Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА

А.А. Башев

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Кафедра “Теоретическая и общая электротехника”

Для студентов электротехнических специальностей всех форм обучения

Тема 8

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОКАХ

Несинусоидальные токи

- Периодическими несинусоидальными токами и напряжениями называются токи и напряжения, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону

Разложение периодических функций. Характеристики несинусоидальных величин

Для анализа процессов в линейных электрических цепях при воздействии на них несинусоидальных токов или напряжений последние обычно разлагаются в ряд Фурье.

Ряд Фурье в тригонометрической форме

Ряд Фурье в тригонометрической форме

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t))$$

$\omega_1 = (2\pi / T)$ – угловая частота первой гармоники

Ряд Фурье в тригонометрической форме

Коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

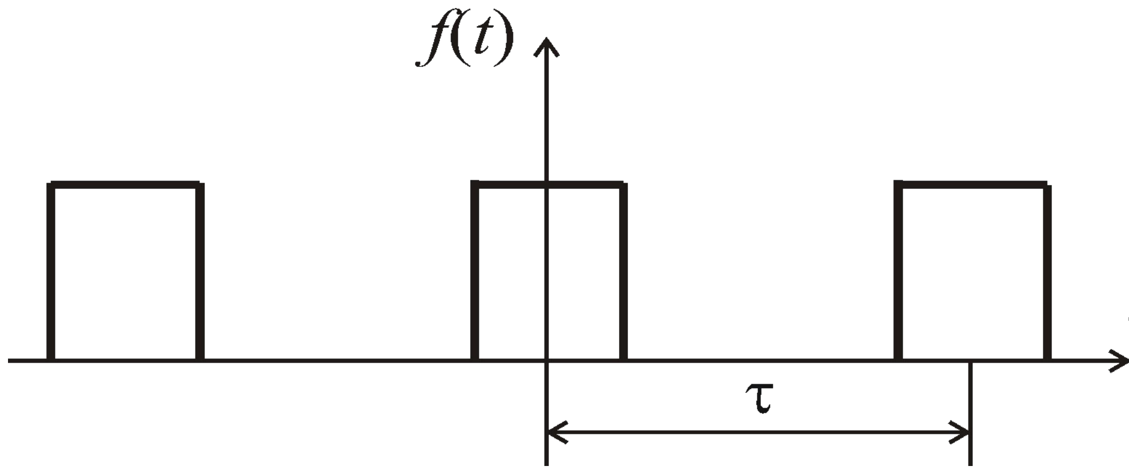
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_1 t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_1 t)dt$$

$a_0/2$ – постоянная составляющая, равная среднему значению функции $f(t)$ за период:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

Случаи симметрии

Случай 1. Четная функция: $f(t) = f(-t)$



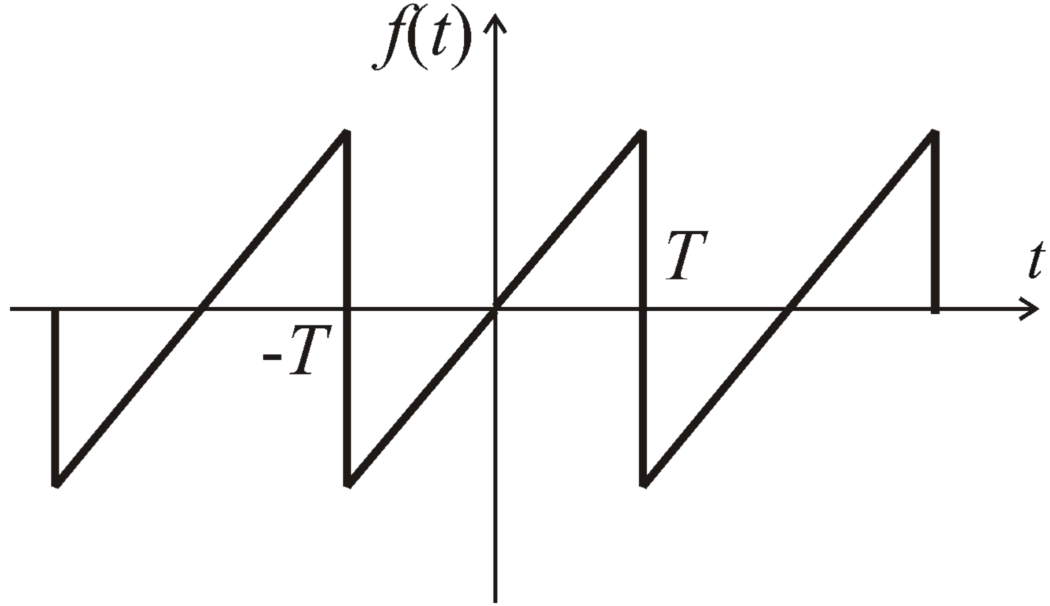
Разложение в ряд Фурье четной функции содержит только косинусы:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t)$$

Коэффициенты при синусных составляющих $b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$

Случаи симметрии

Случай 2. Нечетная функция: $-f(t) = f(-t)$



Разложение в ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 t)$$

Случаи симметрии

Случай 3. Функция *f*(*t*) симметрична относительно оси абсцисс при совмещении двух полупериодов во времени, т. е.

$$f(t) = -f(t + T/2).$$

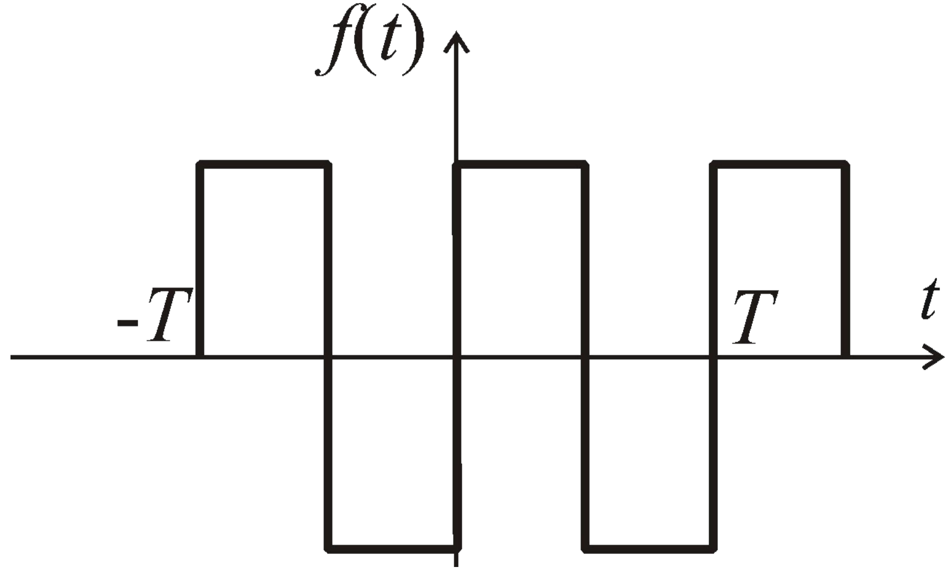
Четные гармоники, а также составляющая $a_0/2$ равны нулю, т. е.

$$a_n = b_n = 0, n = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots$$

Случаи симметрии

Пример – последовательность прямоугольных импульсов. Разложение в ряд Фурье такой функции содержит только нечетные гармоники:

$$f(t) = \frac{4U}{\pi}\left(\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t) + \ldots\right)$$



U – амплитуда прямоугольных импульсов.

Комплексная форма ряда Фурье

Ряд Фурье в тригонометрической форме

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t))$$

Воспользуемся равенствами:

$$\cos\left(n\omega_1 t\right) = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}; \sin\left(n\omega_1 t\right) = \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{j2}$$

Комплексная форма ряда Фурье

Ряд Фурье примет вид:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((a_n-jb_n)e^{jn\omega_1 t}+(a_n+jb_n)e^{-jn\omega_1 t})$$

Коэффициент a_n – четная, а b_n – нечетная функция индекса *n*:

$$a_n=a_{-n}\ ,\ b_n=-b_{-n}$$

Поэтому элемент $-jb_n$ можно рассматривать как слагаемое с отрицательным индексом.

Комплексная форма ряда Фурье

Изменив нижний предел суммирования на $-\infty$, получим

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{A}_n e^{jn\omega_1 t}$$

$\dot{A}_n = a_n - jb_n$ – комплексный коэффициент ряда Фурье.

В показательной форме: $\dot{A}_n = A^{j\psi}$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\ ,\ \Psi_n = -\mathrm{arctg}\left(b_n / a_n\right)$$

Комплексный частотный спектр

Совокупность комплексных коэффициентов гармоник $\dot{A}_n$ называют *комплексным частотным спектром* функции $f(t)$

Амплитуды гармоник A_n образуют *амплитудный спектр*.

Начальные фазы Ψ_n образуют *фазовый спектр*.

Комплексный частотный спектр

Комплексная амплитуда *n*-й гармоники

$$\dot{A}_n = a_n - jb_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\big(\cos(n\omega_1 t) - j\sin(n\omega_1 t)\big)dt$$

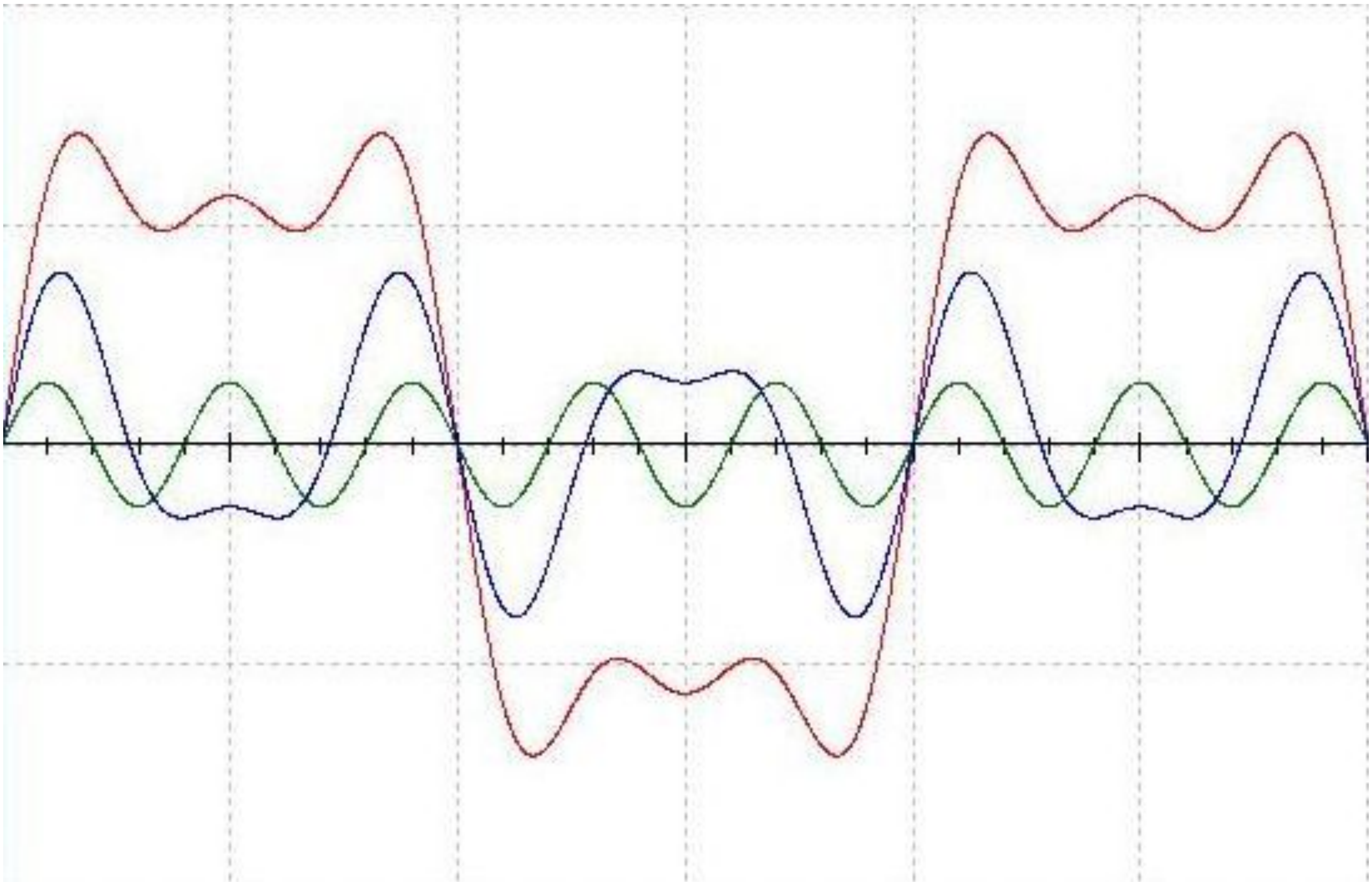
Используя равенства

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2};\ \sin(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{j2}$$

получим, что комплексный коэффициент ряда Фурье

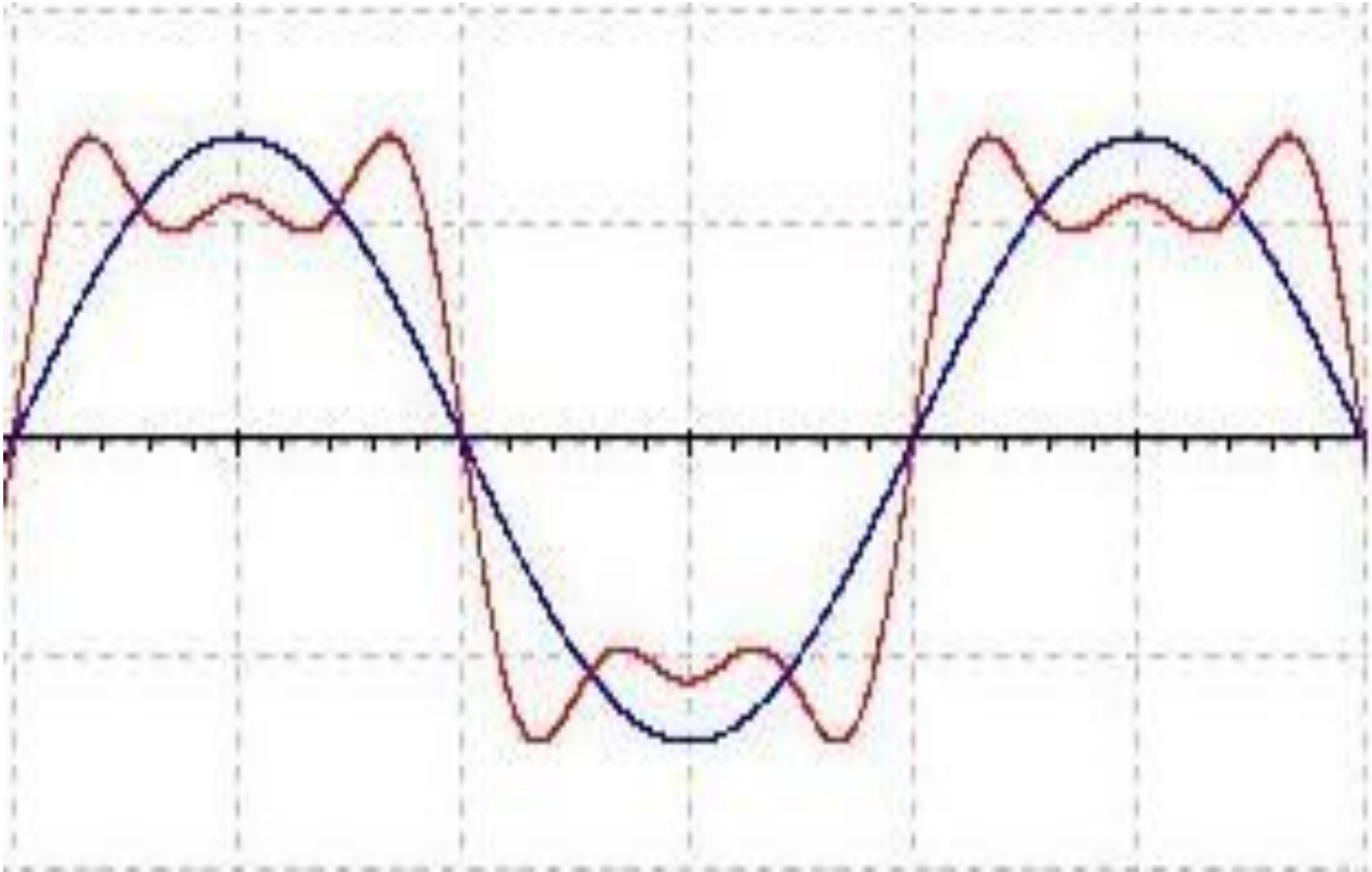
$$\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

Пример несинусоидальной функции



Пример несинусоидальной функции

- Сигнал, состоящий из трех гармоник.



Величины, характеризующие несинусоидальные токи

- Максимальное значение – I_{max}
- Действующее значение $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$
- Среднее по модулю значение $I_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T |i| dt$
- Среднее за период значение (постоянная составляющая) $I_0 = \frac{1}{T}\int_0^T i dt$

Величины, характеризующие несинусоидальные токи

- Коэффициент амплитуды $$\text{ê}_{\text{à}} = \frac{I\ max}{I}$$
- Коэффициент формы $$\kappa_{\phi} = \frac{I}{I_{cp}}$$
- Коэффициент искажений $$\kappa_{u} = \frac{I_1}{I}$$
- Коэффициент гармоник $$\kappa_{г} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{k=2} I_k^2}}{I_1}$$

Величины, характеризующие несинусоидальные токи

- *Действующим значением периодической несинусоидальной переменной* называется среднеквадратичное за период значение величины:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

Величины, характеризующие несинусоидальные токи

- На практике действующее значение переменной определяется на основе информации о действующих значениях конечного ряда гармонических.

$$I^2 = I_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2 \qquad I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}$$

Мощность в цепях периодического несинусоидального тока

- Допустим, ток и напряжение являются периодическими несинусоидальными функциями:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k) \qquad i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \beta_k)$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin\left(k\omega t + \alpha_k\right)\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin\left(k\omega t + \beta_k\right)\right]dt$$

Мощность в цепях периодического несинусоидального тока

- Среднее за период значение произведения синусоидальных функций различной частоты равно нулю, тогда

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{km} I_{km}}{2} \cos(\alpha_k - \beta_k) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k$$

Где $\varphi_k = \alpha_k - \beta_k$

Реактивная мощность

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin\varphi_k$$

Мощность в цепях периодического несинусоидального тока

- Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2} \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- где *T – мощность искажений*, определяемая произведениями действующих значений разнопорядковых гармонических тока и напряжения.

Рекомендуемая литература

1. Алтунин Б.Ю., Панкова Н.Г. Теоретические основы электротехники: Комплекс учебно - методических материалов: Часть 1 / Б.Ю. Алтунин, Н.Г. Панкова; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2007.-130 с.

2. Алтунин Б.Ю., Кралин А.А. Электротехника и электроника: комплекс учебно-методических материалов: Ч.1/ Б.Ю. Алтунин, А.А. Кралин; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2007.-98 с.

3. Алтунин Б.Ю., Кралин А.А. Электротехника и электроника: комплекс учебно-методических материалов: Ч.2/ Б.Ю. Алтунин, А.А. Кралин; НГТУ им. Р.Е. Алексеева. Н.Новгород, 2008.-98 с

4. Касаткин, А.С. Электротехника /А.С. Касаткин, М.В. Немцов.-М.: Энергоатомиздат, 2000.

5. Справочное пособие по основам электротехники и электроники /под. ред. А.В. Нетушила.-М.: Энергоатомиздат, 1995.

6. Манаев Е.И. Основы радиоэлектроники.-3-е изд., перераб. И доп.-М.: Радио и связь, 1990.-512 с.: ил.

7. Новожилов, О. П. Электротехника и электроника: учебник / О. П. Новожилов. – М.: Гардарики, 2008. – 653 с.

Тема 8 Закончена

Благодарю за внимание