

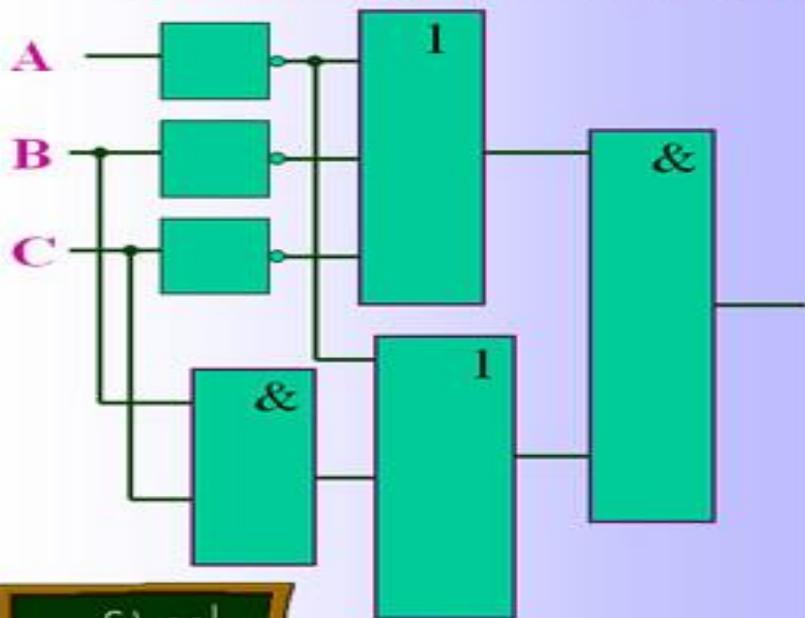
Введение в математическую логику и теорию множеств

7-8 классы

Галанова Наталия Юрьевна
Доцент ТГУ,
Механико- Математический
Факультет

Применение математической логики в радиотехнике, робототехнике, программировании для создания и упрощения схем и алгоритмов

ИСХОДНАЯ
ЛОГИЧЕСКАЯ СХЕМА



УПРОЩЕННАЯ
ЛОГИЧЕСКАЯ
СХЕМА



РЕШЕНИЕ:

$$\begin{aligned} & (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \cdot (\bar{A} \vee B \cdot C) = \\ & = (\bar{A} \vee \overline{B \cdot C}) \cdot (\bar{A} \vee B \cdot C) = \\ & = \bar{A} \vee \overline{B \cdot C} \cdot B \cdot C = \bar{A} \vee 0 = \\ & = \bar{A} \end{aligned}$$



Изучим и докажем законы алгебры высказываний

Законы алгебры логики и свойства логических операций используются для упрощения логических выражений (*минимизации логических функций*)

$$\begin{aligned}A \wedge \bar{A} &= 0 \\A \wedge A &= A \\A \wedge 1 &= A \\A \wedge 0 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \vee \bar{A} &= 1 \\A \vee A &= A \\A \vee 1 &= 1 \\A \vee 0 &= A\end{aligned}$$

Формулы склеивания:

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) &= A \\(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) &= A\end{aligned}$$

Законы инверсии (де Моргана):

$$\begin{aligned}\overline{A \vee B} &= \bar{A} \wedge \bar{B} \\ \overline{A \wedge B} &= \bar{A} \vee \bar{B}\end{aligned}$$

Формулы поглощения:

$$\begin{aligned}A \vee (A \wedge B) &= A \\A \wedge (A \vee B) &= A \\A \vee (\bar{A} \wedge B) &= A \vee B \\A \wedge (\bar{A} \vee B) &= A \wedge B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{0} &= 1 \\ \bar{1} &= 0\end{aligned}$$

Закон двойного отрицания:

$$\overline{\bar{A}} = A$$

Переместительный закон:

$$\begin{aligned}A \vee B &= B \vee A \\A \wedge B &= B \wedge A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{(A \rightarrow B)} &= \bar{A} \& \bar{B} \\A \rightarrow B &= \bar{A} \vee B\end{aligned}$$

Сочетательный закон:

$$\begin{aligned}(A \vee B) \vee C &= A \vee (B \vee C) \\(A \wedge B) \wedge C &= A \wedge (B \wedge C)\end{aligned}$$

$$\bar{A} \& (A \vee B) = \bar{A} \& B$$

$$\begin{aligned}A \leftrightarrow B &= (A \& B) \vee (\bar{A} \& \bar{B}) \\ &= (\bar{A} \vee B) \& (A \vee \bar{B})\end{aligned}$$

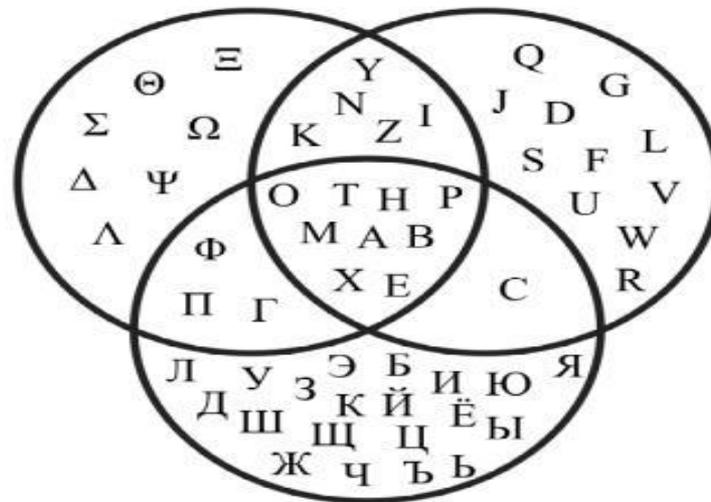
MyShared

$$A \vee (A \& B) = A \vee B$$

Познакомимся с операциями над множествами и схемами Эйлера-Вена



Пример. Диаграмма Вена которая демонстрирует пересечение заглавных букв русского, латинского и греческого алфавитов.



Изучим числовые множества

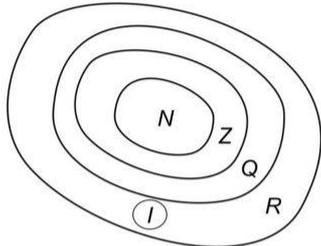


ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Числовые множества



Множества, элементами которых являются числа, называются **числовыми**.



Обозначение:

N – множество **натуральных** чисел;

Z – множество **целых** чисел;

Q – множество **рациональных** чисел;

I – множество **иррациональных** чисел;

R – множество **действительных** чисел.

Примеры: $N = \{5; 6; 7; 8; \dots\}$

$$Q = \left\{ \frac{4}{5}; 2\frac{5}{7}; -4; \dots \right\}$$

$$Z = \{\pm 4; \pm 5; \pm 6; \pm 7; \dots\}$$

$$R = \left\{ \sqrt{5}; 2,5; -13; \frac{1}{3}; \dots \right\}$$

Целые числа

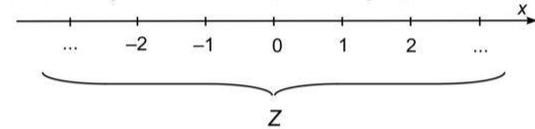


Целые числа – это натуральные числа, им противоположные и ноль.

$$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$$

$\{0; 1; 2; 3; \dots\}$ – множество **целых неотрицательных** чисел.

$\{-1; -2; -3; -4; \dots\}$ – множество **целых отрицательных** чисел.



С помощью целых чисел удобно описывать изменение количества каких-либо предметов. Знак целого числа будет показывать направление изменения (уменьшилось количество («-») или увеличилось («+»)). Число 0 – количество предметов не изменилось.

Натуральные числа



Числа, употребляемые при счёте, называются **натуральными**.

$$N = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$$

Наименьшим натуральным числом является 1.

Следует различать **цифры** и **числа**. **Цифры** – это единицы счёта, знаки.

Цифры: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Числа состоят из цифр.

Свойства сложения и умножения натуральных чисел:

- $a + b = b + a$ – **переместительное** свойство **сложения**;
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ – **сочетательное** свойство **сложения**;
- $ab = ba$ – **переместительное** свойство **умножения**;
- $(ab)c = a(bc)$ – **сочетательное** свойство **умножения**;
- $a(b + c) = ab + ac$ – **распределительное** свойство **умножения относительно сложения**.
- Результатом сложения и умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число.

Рациональные числа



Числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называются **рациональными**.

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \right\}$ – множество рациональных чисел.

$$Q = \left\{ \frac{3}{5}; \frac{2}{4}; \frac{1}{7}; \frac{6}{7}; 2; -3; 1\frac{2}{13}; \dots \right\}$$



• Дробь $\frac{m}{n}$ называется **правильной**, если её числитель меньше знаменателя, и **неправильной**, если её числитель больше знаменателя или равен ему.

$$\frac{1}{4} \text{ – правильная дробь; } \frac{6}{5} \text{ – неправильная дробь.}$$

• Неправильную дробь можно представить в виде суммы натурального числа и правильной дроби.

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}; \quad \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}.$$

• Каждое рациональное число $\frac{m}{n}$ можно представить в виде **конечной** или **бесконечной периодической** десятичной дроби.

Разминка

1. Сколько элементов содержит множество M нечетных двузначных чисел?

2. Составьте все подмножества множества K , если $K = \{1, 3, 8\}$.

3. Привести примеры числовых множеств A и B таких, что:

1) $A \cap B = R$,

2) $A \cap B = \emptyset$,

3) $A \cup B = A$,

4) $A \cap B = B$.

Конкурс художников

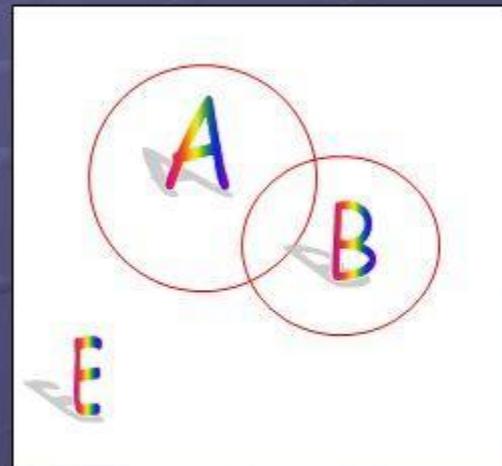
1. Множества A и B являются подмножествами E . Укажите штриховкой множества:

а) $\overline{A \cup B}$, $A \cup \overline{B}$,

б) $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$,

в) $A \cap B$, $\overline{A \cup B}$,

г) $\overline{A \cap B}$, $(\overline{A \cap B}) \cup (A \cap \overline{B})$.



2) Решите неравенства:

а) $|x - y| \leq 1$;

б) $|x| + |y| \leq 1$;

в) $|x + y| \leq 1$.