| = \left| \frac{0.31 \cdot (30 + 1)^2}{0.104} - 2683 \right| = 182\,\text{Н}.$$

Алгоритм, использующий вычисление приращений измеряемой величины по ее аргументам

- Вычисляем полную погрешность

  абсолютную

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_m^{\;2} + \Delta F_R^{\;2} + \Delta F_v^{\;2}} =$$

$$= \sqrt{51.6^2 + 123^2 + 182^2} = 226\ \text{Н} \approx 0.2\ \text{кН}$$

  относительную

$$\delta F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} = \frac{0.2}{2.7} = 7\%$$

- После округления записываем результат косвенных измерений

$$F = 2.7 \pm 0.2\ \text{кН}, \qquad \delta F = 7\%\ .$$

Алгоритм, использующий сложение абсолютных величин погрешностей

- Вычисляем среднее значение силы

$$\langle F\rangle = \frac{\langle m\rangle \cdot \langle v\rangle^2}{\langle R\rangle} = \frac{0.31 \cdot 30^2}{0.104} = 2683\,\text{Н} \approx 2.68\,\text{кН}$$

- Вычисляем относительные погрешности аргументов

$$\delta m = \frac{\Delta m}{\langle m\rangle} = \frac{6}{310} = 0.019 \approx 2\%$$

$$\delta R = \frac{\Delta R}{\langle R\rangle} = \frac{5}{104} = 0.048 \approx 5\%$$

$$\delta v = \frac{\Delta v}{\langle v\rangle} = \frac{1}{30} = 0.033 \approx 3\%$$

Алгоритм, использующий сложение абсолютных величин погрешностей

- Вычисляем относительную погрешность функции по формулам таблицы погрешностей косвенных измерений

$$\delta F = \delta m + \delta R + 2 \cdot \delta v = 2 + 5 + 2 \cdot 3 = 13\%$$

- Вычисляем абсолютную погрешность функции

$$\Delta F = \langle F \rangle \cdot \delta F = 2.68 \cdot 0.13 = 0.349 \text{ Н}$$

- После округления записываем результат косвенных измерений

$$F = 2.7 \pm 0.3 \text{ кН}, \qquad \delta F = 11\% \ .$$

Пример объединения результатов прямых измерений

В трех различных условиях измерено сопротивление одного и того же проводника. Результаты измерений представлены в виде:

$$R_1 = 11 \pm 2 \text{ Ом.}$$

$$R_2 = 12 \pm 2 \text{ Ом.}$$

$$R_1 = 10 \pm 3 \text{ Ом.}$$

Необходимо объединить эти измерения.

- Находим статистический вес (вклад) каждого измерения

$$w_1 = \frac{1}{\Delta R_1^2} = \frac{1}{2^2} = 0.25 \; 1/\text{Ом}^2 \, ,$$

$$w_2 = \frac{1}{\Delta R_2^2} = \frac{1}{2^2} = 0.25 \quad 1/\text{Ом}^2 \, ,$$

$$w_3 = \frac{1}{\Delta R_3^2} = \frac{1}{3^2} = 0.11 \quad 1/\text{Ом}^2 \, .$$

Пример объединения результатов прямых измерений

- Находим новую оценку сопротивления

$$\langle R\rangle = \frac{\langle R_1\rangle \cdot w_1 + \langle R_2\rangle \cdot w_2 + \langle R_3\rangle \cdot w_3}{w_1 + w_2 + w_3} =$$

$$= \frac{11 \cdot 0.25 + 12 \cdot 0.25 + 10 \cdot 0.11}{0.25 + 0.25 + 0.11} = 11.2 \text{ Ом.}$$

- Находим новую оценку погрешности

$$\Delta R = \frac{1}{\sqrt{w_1 + w_2 + w_3}} = \frac{1}{\sqrt{0.25 + 0.25 + 0.11}} = 1.28 \text{ Ом}$$

- Результат совместной оценки сопротивления

$$R = 11 \pm 1 \text{ Ом.}$$

Задание для самостоятельной работы

Пусть прямыми измерениями найдены значения элементов последовательного колебательного контура. Активного сопротивления $R = 10 \pm 1$ Ом. Индуктивности $L = 30.0 \pm 1.5$ мГ. Емкости $C = 100 \pm 2$ мкФ. В контуре возбуждены вынужденные колебания на частоте $\omega = 1000$ рад/с. Амплитуда источника ЭДС $\mathrm{E} = 10$ В. Связь между амплитудой тока и параметрами элементов контура определяется соотношением:

$$I(R, L, C) = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}}.$$

Амплитуда ЭДС E и частота ω измерены с большой точностью и могут рассматриваться как константы.