Вычисление площади криволинейной трапеции

Материалы к урокам и факультативным занятиям для 11класса

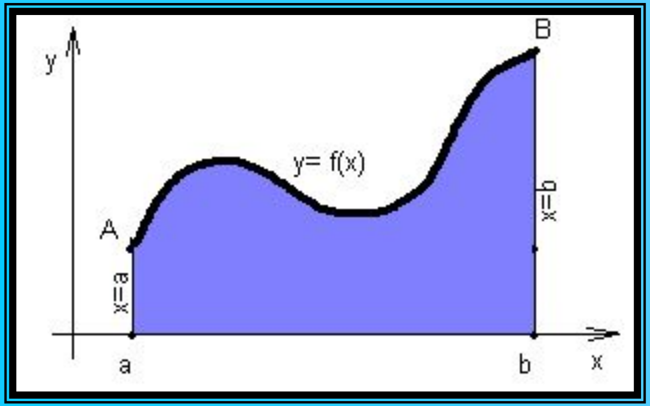
Учитель ГБОУ гимназии № 49 Приморского района Санкт-Петербурга
Алексеевой Людмилы Васильевны

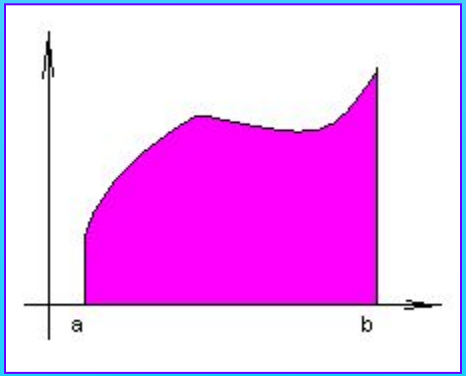
«Если имеются две неравные площади, то, постоянно прибавляя к самому себе избыток, на который большая площадь превосходит меньшую, можно получить площадь, которая была бы больше любой заданной ограниченной площади.»

Архимед

Определение.

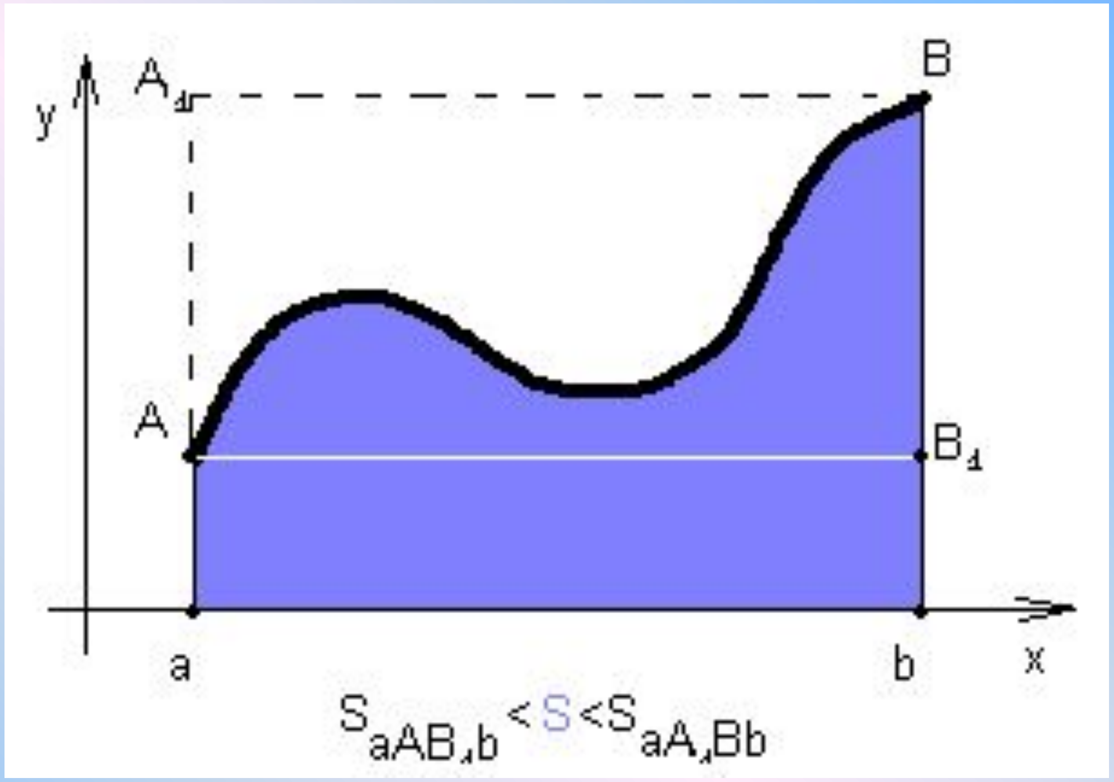
<u>Криволинейной трапецией</u> называют фигуру, ограниченную графиком непрерывной функции, заданной на отрезке [a;b] и принимающей на нем положительные значения, отрезками прямых x=a и x=b и отрезком [a;b] оси абсцисс.



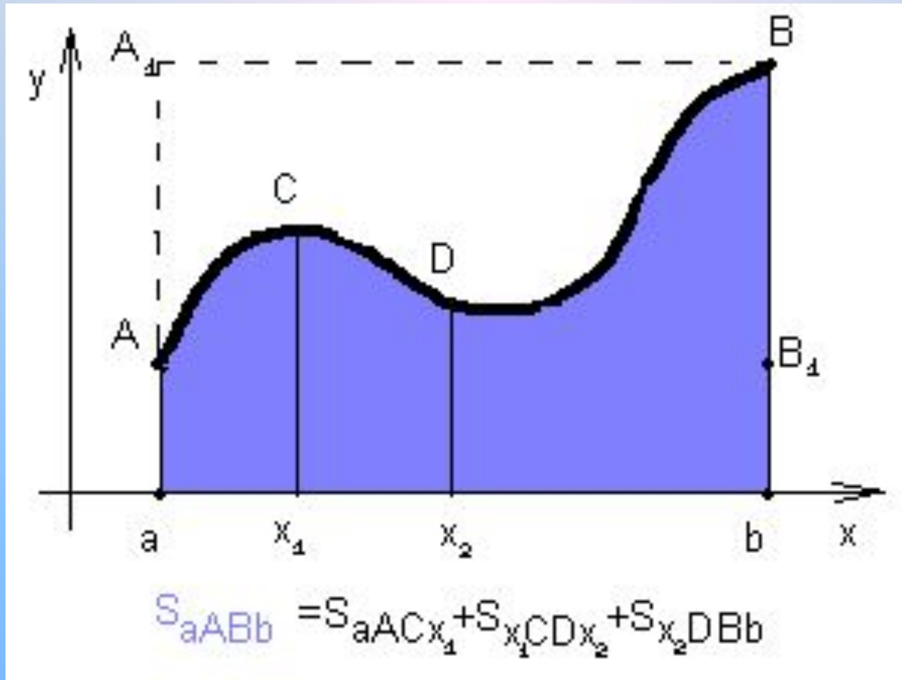


Найти площадь криволинейной трапеции можно

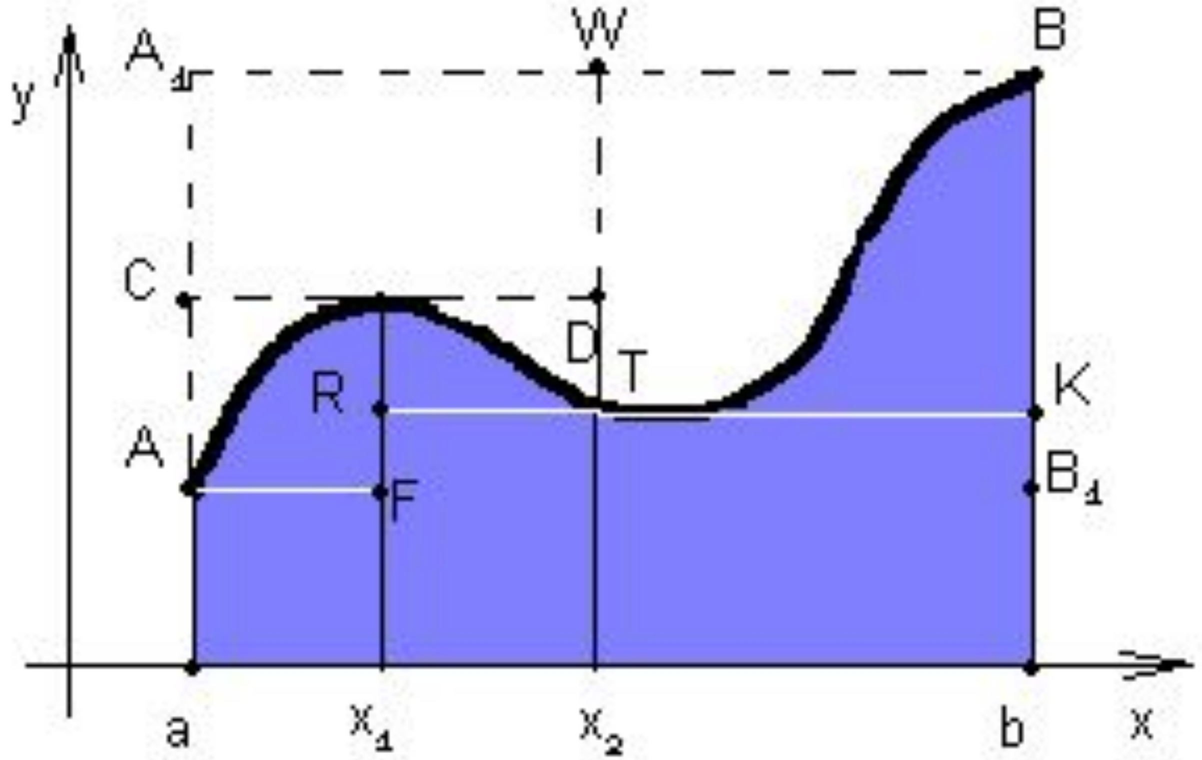
- способом последовательных приближений
- способом составления интегральных сумм
- используя определенный интеграл



Очевидно, площадь заштрихованной фигуры больше, чем площадь прямоугольника aAB_1b и меньше, чем aA_1Bb.



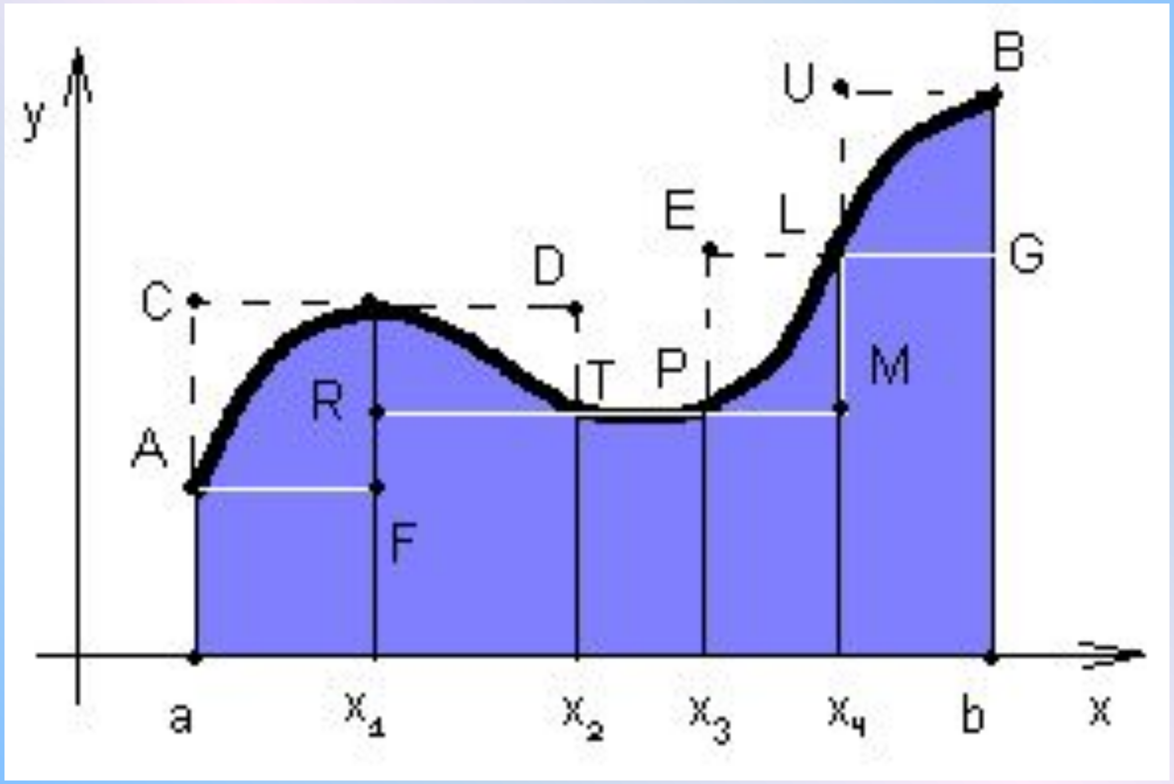
Однако, такая оценка имеет очень большую погрешность. опытаемся уточнить скомую величину, для этого помним известный из ометрии прием нахождения ощади, разобьем ссматриваемую фигуру на сти: проведем несколько вертикальных прямых $x=x_1$, $x=x_2$.



$$S_{aAB_1b} < S_{aAFRKb} < S < S_{aCDWBb} < S_{aA_1Bb}$$

Теперь наша трапеция разбита на три трапеции.

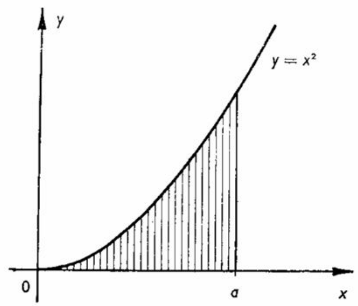
Еще больше уточним площадь трапеции …



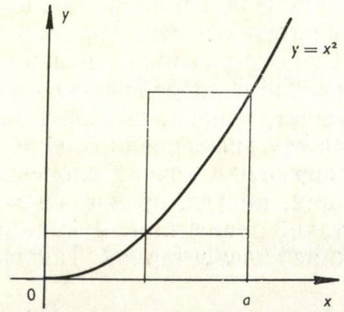
…и так далее

Рассмотрим пример:

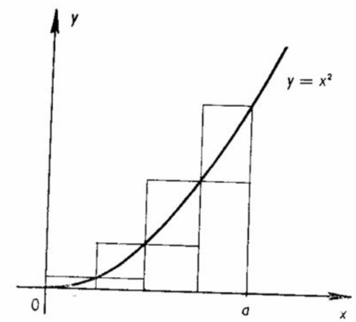
Найти площадь под кривой, заданной графиком функции y=x^2



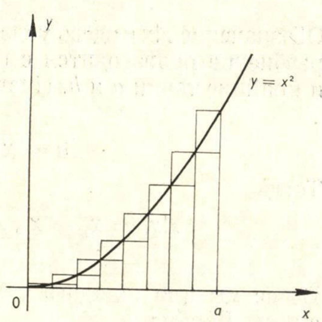
Площадь фигуры под параболой $y = x^2$



Вписанная и описанная элементарные фигуры в случае $n = 2$



Вписанная и описанная элементарные фигуры при $n = 4$



Вписанная и описанная элементарные фигуры при $n = 8$

площадь прямоугольников над параболой $a^3\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$

площадь прямоугольников под параболой $a^3\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}$

Отсюда, если n→∞, получаем

$$S = \frac{a^3}{3}$$

примечание

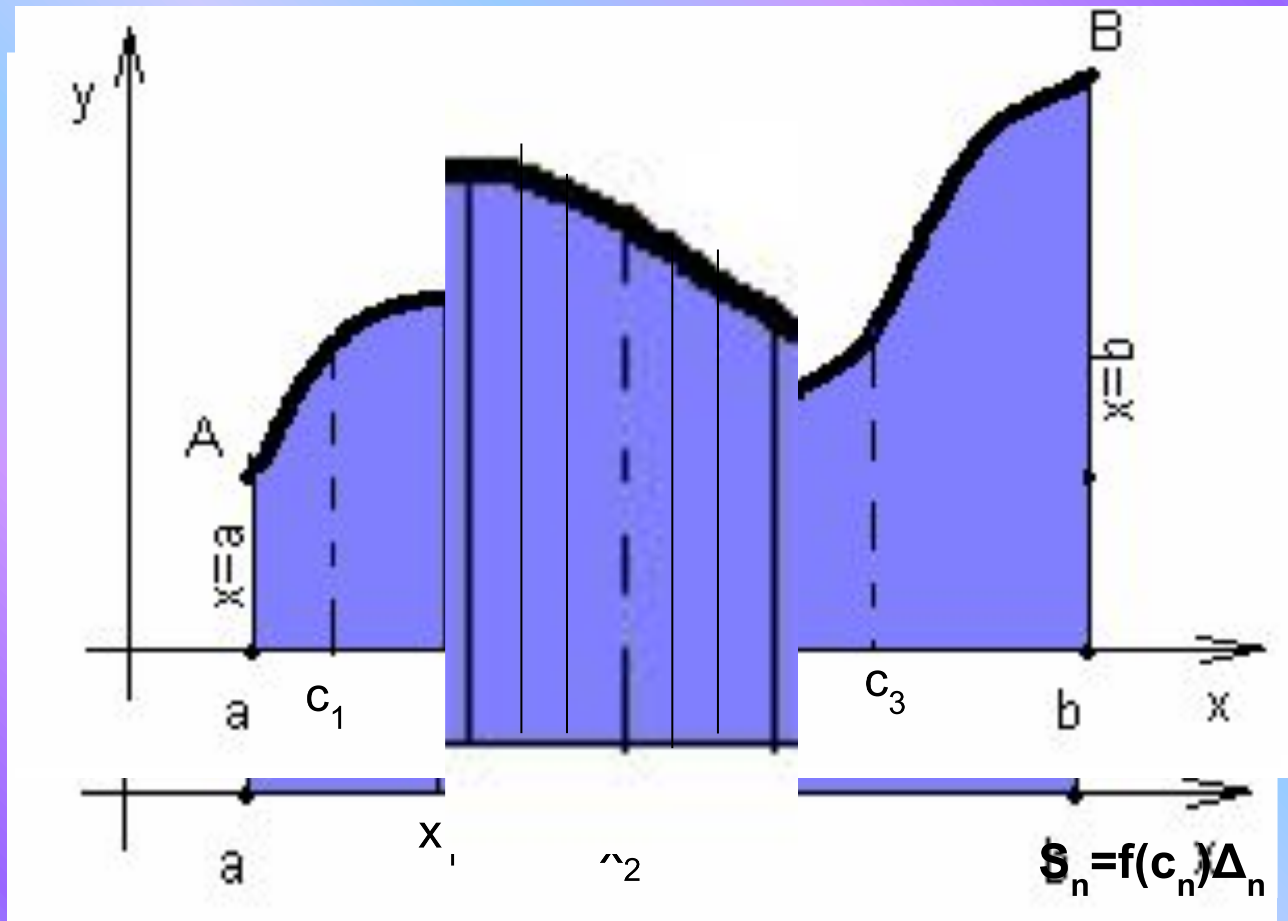
Нахождение суммы последовательности квадратов натуральных чисел

справедлива формула

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

доказательство можно провести по индукции

Составление интегральной суммы



Уменьшая шаг разбиения Δn, приближаем значение суммы $S_1+S_2+\ldots$ к значению S (искомой площади трапеции)

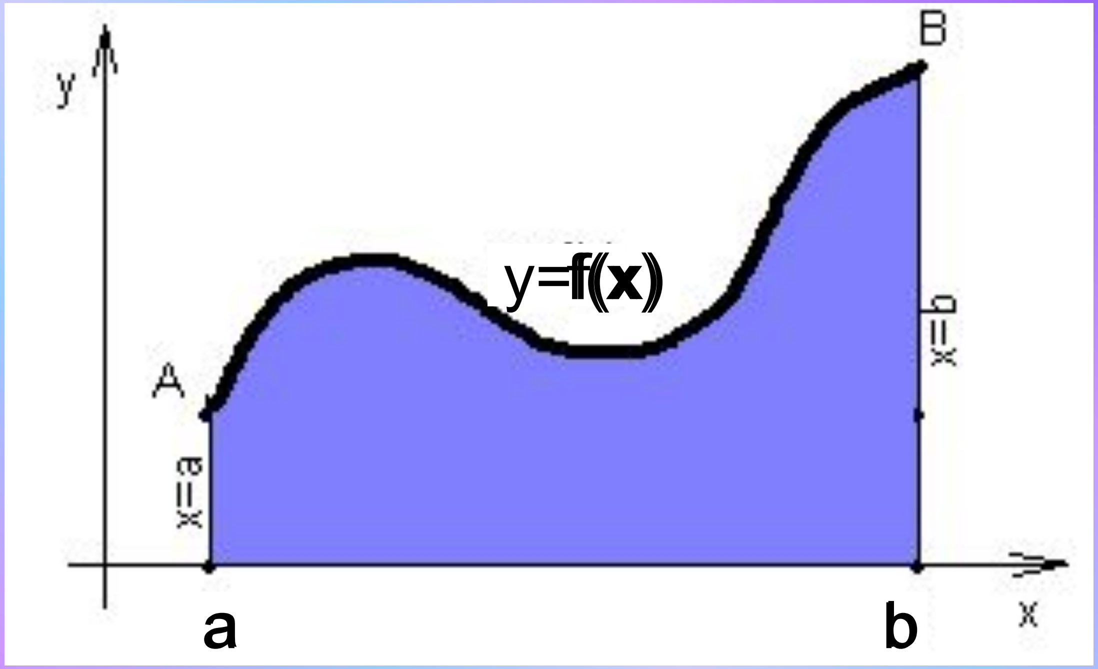
Разобьем основание трапеции точками x_1 и x_2

Приближенно найдем площадь каждой части

При $n\to\infty$ $\Delta n\to 0$ $S_1+S_2+\ldots+S_n\to S$. Это можно [записать математически]

Вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла

$$S = \int \quad dx$$



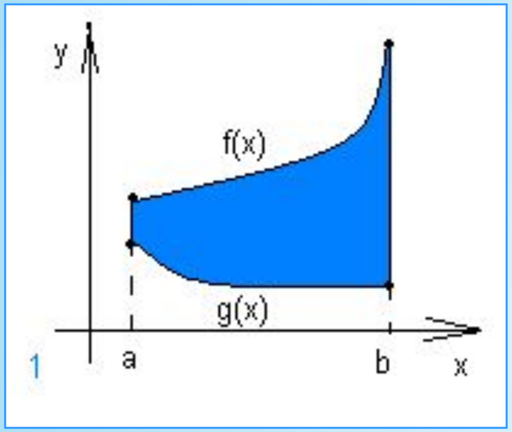
Вычисление определенного интеграла.

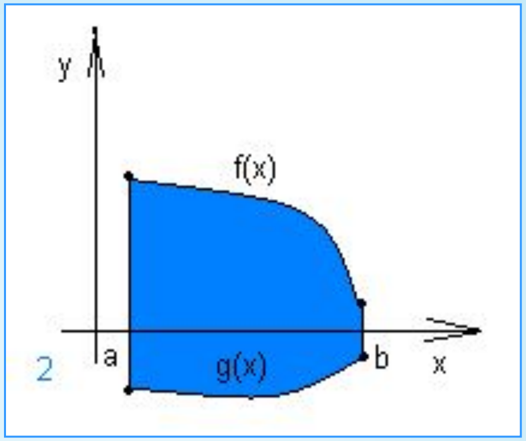
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона – Лейбница

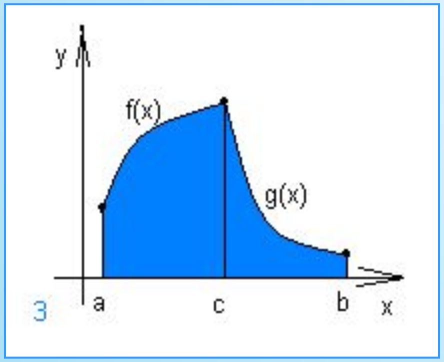
Попробуйте сами

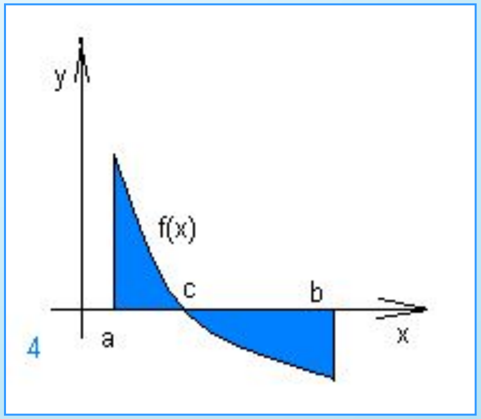
Сконструировать формулу для вычисления площади фигур





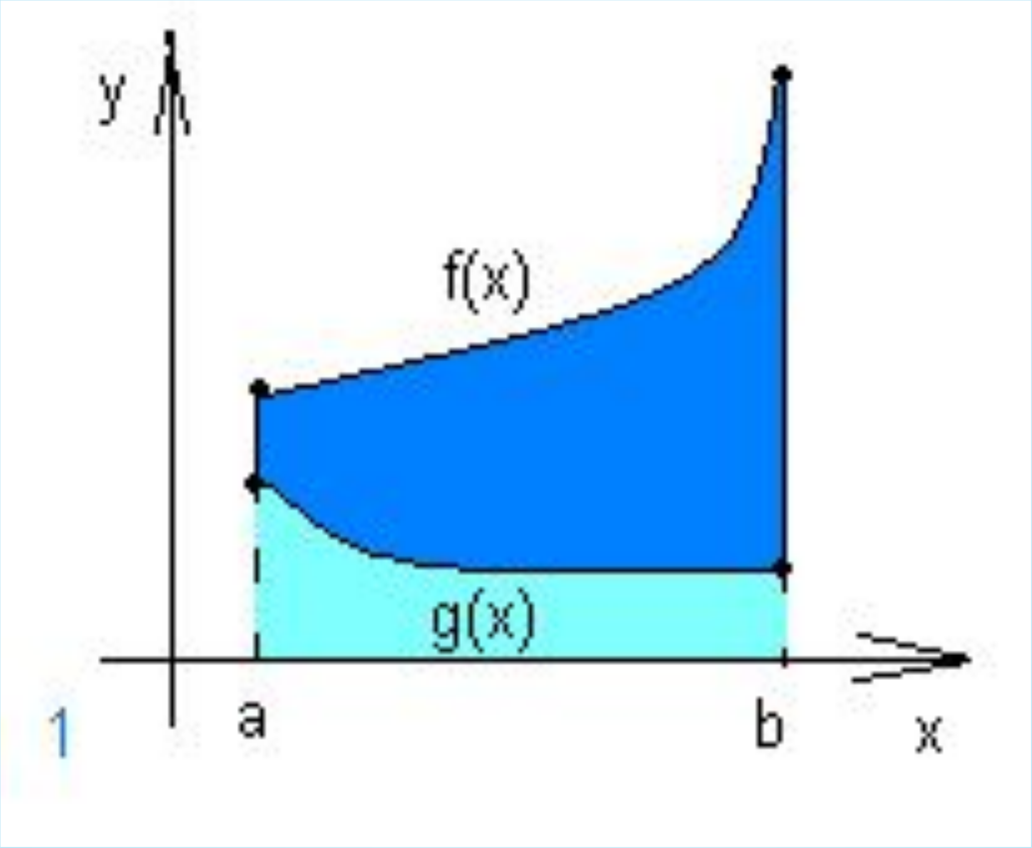
Если затрудняетесь, воспользуйтесь подсказкой



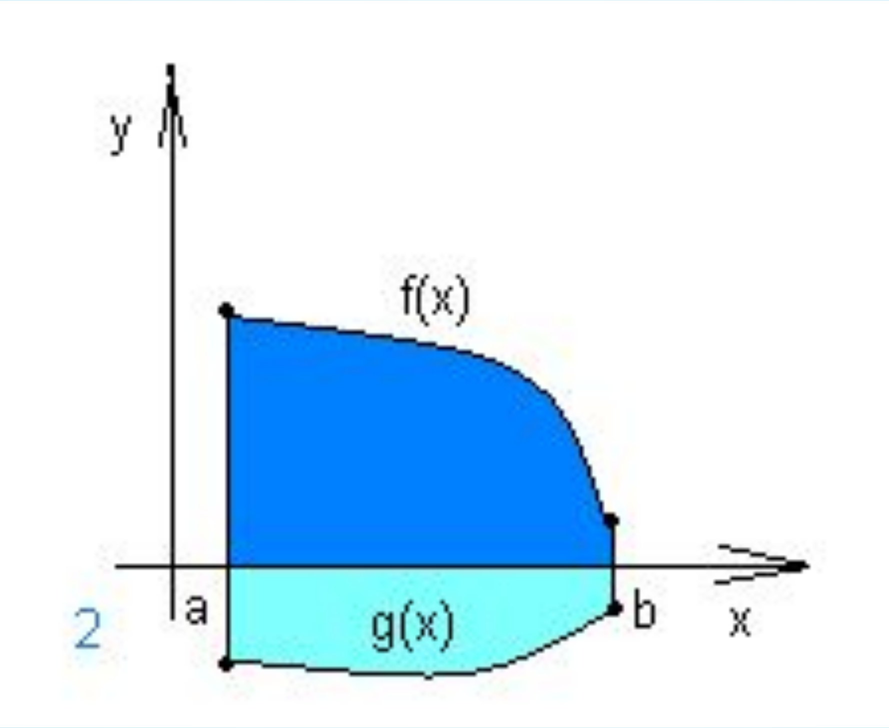


Проверьте себя по [ответам]()

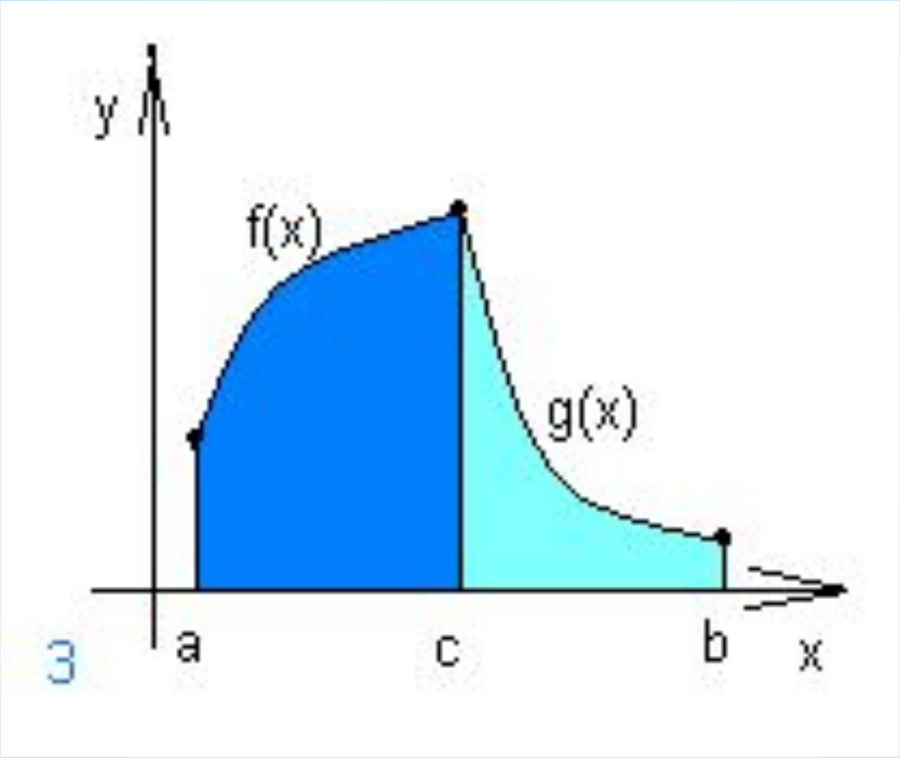
Подсказка 1



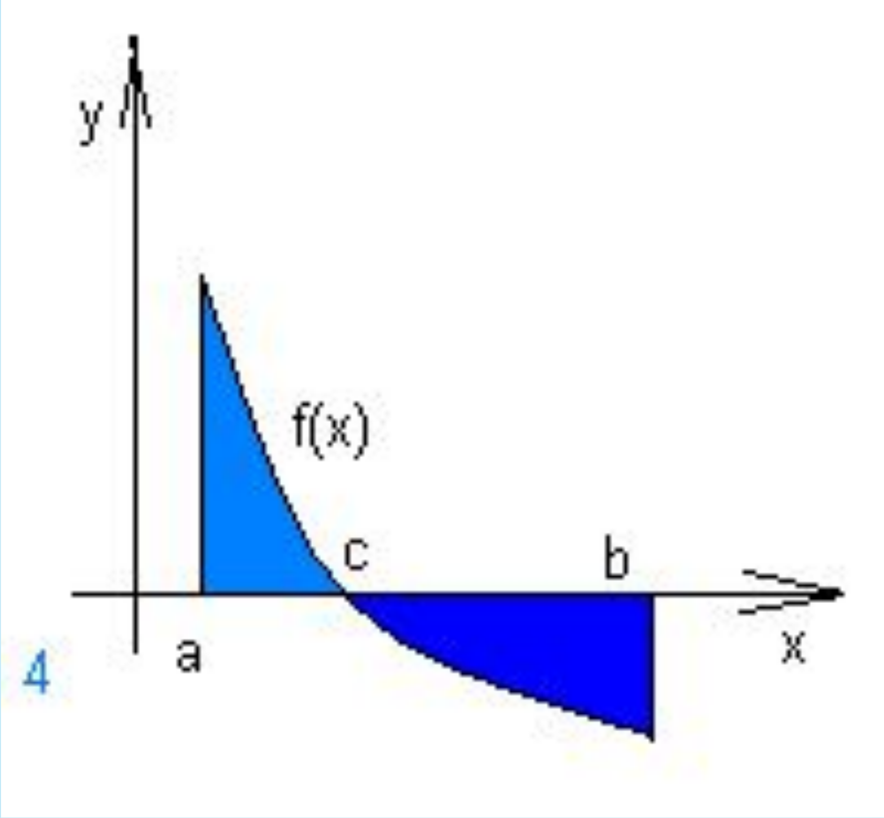
Подсказка 2



Подсказка 3



Подсказка 4



Проверь себя

1. $S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

2. $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$

3. $S = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. $S = \int_a^b f(x)dx$

Ура! Получилось!

М о л о д е ц !!!