Свойства логарифмов

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Теорема 1. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{r} = x \\ = y \\ = z \end{array}\right\} \Rightarrow x = y + z \qquad \begin{array}{l} \log_a bc = x \Leftrightarrow a^x = bc \\ \log_a b = y \Leftrightarrow a^y = b \\ \log_a c = z \Leftrightarrow a^z = c \end{array}$$

$$bc = b \cdot c \Rightarrow a^x = a^y \cdot a^z \Rightarrow a^x = a^{y+z} \Rightarrow x = y + z$$

Пример:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

Преобразовать выражения: а) $\log_4 15$; б) $\log_3 18$; в) $\lg 2 + \lg 5$.

Решение:

а) $15 = 5 \cdot 3$

$$\log_4 15 = \log_4 5 \cdot 3 = \log_4 5 + \log_4 3$$

б) $18 = 9 \cdot 2$

$$\log_3 18 = \log_3 9 \cdot 2 = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$$

в) $\lg 2 + \lg 5 = \lg 5 \cdot 2 = \lg 10 = 1$

Теорема 2. Если a, b, c – положительные числа, причем $a \neq 1$, то справедливо равенство

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$$

Пример: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Упростить выражения: а) $\log_3 2{,}5$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 3{,}5$; в) $\lg 15 - \lg 3$.

Решение:

а) $\log_3 2{,}5 = \log_3 \frac{5}{2} = \log_3 5 - \log_3 2$

б) $\log_{\frac{1}{2}} 3{,}5 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{7}{2} = \log_{\frac{1}{2}} 7 - \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 7 - (-1) = \log_{\frac{1}{2}} 7 + 1$

в) $\lg 15 - \lg 3 = \lg \frac{15}{3} = \lg 5$

Теорема 3. Если a и b – положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо равенство

$$\boxed{\log_a \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{r} \log_a \boldsymbol{b}}$$

Пример:

$$\log_a b^r = r\log_a b$$

Упростить выражения: а) $\log_2 25$; б) $\lg\frac{1}{5}$; в) $3\log_3 2$.

Решение:

а) $\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2\log_2 5$

б) $\lg\frac{1}{5} = \lg 5^{-1} = -\lg 5$

в) $3\log_3 2 = \log_3 2^3 = \log_3 8$

Если a и b – положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо равенство

$$\log_{a^r} \boldsymbol{b} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}} \log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}$$

Пример:

$$\log_{a^r} b = \frac{1}{r}\log_a b$$

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Вычислить значение выражения: $3^{\log_9 13}$.

Решение:

$$\log_9 13 = \log_{3^2} 13 = \frac{1}{2}\log_3 13$$

$$3^{\log_9 13} = 3^{\frac{1}{2}\log_3 13} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_3 13} = \left(3^{\log_3 13}\right)^{\frac{1}{2}} = 13^{\frac{1}{2}} = \sqrt{13}$$

Пример:

Известно, что положительные числа x, y, z, t связаны соотношением $x = \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}}$.

Выразить $\log_a x$ (где $a > 0, a \neq 1$) через логарифмы по основанию a чисел y, z, t.

Решение:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \qquad \log_a bc = \log_a b + \log_a c \qquad \log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_a x = \log_a(yz^3) - \log_a \sqrt[3]{t} = \log_a y + 3\log_a z - \frac{1}{3}\log_a t$$

$$\log_a(yz^3) = \log_a y + \log_a z^3$$

$$\log_a z^3 = 3\log_a z \qquad \log_a \sqrt[3]{t} = \log_a t^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_a t$$

$$\log_a x = \log_a y + 3\log_a z - \frac{1}{3}\log_a t$$

Логарифмирование

Потенцирование

Теорема 4. Равенство $\log_a t = \log_a s$, где $a > 0, a \neq 1, t > 0, s > 0$, справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Пример:

Известно, что $\lg x = 2\lg y - \lg z + 0{,}5\lg t$. Выразить x через y, z, t.

Решение:

$2\lg y = \lg y^2 \qquad 0{,}5\lg t = \lg\sqrt{t}$

$$2\lg y - \lg z + 0{,}5\lg t = \lg y^2 - \lg z + \lg\sqrt{t} = \lg\frac{y^2}{z} + \lg\sqrt{t} =$$

$$= \lg\frac{y^2\sqrt{t}}{z}$$

$$\lg x = \lg\frac{y^2\sqrt{t}}{z} \Rightarrow x = \frac{y^2\sqrt{t}}{z}$$

$$\lg x^2 = 2\lg x$$

$$x^2 = |x|^2, |x| > 0, \text{при } x \neq 0$$

$$\lg x^2 = 2\lg|x|$$

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a x^{2n} = 2n\log_a|x|, n \in Z}}$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad b > 0, c > 0$$

$$bc > 0 \quad bc = |bc| = |b| \cdot |c|$$

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a bc = \log_a|b| + \log_a|c|}}$$

Пример: $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

Известно, что $\log_5 2 = a$. Найдите $\log_5 10$.

Решение:

$$\log_5 10 = \log_5 5 \cdot 2 = \log_5 5 + \log_5 2 = 1 + a$$

Ответ: $\log_5 10 = 1 + a$

Пример: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Найдите число x по его логарифму: $\log_7 x = \log_7 14 - \log_7 98.$

Решение:

$$\log_7 14 - \log_7 98 = \log_7 \frac{14}{98} = \log_7 \frac{1}{7}$$

$$\log_7 x = \log_7 \frac{1}{7}$$

$$x = \frac{1}{7}$$

Пример:

Прологарифмируйте по основанию 5: $125a^4 : b^4$.

Решение:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \qquad \log_a bc = \log_a b + \log_a c \qquad \log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_5(125a^4 : b^4) = \log_5 125 + \log_5 a^4 - \log_5 b^4 = 3 + 4\log_5 a - 4\log_5 b$$

Пример:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

Решить уравнение $\log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{4}} 9 = \log_{\frac{1}{4}} 5.$

Решение:

$$\log_{\frac{1}{4}} x = \log_{\frac{1}{4}} 5 + \log_{\frac{1}{4}} 9$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 5 + \log_{\frac{1}{4}} 9 = \log_{\frac{1}{4}} 5 \cdot 9 = \log_{\frac{1}{4}} 45$$

$$\log_{\frac{1}{4}} x = \log_{\frac{1}{4}} 45 \Rightarrow x = 45$$

Основные свойства логарифмов:

Если a, b, c – положительные числа, причем $a \neq 1$, то справедливы равенства:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^r = r \log_a b, \text{ для любого } r$$

$$\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b, \text{ для любого } r$$