

**Федеральное агентство по образованию  
Нижегородский государственный технический университет  
им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА**

**А.А. Башев**

# **ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА**

**Кафедра “Теоретическая и общая  
электротехника”**


**Для студентов электротехнических  
специальностей всех форм обучения**

# Тема 8

***ЛИНЕЙНЫЕ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ  
ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ  
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОКАХ***

# Несинусоидальные токи

- Периодическими несинусоидальными токами и напряжениями называются токи и напряжения, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону



## **Разложение периодических функций. Характеристики несинусоидальных величин**

**Для анализа процессов в линейных электрических цепях при воздействии на них несинусоидальных токов или напряжений последние обычно разлагаются в ряд Фурье.**

# Ряд Фурье в тригонометрической форме

---

Ряд Фурье в тригонометрической форме

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t))$$

$\omega_1 = (2\pi / T)$  – угловая частота первой гармоники

# Ряд Фурье в тригонометрической форме

---

Коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$$

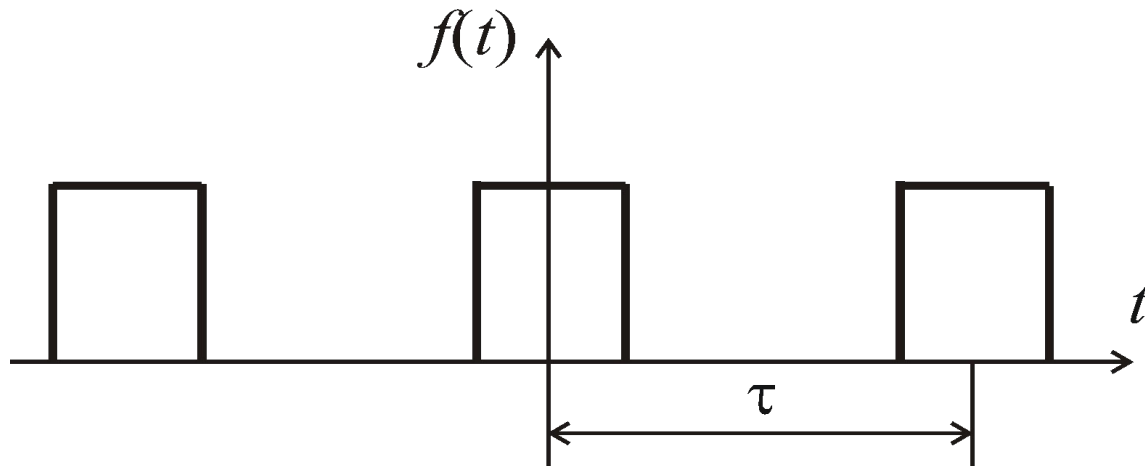
$a_0 / 2$  – постоянная составляющая, равная среднему значению функции  $f(t)$  за период:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

# Случаи симметрии

---

Случай 1. Четная функция:  $f(t) = f(-t)$



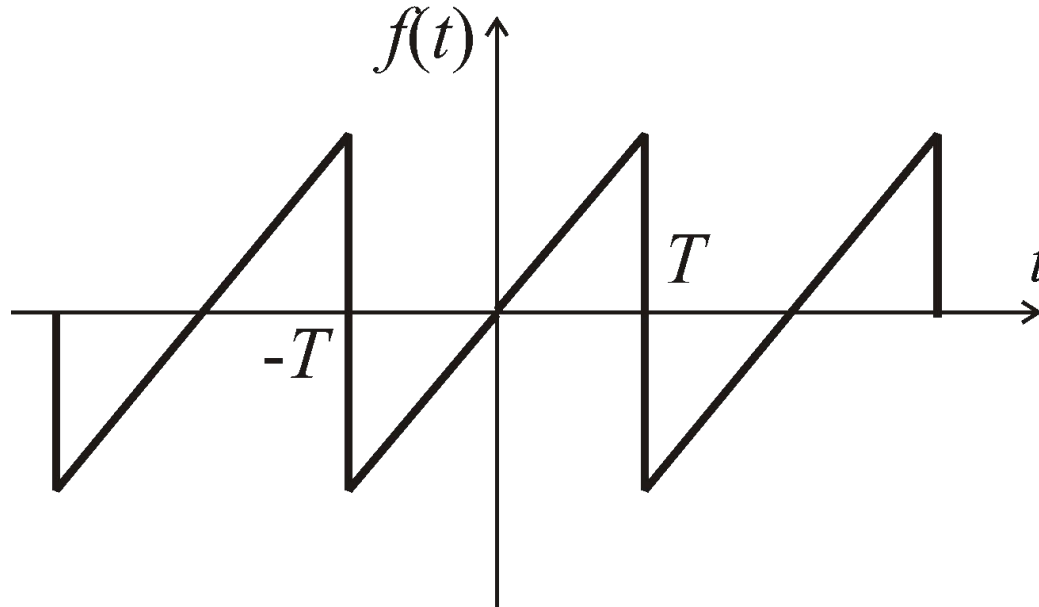
Разложение в ряд Фурье четной функции содержит только косинусы:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t)$$

Коэффициенты при синусных составляющих  $b_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

# Случаи симметрии

Случай 2. Нечетная функция:  $-f(t) = f(-t)$



Разложение в ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 t)$$



# Случаи симметрии

---

*Случай 3.* Функция  $f(t)$  симметрична относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени, т. е.

$$f(t) = -f(t + T/2).$$

Четные гармоники, а также составляющая  $a_0 / 2$  равны нулю, т. е.

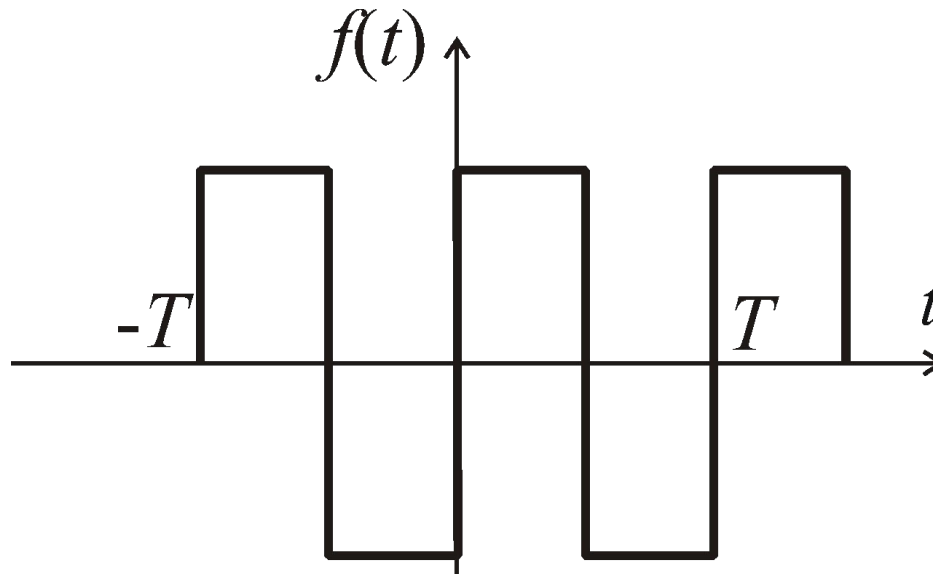
$$a_n = b_n = 0, n = 0, 2, 4, \dots$$

# Случаи симметрии

---

Пример – последовательность прямоугольных импульсов. Разложение в ряд Фурье такой функции содержит только нечетные гармоники:

$$f(t) = \frac{4U}{\pi} \left( \sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \dots \right)$$



$U$  – амплитуда прямоугольных импульсов.

# Комплексная форма ряда Фурье

---

Ряд Фурье в тригонометрической форме

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t))$$

Воспользуемся равенствами:

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}; \quad \sin(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{j2}$$

# Комплексная форма ряда Фурье

---

Ряд Фурье примет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - jb_n)e^{jn\omega_1 t} + (a_n + jb_n)e^{-jn\omega_1 t})$$

Коэффициент  $a_n$  – четная, а  $b_n$  – нечетная функция индекса  $n$ :

$$a_n = a_{-n}, \quad b_n = -b_{-n}$$

Поэтому элемент  $-jb_n$  можно рассматривать как слагаемое с отрицательным индексом.

# Комплексная форма ряда Фурье

---

Изменив нижний предел суммирования на  $-\infty$ , получим

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n e^{jn\omega_1 t}$$

$\tilde{A}_n = a_n - jb_n$  – комплексный коэффициент ряда Фурье.

В показательной форме:  $\tilde{A}_n = A e^{j\Psi}$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \Psi_n = -\operatorname{arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

# Комплексный частотный спектр

---

Совокупность комплексных коэффициентов гармоник  $A_n$  называют *комплексным частотным спектром* функции  $f(t)$

Амплитуды гармоник  $A_n$  образуют *амплитудный спектр*.

Начальные фазы  $\Psi_n$  образуют *фазовый спектр*.

# Комплексный частотный спектр

---

Комплексная амплитуда  $n$ -й гармоники

$$\underline{A}_n = a_n - jb_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos(n\omega_1 t) - j \sin(n\omega_1 t)) dt$$

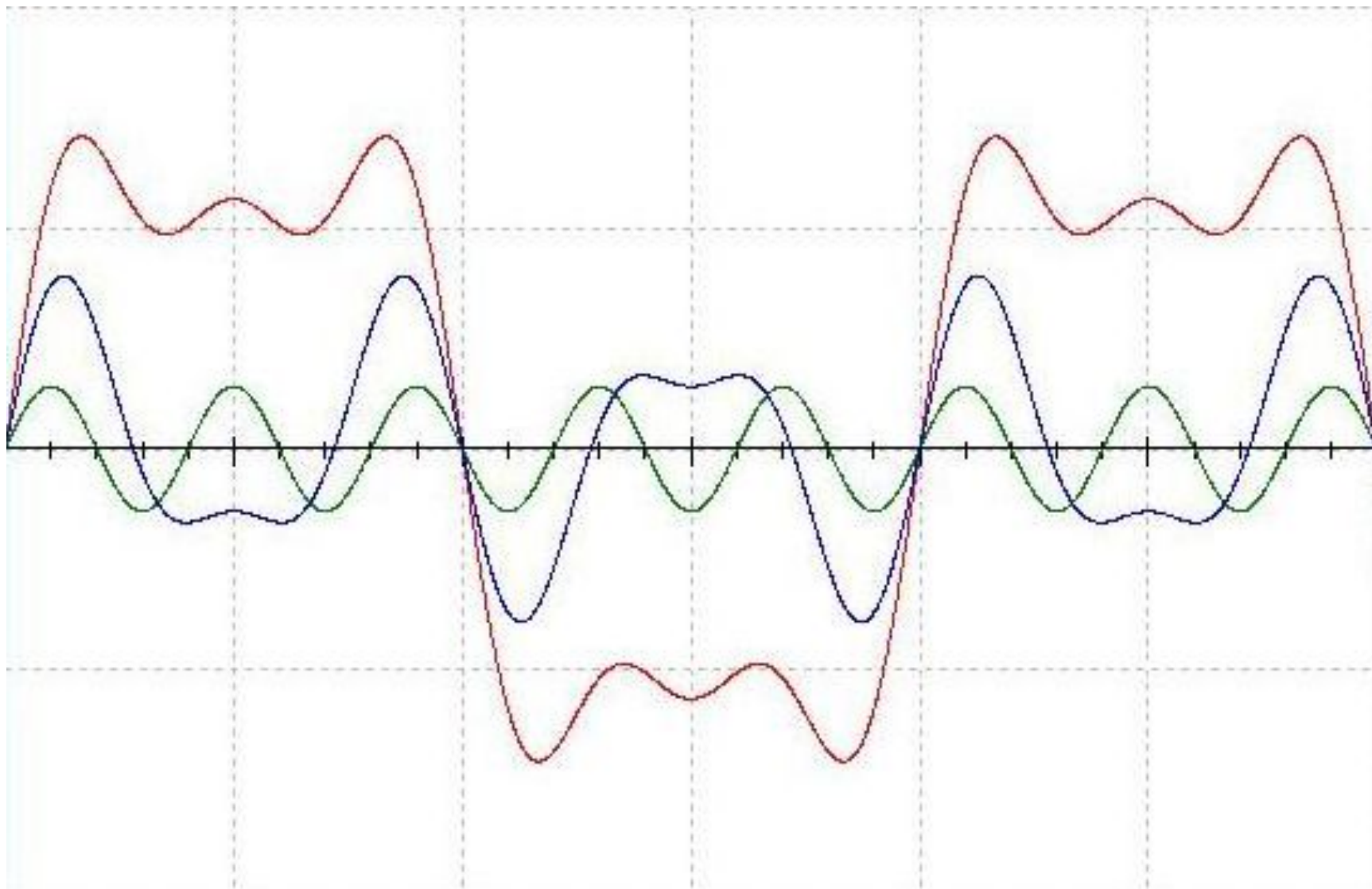
Используя равенства

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}; \quad \sin(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{j2}$$

получим, что комплексный коэффициент ряда Фурье

$$\underline{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

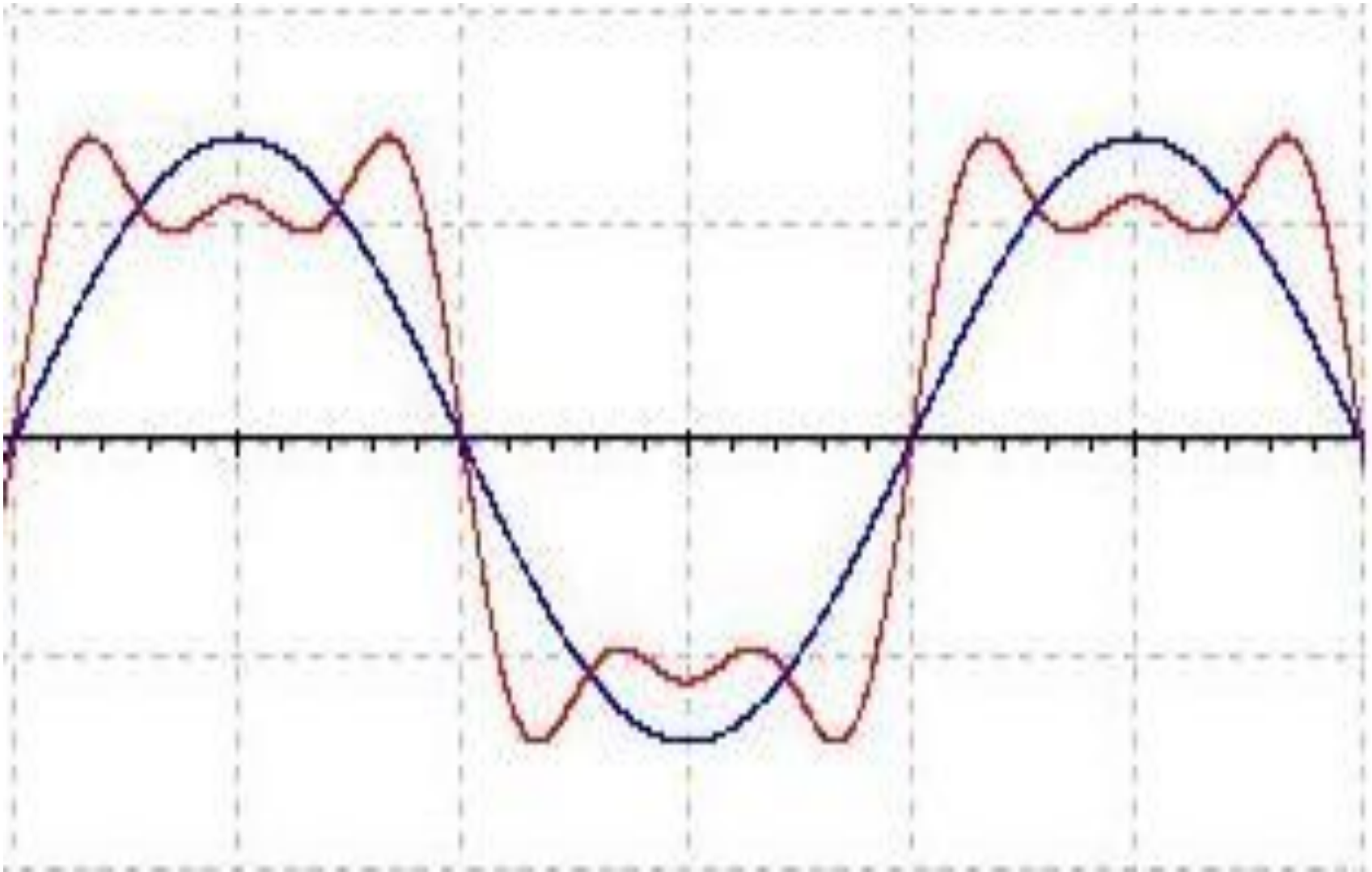
# Пример несинусоидальной функции





# Пример несинусоидальной функции

- Сигнал, состоящий из трех гармоник.



# Величины, характеризующие несинусоидальные токи

- Максимальное значение –  $I_{max}$

- Действующее значение  $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$

- Среднее по модулю значение  $I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt$

- Среднее за период значение (постоянная составляющая)  $I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i dt$

# Величины, характеризующие несинусоидальные токи

- Коэффициент амплитуды

$$\hat{e}_a = \frac{I_{max}}{I}$$

- Коэффициент формы

$$K_\phi = \frac{I}{I_{cp}}$$

- Коэффициент искажений

$$K_u = \frac{I_1}{I}$$

- Коэффициент гармоник

$$K_2 = \frac{\sqrt{\sum_{k=2} I_k^2}}{I_1}$$

## Величины, характеризующие несинусоидальные токи

- Действующим значением периодической несинусоидальной переменной называется среднеквадратичное за период значение величины:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

## Величины, характеризующие несинусоидальные токи

- На практике действующее значение переменной определяется на основе информации о действующих значениях конечного ряда гармонических.

$$I^2 = I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2$$

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$$

# Мощность в цепях периодического несинусоидального тока

- Допустим, ток и напряжение являются периодическими несинусоидальными функциями:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k)$$

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \beta_k)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k) \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \beta_k) \right] dt$$

# Мощность в цепях периодического несинусоидального тока

- Среднее за период значение произведения синусоидальных функций различной частоты равно нулю, тогда

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{km} I_{km}}{2} \cos(\alpha_k - \beta_k) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$$

Где  $\varphi_k = \alpha_k - \beta_k$

Реактивная

МОЩНОСТЬ

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k$$

# Мощность в цепях периодического несинусоидального тока

- Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2} \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- где  $T$  – *мощность искажений*, определяемая произведениями действующих значений разнопорядковых гармонических тока и напряжения.



# Рекомендуемая литература

---

- 1. Алтунин Б.Ю., Панкова Н.Г. Теоретические основы электротехники:** Комплекс учебно - методических материалов: Часть 1 / Б.Ю. Алтунин, Н.Г. Панкова; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2007.-130 с.
- 2. Алтунин Б.Ю., Кралин А.А. Электротехника и электроника:** комплекс учебно-методических материалов: Ч.1/ Б.Ю. Алтунин, А.А. Кралин; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2007.-98 с.
- 3. Алтунин Б.Ю., Кралин А.А. Электротехника и электроника:** комплекс учебно-методических материалов: Ч.2/ Б.Ю. Алтунин, А.А. Кралин; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2008.-98 с
- 4. Касаткин, А.С. Электротехника** /А.С. Касаткин, М.В. Немцов.-М.: Энергоатомиздат, 2000.
- 5. Справочное пособие по основам электротехники и электроники** /под. ред. А.В. Нетушила.-М.: Энергоатомиздат, 1995.
- 6. Манаев Е.И. Основы радиоэлектроники.**-3-е изд., перераб. И доп.-М.: Радио и связь, 1990.-512 с.: ил.
- 7. Новожилов, О. П. Электротехника и электроника:** учебник / О. П. Новожилов. – М.: Гардарики, 2008. – 653 с.

# Тема 8 Закончена

Благодарю за внимание