Арифметический корень натуральной степени

Сегодня на уроке

1. Узнаем, что подразумевается под понятием «арифметический корень натуральной степени».

2. Познакомимся с корнем нечётной степени из отрицательного числа.

3. Рассмотрим некоторые свойства арифметического корня n-й степени.

Как называют число, квадрат которого равен a?

А квадратный корень из числа a

В квадрат из числа a

Б степень из числа a

Г кубический корень из числа a

Как называют число, квадрат которого равен a?

А квадратный корень из числа a

В квадрат из числа a

Б степень из числа a

Г кубический корень из числа a

Чему равно значение выражения $\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{11+4\sqrt{7}}}$?

А 1

В $\sqrt{7}$

Б $4\sqrt{7}$

Г $5+\sqrt{7}$

Чему равно значение выражения $\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{11+4\sqrt{7}}}$?

А 1

В $\sqrt{7}$

Б $4\sqrt{7}$

Г $5+\sqrt{7}$

Какое из значений выражений больше?

А $2\sqrt{5}$

Б $\sqrt{21}$

В $\sqrt{2}$

Г $5\sqrt{2}$

Какое из значений выражений больше?

А $2\sqrt{5}$

Б $\sqrt{21}$

В $\sqrt{2}$

Г $5\sqrt{2}$

Вспомним

Квадратным корнем из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, квадрат которого равен a.

$$\sqrt{a} = x,$$
$$x^2 = a,$$
$$x \geq 0, a \geq 0$$

Аналогично определяется корень n-й степени из числа a, где n – произвольное натуральное число.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$x^4 = 625$$

$$x^4 - 625 = 0$$

$$(x^2 - 25)(x^2 + 25) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 25 = 0 \\ x^2 + 25 = 0 \end{array}\right.$$

Уравнение $x^2 + 25 = 0$ не имеет решения на множестве действительных чисел.

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

$$x - 5 = 0 \qquad x + 5 = 0$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = -5$$

$$x^4 = 625$$

корни 4-й степени из числа 625

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -5$$

арифметический корень 4-й степени из числа 625

$\sqrt[4]{625}$

$$\sqrt[4]{625} = 5$$

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a

называется неотрицательное число,
n-я степень которого равна a.

показатель корня

знак арифметического квадратного корня (радикал)

$$\sqrt[n]{a}$$

подкоренное выражение

Арифметический корень n-й степени

Корень второй степени,
или квадратный корень из числа:

$n = 2$

$\sqrt{a}$

Корень третьей степени,
или кубический корень из числа:

$n = 3$

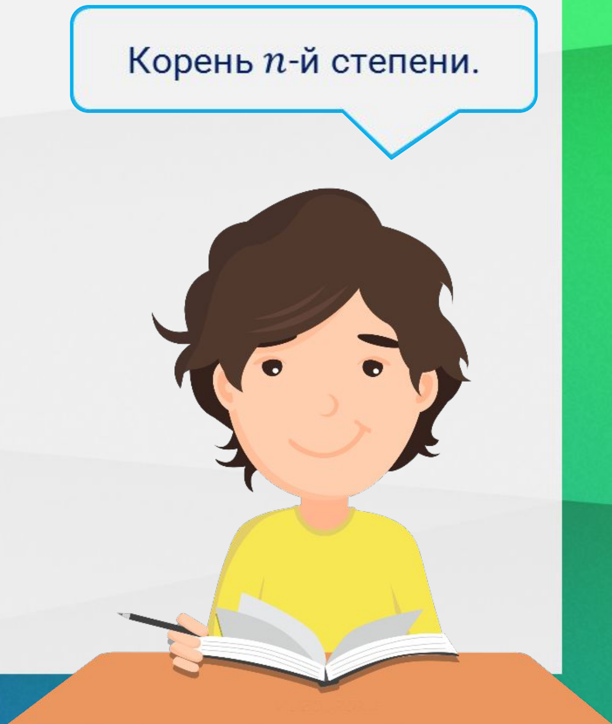
$\sqrt[3]{a}$

Арифметический корень n-й степени

$\sqrt[n]{a}$

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени, называется извлечением корня n-й степени.

Это действие является обратным действию возведения в n-ю степень.



Арифметический корень n-й степени

Равенство $\sqrt[n]{a} = b$ при $a \geq 0$ верно, когда выполняются два условия:

1) $b \geq 0$;
2) $b^n = a$.

$\sqrt[3]{27} = 3$

1) $3 > 0$;
2) $3^3 = 27$.

Из определения арифметического корня следует, что если $a \geq 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

$\left(\sqrt[5]{9}\right)^5 = 9$

$\left(\sqrt[7]{19}\right)^7 = 19$

$$x^3 = 64$$

$$x^3 - 64 = 0$$

$$(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = 0$$

$$(x - 4)\left((x + 2)^2 + 12\right) = 0$$

$$(x + 2)^2 + 12 \neq 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$4 > 0$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$x^3 = -64$$

$$x^3 + 64 = 0$$

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = 0$$

$$(x + 4)\left((x - 2)^2 + 12\right) = 0$$

$$(x - 2)^2 + 12 \neq 0$$

$$x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

$$-4 < 0$$

Число -4 является корнем третьей степени из числа -64, однако это число не является арифметическим корнем по определению.

Число -4 называют корнем кубическим из числа -64.

$$\sqrt[3]{-64} = -4$$

$$a^3 + (a + b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$$

Корень нечётной степени из отрицательного числа

Для любого нечётного натурального числа $\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$ уравнение $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}=\boldsymbol{a}$ при $a<0$ имеет только один корень, причём отрицательный.

$\sqrt[2k+1]{a}$

Запомните!

При нечётном n существует $\sqrt[n]{a}$, и притом только один.

Для корней нечётной степени справедливо равенство:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$$

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Корень нечётной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a = |a|$ следующим равенством:

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$$

$$\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$$

Свойства арифметического корня n-й степени

При условии, что $a \geq 0$, $b > 0$,
а n, m и k – натуральные числа,
причём $n \geq 2, m \geq 2$, справедливы равенства:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
(число b может также быть равным 0)

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
(число m может быть любым целым, если $a > 0$)

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

5. $\sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Свойства арифметического корня n-й степени

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

По определению арифметического корня $\sqrt[n]{ab}$ – это такое неотрицательное число, n-я степень которого равна ab.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0;$

$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$

$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0;\ \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$

3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

$(\sqrt[n]{a})^m \geq 0;$

$\left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^{nm} = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^m = a^m.$

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \geq 0;$

$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a.$

5. $\sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

$\sqrt[n]{a^m} \geq 0;$

$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = a^{mk}.$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

Задание № 1

Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{343}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$; в) $\sqrt[5]{-3125}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{343} = 7$;

$7 > 0$;

$7^3 = 343$;

б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2}$;

$\frac{3}{2} > 0$;

$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$;

в) $\sqrt[5]{-3125} = -\sqrt[5]{3125} = -5$.

$$\sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Задание № 2

Преобразуйте выражения:

а) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$;   б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$;   в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$;   г) $\sqrt[21]{128}$.

Решение:

а) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8 \cdot 4} = \sqrt[5]{32} = 2$;

б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$;

в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$;

г) $\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[7 \cdot 3]{2^7} = \sqrt[3]{2}$.

Итоги урока

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a

называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Запомните!

При нечётном n существует $\sqrt[n]{a}$, и притом только один.

Для корней нечётной степени справедливо равенство:

$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

Корень нечётной степени из отрицательного числа a связан с арифметическим корнем из числа $-a = |a|$ следующим равенством:

$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{|a|}$

Свойства арифметического корня n-й степени

При условии, что $a \geq 0, b > 0$,
а n, m и k – натуральные числа,
причём $n \geq 2, m \geq 2$, справедливы равенства:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.
5. $\sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a

Свойства арифметического корня n-й степени

При условии, что $a \geq 0, b > 0$,
а n, m и k – натуральные числа,
причём $n \geq 2, m \geq 2$, справедливы равенства:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.
5. $\sqrt[kn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.