Лекция №12

Расстояние от точки до плоскости

- Пусть дана плоскость $\boldsymbol{P}$ своим уравнением в нормальном виде:

$$(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{r}}) - \boldsymbol{p} = \mathbf{0},$$

где $\vec{\boldsymbol{n}} = (\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta}, \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\gamma}), \vec{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

и точка $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$ с радиусом-вектором $\vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{0}}$.

Расстояние от точки $\boldsymbol{M_0}$ до плоскости $\boldsymbol{P}$ определяется по формуле:

$$\boldsymbol{d} = |(\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{0}}) - \boldsymbol{p}|.$$

Если уравнение плоскости задано в общем виде:

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cz} + \boldsymbol{D} = \mathbf{0},$$

то расстояние от точки $\boldsymbol{M_0}$ до плоскости $\boldsymbol{P}$ определяется по формуле:

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}.$$

<u>Пример.</u> Найти расстояние от точки ***М*** *(5; -3; 2)* до плоскости

$$\boldsymbol{2x - 3y + 6z + 4 = 0}$$

<u>Ответ:</u> $\boldsymbol{d = 5}$

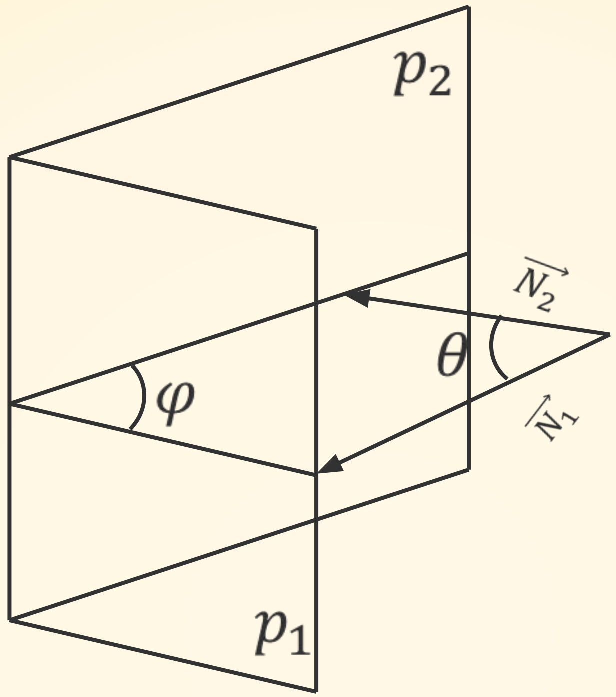
Угол между двумя плоскостями

Пусть даны две плоскости $\boldsymbol{P_1}$ и $\boldsymbol{P_2}$ уравнениями:

$$(\vec{\boldsymbol{N}}_1, \vec{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{D_1} = \mathbf{0} \text{ и } (\vec{\boldsymbol{N}}_2, \vec{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{D_2} = \mathbf{0},$$

где $\vec{\boldsymbol{N}}_1 = (\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{C_1})$, $\vec{\boldsymbol{N}}_2 = (\boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{B_2}, \boldsymbol{C_2})$ – нормали соответствующих плоскостей.

Обозначим угол между плоскостями через $\boldsymbol{\varphi}$, а между векторами $\vec{\boldsymbol{N}}_1$ и $\vec{\boldsymbol{N}}_2$ через $\boldsymbol{\theta}$.



Тогда $\boldsymbol{\cos\varphi} = \pm\dfrac{(\overrightarrow{\boldsymbol{N_1}},\overrightarrow{\boldsymbol{N_2}})}{|\overrightarrow{\boldsymbol{N_1}}|\cdot|\overrightarrow{\boldsymbol{N_2}}|}$

или в координатной форме: $\boldsymbol{\cos\varphi} = \pm\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

Условие параллельности плоскостей

- Для того, чтобы плоскости $\boldsymbol{P_1}$ и $\boldsymbol{P_2}$ были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{\boldsymbol{N_1}} = (\boldsymbol{A_1}; \boldsymbol{B_1}; \boldsymbol{C_1})$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{N_2}} = (\boldsymbol{A_2}; \boldsymbol{B_2}; \boldsymbol{C_2})$ были коллинеарны, т.е.

$$\frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{A_2}} = \frac{\boldsymbol{B_1}}{\boldsymbol{B_2}} = \frac{\boldsymbol{C_1}}{\boldsymbol{C_2}}.$$

Это равенство является условием параллельности двух плоскостей.

Условие перпендикулярности плоскостей

- Для того, чтобы плоскости $\boldsymbol{P_1}$ и $\boldsymbol{P_2}$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{\boldsymbol{N_1}}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{N_2}}$ были ортогональны друг другу, т.е.

$$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{N_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{N_2}}\right) = \boldsymbol{0} \text{ или}$$

$$\boldsymbol{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0}.$$

Это равенство является условием перпендикулярности двух плоскостей.

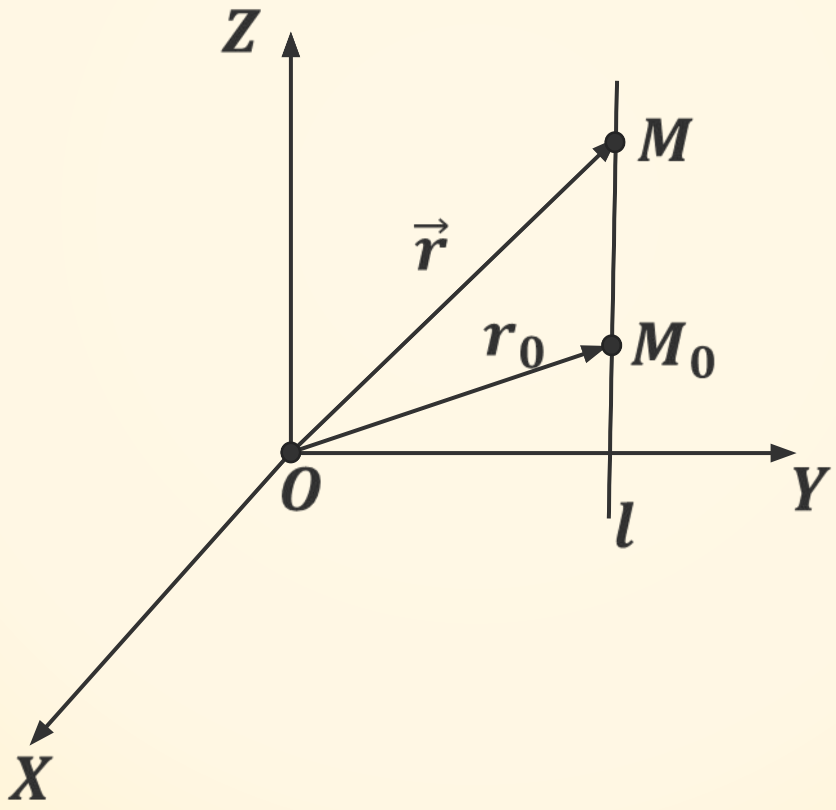
Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $\boldsymbol{M}\ (\mathbf{2}; -\mathbf{3}; \mathbf{1})$ параллельно плоскости $\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}\boldsymbol{y} + \mathbf{7}\boldsymbol{z} - \mathbf{43} = \mathbf{0}$.

Ответ: $\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}\boldsymbol{y} + \mathbf{7}\boldsymbol{z} - \mathbf{29} = \mathbf{0}$.

Прямая линия в пространстве

Параметрическое уравнение прямой

- Возьмем произвольную прямую и вектор $\vec{S} = (m, n, p)$ параллельный данной прямой. Вектор $\vec{S}$ называется направляющим вектором прямой.



Пусть точка $\boldsymbol{M_0}$ с радиус-вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{r_0}}$ принадлежит прямой. Для произвольной точки $\boldsymbol{M}$ прямой $\overrightarrow{\boldsymbol{M_0M}} = \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{S}}$, где $\boldsymbol{t}$ – некоторый параметр. Тогда

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{r_0}} + \boldsymbol{t}\vec{\boldsymbol{S}} \quad (1)$$

параметрическое уравнение прямой в пространстве в векторной форме.

Если $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ и $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$, то

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{mt} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{nt} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z_0} + \boldsymbol{pt} \end{cases} \quad (2)$$

Равенство (2) является ***параметрическим уравнением прямой в пространстве в координатной форме***.

Канонические уравнения прямой

Из равенств (2), выражая $\boldsymbol{t}$, получим:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Это каноническое уравнение прямой в пространстве.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки $\boldsymbol{M_1}(x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{M_2}(x_2, y_2, z_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точки $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{M_2}$,имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Общие уравнения прямой в пространстве

- Пусть заданы уравнения двух пересекающихся плоскостей:

$$\left(\vec{N}_1, \vec{r}\right) + D_1 = 0 \text{ и } \left(\vec{N}_2, \vec{r}\right) + D_2 = 0,$$

где $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

Тогда совокупность этих уравнений:

$$\begin{cases} \left(\vec{N}_1, \vec{r}\right) + D_1 = 0 \\ \left(\vec{N}_2, \vec{r}\right) + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Задает прямую как линию пересечения плоскостей. Уравнения (1) называются ***<u>общими уравнениями прямой в пространстве в векторной форме</u>***.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (2) называются *общими уравнениями прямой в координатной форме*.

Пример. Уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7 = 0 \\ x + 3y - 4z - 1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

привести к каноническому виду.

Находим координаты точки M_0, принадлежащую прямой. Полагаем $z_0 = 0$, а x_0, y_0 - определяем из системы (3).

$$\vec{N}_1 = (2; -3; 5), \vec{N}_2 = (1; 3; -4)$$

Направляющий вектор прямой $\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$

Ответ: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{13} = \frac{z}{9}$.

Угол между двумя прямыми

- Пусть даны уравнения двух прямых:

$\vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t \quad (l_1)$, где

$\vec{r} = (x, y, z), \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1), \vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$,

$\vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t \quad (l_2)$, где

$\overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2), \vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Обозначим угол между прямыми l_1 и l_2 через φ, тогда:

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых

▪

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

Условие перпендикулярности прямых

$$m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0.$$

Пример. Найти уравнение прямой , проходящей через точку $M(9;-13;15)$ перпендикулярно двум прямым l_1 и l_2, если

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z}{5}\ (l_1);\quad \frac{x+2}{4}=\frac{y-7}{1}=\frac{z}{-2}\ (l_2)\ .$$

Ответ. $\frac{x-9}{1}=\frac{y+13}{24}=\frac{z-15}{p}.$

Прямая и плоскость
Угол между прямой и плоскостью

- Пусть задано уравнение плоскости $\boldsymbol{P}$.

$$(\vec{N},\vec{r}) + D = 0,$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{N} = (A, B, C)$ - нормальный вектор и уравнение прямой $\boldsymbol{l}$:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}t,$$

где $\vec{S} = (m, n, p)$ – направляющий вектор.

Обозначим угол между плоскостью $\boldsymbol{P}$ и прямой $\boldsymbol{l}$ через $\boldsymbol{\varphi}$.

Тогда $\sin\varphi = \pm\frac{(\vec{N},\vec{S})}{|\vec{N}||\vec{S}|}$ или $\sin\varphi = \pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Условие параллельности прямой и плоскости

- $$(\vec{N},\vec{S}) = 0 \text{ или } Am + Bn + Cp = 0$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\vec{N} \| \vec{S} \quad \text{или} \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Пример. Найдите точку пресечения A прямой (l):

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

с плоскостью P: $x + 2y + z - 8 = 0$.

Ответ: $A(4; 1; 2)$.