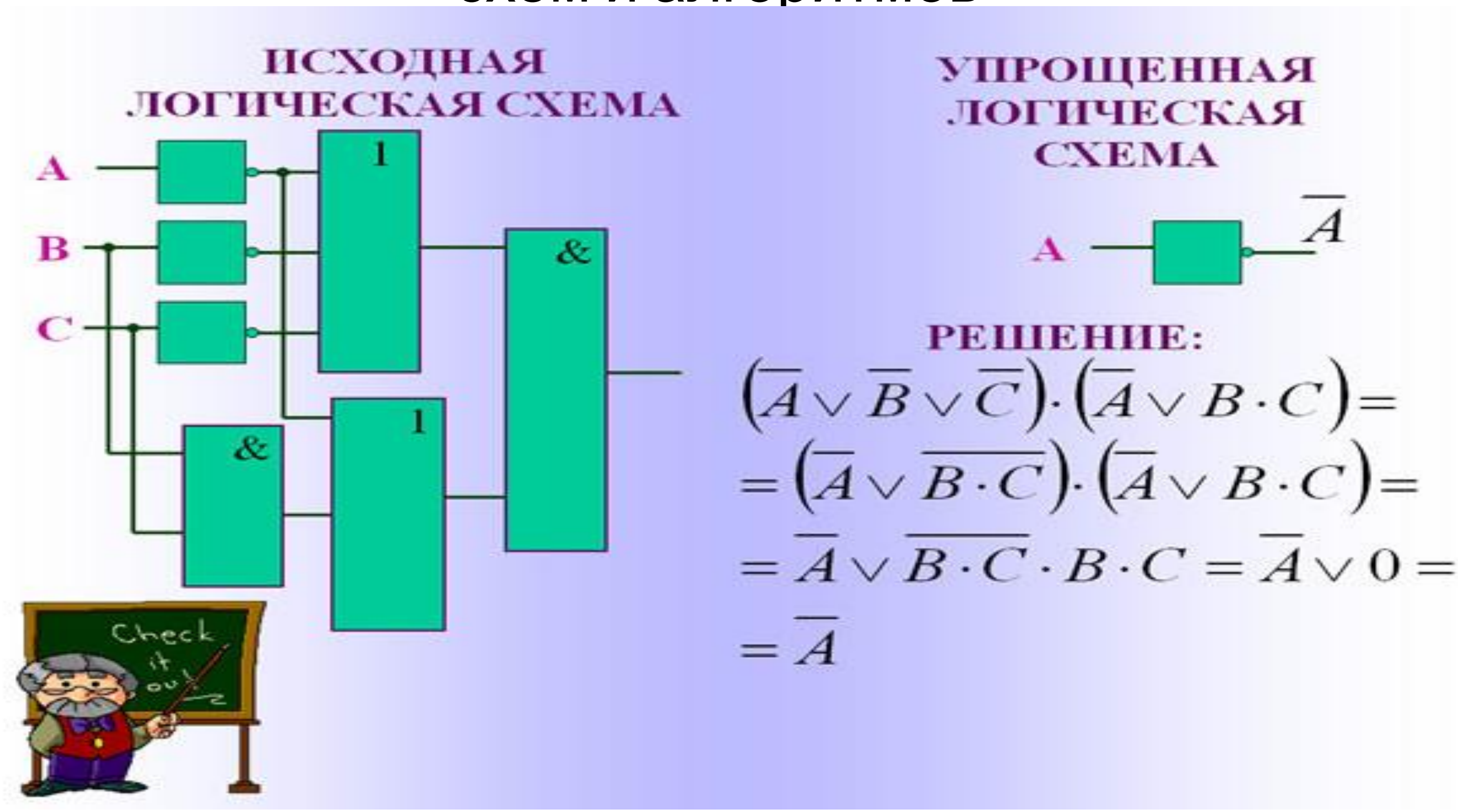
Введение в математическую логику и теорию множеств

7-8 классы

Галанова Наталия Юрьевна
Доцент ТГУ,
Механико- Математический Факультет

Применение математической логики в радиотехнике, робототехнике, программировании для создания и упрощения схем и алгоритмов



Изучим и докажем законы алгебры высказываний

Законы алгебры логики и свойства логических операций используются для упрощения логических выражений ***(минимизации логических функций)***

$A \wedge \overline{A} = 0$

$A \wedge A = A$

$A \wedge 1 = A$

$A \wedge 0 = 0$

$A \vee \overline{A} = 1$

$A \vee A = A$

$A \vee 1 = 1$

$A \vee 0 = A$

Формулы склеивания:

$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$

$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$

Законы инверсии (де Моргана):

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Формулы поглощения:

$A \vee (A \wedge B) = A$

$A \wedge (A \vee B) = A$

$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$

$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$

$\overline{0} = 1$

$\overline{1} = 0$

Закон двойного отрицания:

$\overline{\overline{A}} = A$

Переместительный закон:

$A \vee B = B \vee A$

$A \wedge B = B \wedge A$

$\overline{(A \to B)} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$

$A \to B = \overline{A} \vee B$

Сочетательный закон:

$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

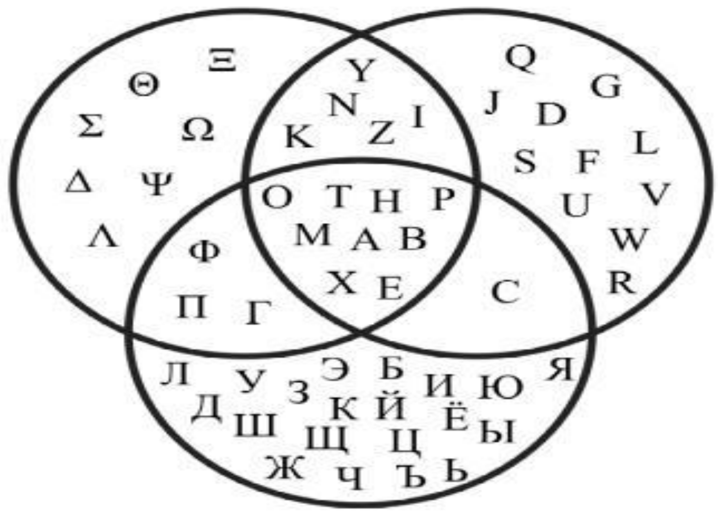
$A \leftrightarrow B = (A \& B) \vee (\overline{A} \& \overline{B})$
$= (\overline{A} \vee B) \& (A \vee \overline{B})$

$\overline{A} \,\&\, (A \vee B) = \overline{A} \,\&\, B$

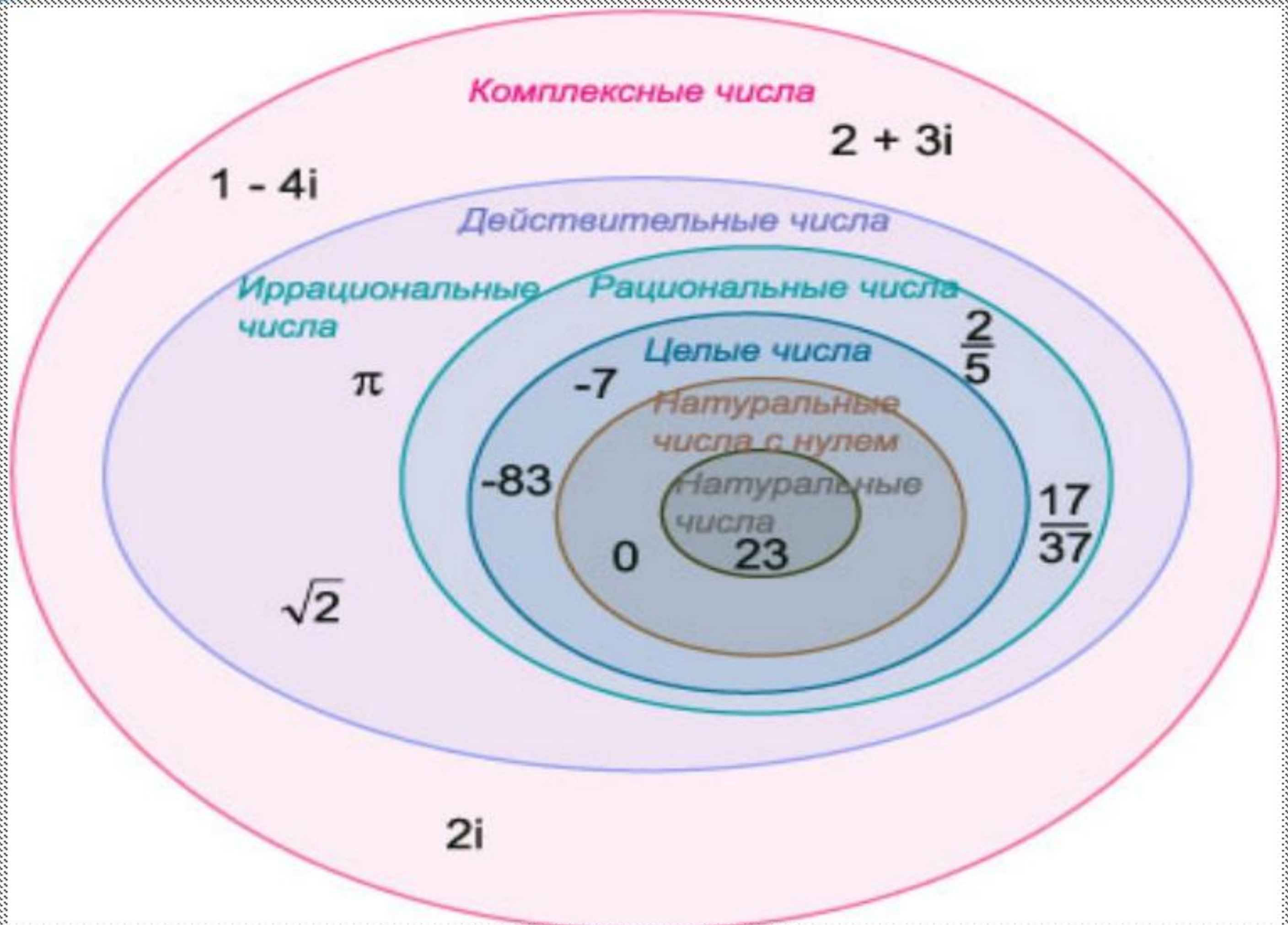
$A \vee (\overline{A} \& B) = A \vee B$

Познакомимся с операциями над множествами и схемами Эйлера-Вена

Пример. Диаграмма Венна которая демонстрирует пересечение заглавных букв русского, латинского и греческого алфавитов.



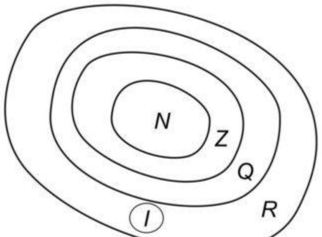
Изучим числовые множества



ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются **числовыми**.



Обозначение:

N – множество **натуральных** чисел;

Z – множество **целых** чисел;

Q – множество **рациональных** чисел;

I – множество **иррациональных** чисел;

R – множество **действительных** чисел.

Примеры: $N = \{5; 6; 7; 8; ...\}$ $\quad Q = \left\{\frac{4}{5}; 2\frac{5}{7}; -4; ...\right\}$

$Z = \{\pm4; \pm5; \pm6; \pm7; ...\}$ $\quad R = \left\{\sqrt{5}; 2{,}5; -13; \frac{1}{3}; ...\right\}$

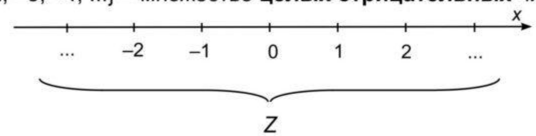
Целые числа

Целые числа – это натуральные числа, им противоположные и ноль.

$$Z = \{0; \pm1; \pm2; \pm3; ...\}$$

$\{0; 1; 2; 3; ...\}$ – множество **целых неотрицательных** чисел.

$\{-1; -2; -3; -4; ...\}$ – множество **целых отрицательных** чисел.



С помощью целых чисел удобно описывать изменение количества каких-либо предметов. Знак целого числа будет показывать направление изменения (уменьшилось количество («–») или увеличилось («+»)). Число 0 – количество предметов не изменилось.

Натуральные числа

Числа, употребляемые при счёте, называются **натуральными**.

$$N = \{1; 2; 3; 4; ...\}$$

Наименьшим натуральным числом является 1.

Следует различать **цифры** и **числа. Цифры** – это единицы счёта, знаки.
Цифры: **0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9**.
Числа состоят из цифр.

Свойства сложения и умножения натуральных чисел:

- $a + b = b + a$ – переместительное свойство сложения;
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ – сочетательное свойство сложения;
- $ab = ba$ – переместительное свойство умножения;
- $(ab)c = a(bc)$ – сочетательное свойство умножения;
- $a(b + c) = ab + ac$ – распределительное свойство умножения относительно сложения.
- Результатом сложения и умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число.

Рациональные числа

Числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называются **рациональными**.

$Q = \left\{\frac{m}{n}\right\}$ – множество рациональных чисел.

$$Q = \left\{\frac{3}{5}; \frac{2}{4}; \frac{1}{7}; \frac{6}{7}; 2; -3; 1\frac{2}{13}; ...\right\}$$

- Дробь $\frac{m}{n}$ называется **правильной,** если её числитель меньше знаменателя, и **неправильной,** если её числитель больше знаменателя или равен ему.

$\frac{1}{4}$ – правильная дробь; $\frac{6}{5}$ – неправильная дробь.

- Неправильную дробь можно представить в виде суммы натурального числа и правильной дроби.

$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$; $\qquad \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$.

- Каждое рациональное число $\frac{m}{n}$ можно представить в виде **конечной** или **бесконечной периодической** десятичной дроби.

Разминка

1.Сколько элементов содержит множество М нечетных двузначных чисел?

2.Составьте все подмножества множества К, если К = {1,3,8}.

3. Привести примеры числовых множеств А и В таких, что:

1) $A \cap B = R$,

2) $A \cap B = \varnothing$,

3) $A \cup B = A$,

4) $A \cap B = B$.

Конкурс художников

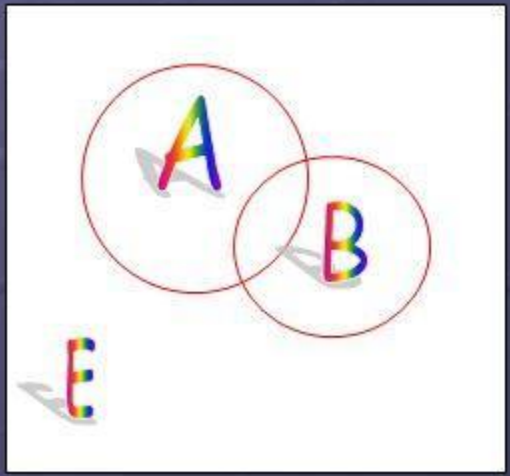
1. Множества А и В являются подмножествами Е. Укажите штриховкой множества:

а) $\overline{A \cup B}$, $A \cup \overline{B}$,

б) $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$,

в) $A \cap B$, $\overline{A \cup \overline{B}}$,

г) $\overline{A \cap B}$, $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.



2) Решите неравенства:

а) $|x - y| \leq 1$;

б) $|x| + |y| \leq 1$;

в) $|x + y| \leq 1$.