ГЕОМЕТРИЯ

Разложение вектора по базису

Рассмотрим два важных векторно-геометрических факта:

• если точка O не лежит на прямой AB, то точка M лежит на этой прямой тогда и только тогда, когда выполняется векторное равенство $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$ при условии, что $x + y = 1$;

• если точка O не лежит в плоскости ABC, то точка M лежит в этой плоскости тогда и только тогда, когда выполняется векторное равенство $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$ при условии, что $x + y + z = 1$.

Если точка K лежит в плоскости ABC, то справедливо $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Пусть M — любая точка пространства, не принадлежащая плоскости ABC (рис. 105). Тогда из последнего равенства получаем:

$$\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MA} = x(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) + y(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) =$$
$$= -(x+y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MK} = (1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}.$$

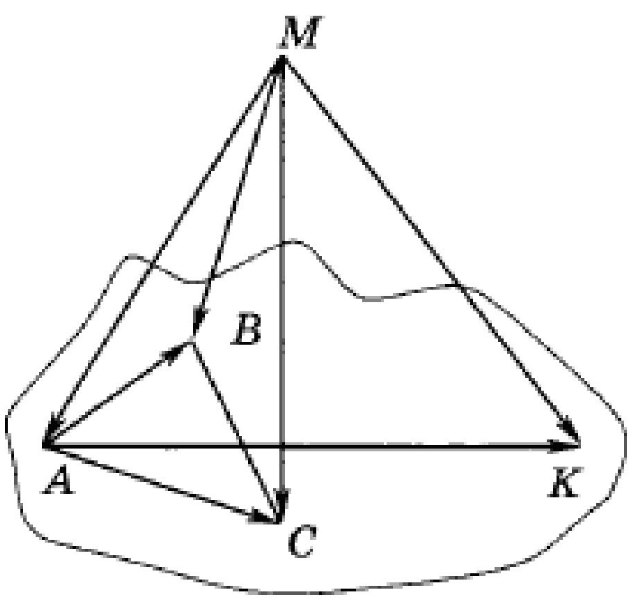


Рис. 105

Если обозначить $\alpha = 1 - x - y$, $\beta = x$, $\gamma = y$, то следует:

$$\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} \text{ при } \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Оказывается справедливо обратное утверждение: если M — любая точка пространства, не принадлежащая плоскости ABC, и справедливо $\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ при $\alpha + \beta + \gamma = 1$, то точка K лежит в плоскости ABC.

В самом деле, из векторного равенства

$$\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$$

получаем:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = (\alpha + \beta + \gamma - 1)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} =$$
$$= \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC},$$

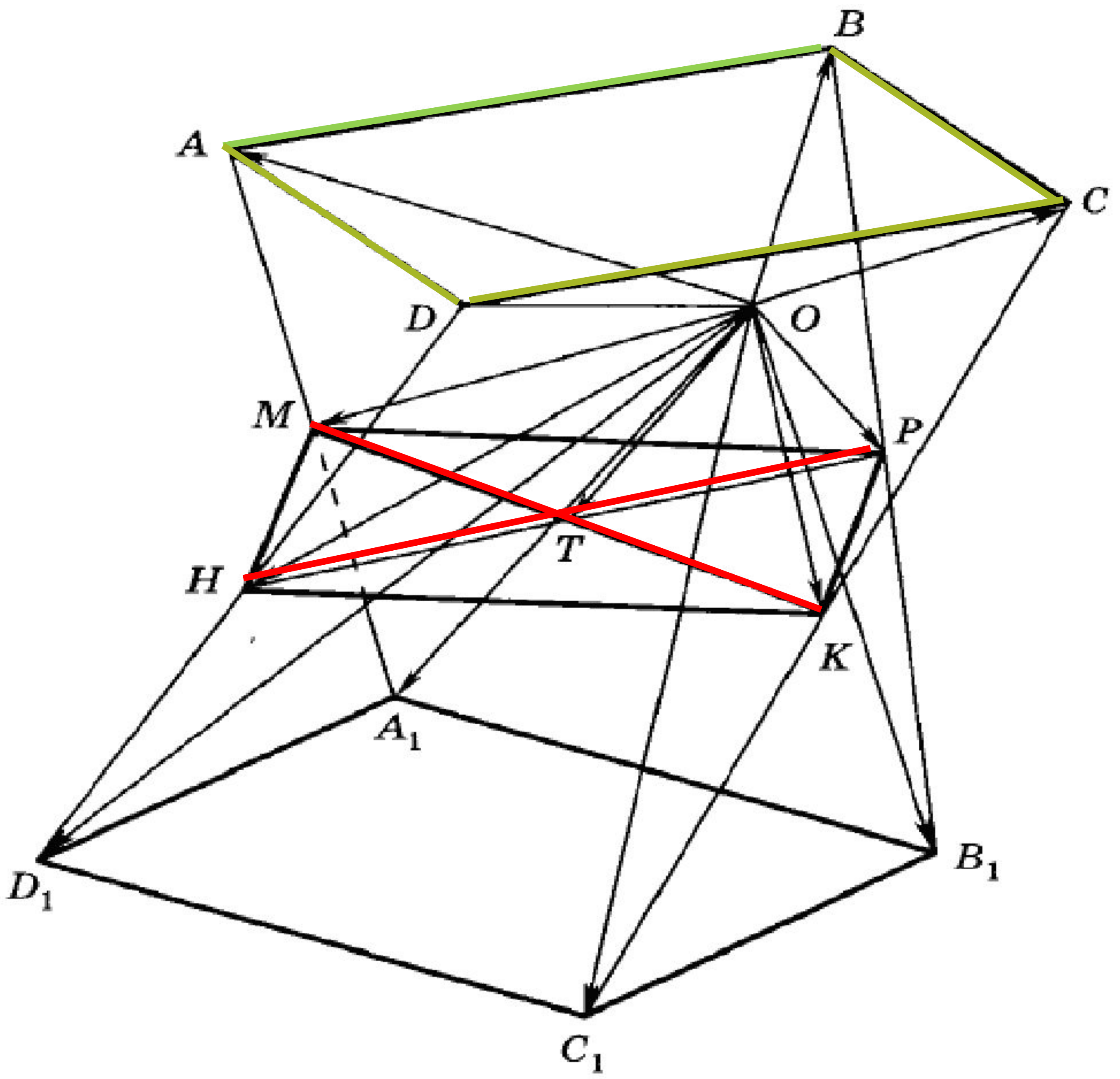
т. е. векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ компланарны. А так как эти векторы отложены от одной точки, то точка K лежит в плоскости ABC.

Таким образом, для любой точки M, не принадлежащей плоскости ABC, равенство $\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ (при $\alpha + \beta + \gamma = 1$) справедливо тогда и только тогда, когда точка K лежит в плоскости треугольника ABC.

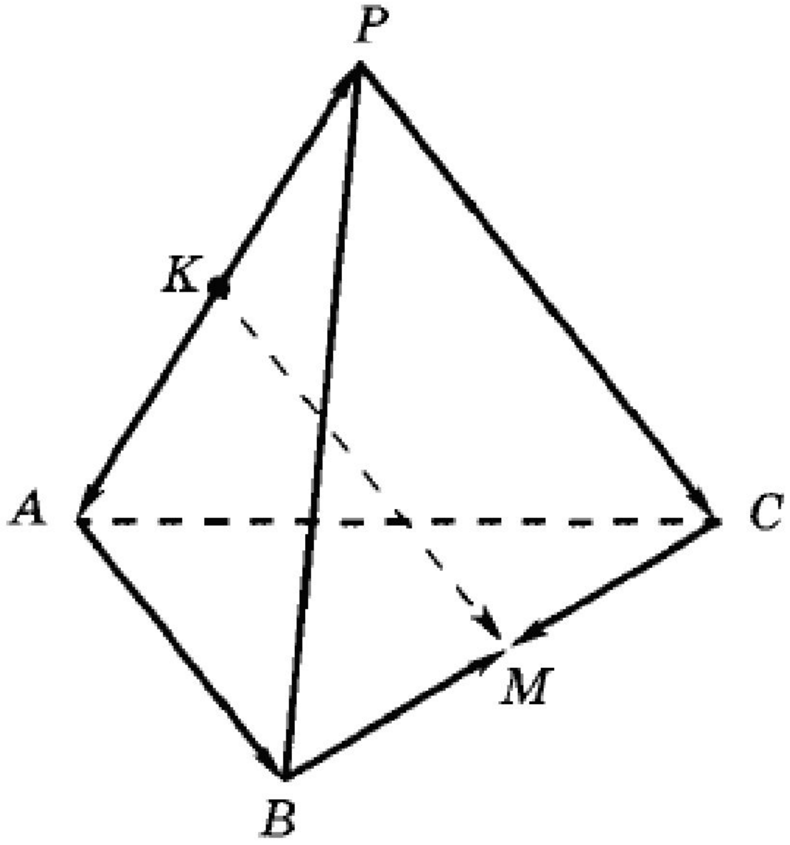
Можно доказать, что если в равенстве $\overrightarrow{MK} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ выполняется: $\alpha + \beta + \gamma > 1$, то точки M и K разделены плоскостью ABC; если $\alpha + \beta + \gamma < 1$, то точки M и K не разделены плоскостью ABC. Причем если прямая MK пересекает (ABC) в точке P, при этом $\alpha + \beta + \gamma = m$, то $MP : PK = 1 : (m - 1)$ при $m > 1$ и $MK : KP = m : (1 - m)$ при $0 < m < 1$.

Кроме того, точка P лежит внутри треугольника ABC при условии, если все коэффициенты α, β и γ положительны.

6.046. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки M, P, K и H — середины отрезков соответственно AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Докажите, что отрезки MK и PH пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.


B
A
C
D
O
M
P
T
H
K
A_1
D_1
B_1
C_1

6.047. В тетраэдре $PABC$ точки K и M — середины ребер соответственно PA и BC. Докажите, что прямые AB, KM и PC параллельны некоторой (одной) плоскости.



6.048. Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны, точка K лежит в плоскости треугольника ABC. Найдите значение числа x, если: а) $\overrightarrow{MK} = 0{,}1\overrightarrow{MA} + 0{,}4\overrightarrow{MB} + x\overrightarrow{MC}$; б) $\overrightarrow{MK} = 7\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + 0{,}38\overrightarrow{MC}$.

6.057. На продолжении ребер MA, MB и MC правильного тетраэдра $MABC$ взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 такие, что A — середина MA_1, $MB_1 = 3MB$ и $MC_1 = 1{,}5MC$. K — центроид (точка пересечения медиан) треугольника $A_1B_1C_1$. а) Разложите вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$. б) В каком отношении плоскость ABC делит отрезок MK, считая от M? в) Найдите расстояние от точки K до плоскости ABC, если ребро тетраэдра равно a.