Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Функция

- 1.1. Некоторые математические символы.

- Для краткой записи – кванторы.
- 1. => - квантор следования. (α => β – означает: из α следует β)
- 2. ⇔ - квантор эквивалентности (α эквивалентно β). В формулировке теорем символ соответствует словам «необходимо и достаточно» или «тогда и только тогда».
- 3. ∀ - квантор общности. Запись (∀ *x*:α) означает: « для любого *x* справедливо утверждение α.

- 4. ∃ - квантор существования. Запись (∀x:α) означает: существует по крайней мере один такой *X* для которого справедливо предложение α.

- <u>1.2. Множества</u>
- Множество – первоначальное понятие. A,B,C,…X,Y,Z.
- Элементы множества: a,b,c,..x,y,z.
- Конечное множество.
- Бесконечное множество.
- Пустое множество $\varnothing$

- Элемент принадлежит данному множеству:
- α∈*A*, элемент не принадлежит данному множеству: α∉*A*.
- Пересечение и объединение множеств.

$$A \cap B = C$$

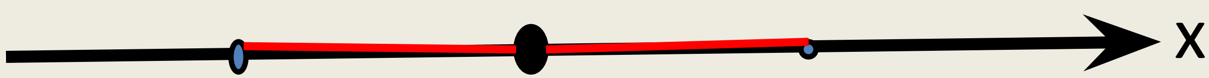
$$A \cup B = C$$

- Вещественные числа.
- Целые положительные числа 1,2,3,4… образуют мн-во натуральных чисел. N.

- Все числа вида $$\pm\frac{m}{n}\ (m \in N,\ n \in N)$$
- а также *0* образуют мн-во рациональных чисел: *C.*
- Иррациональные числа: *Q*
- Множество вещественных чисел: $R = C \cup Q$
- геометрически изображаются точками на числовой оси. Ось: прямая, указано положительное направление, начало отсчета и отрезок, длина кот. принята за единицу длины.

- <u>Абсолютная величина вещественного числа</u>
- Модуль. $|x|$
- определяется соотношениями:

$$|x| = \begin{cases} x, \ если \ x \geq 0 \\ -x, \ если \ x < 0 \end{cases}$$

- -x= $|x|$ x= $|x|$
- 

- x<0 x>0
- Геометрически: модуль *x* – расстояние от точки *x* до *0*

- Из определения:

$$\left|x_2 - x_1\right| = \begin{cases} x_2 - x_1,\ если\ x_2 \geq x_1 \\ -x(x_2 - x_1),\ если\ x_2 < x_1 \end{cases}$$

- Независимо от взаимного расположения точек – модуль представляет собой расстояние между ними.

- <u>Промежутки. Окрестности</u>.

- Открытый интервал – (а,в) или]a,b[это множество вещественных чисел, удовл.усл.

$$a < x < b$$

- Замкнутый интервал: [a,b],

$$a \le x \le b$$

- Полуоткрытые интервалы.
- Это конечные промежутки.
- Бесконечные промежутки:
- Множество вещественных чисел R обозначается символом: $(-\infty;+\infty)$
- Далее:

$$(x \in (a;+\infty)) \Leftrightarrow (x > a)$$

$$(x \in (-\infty; в]) \Leftrightarrow (x \le b)$$

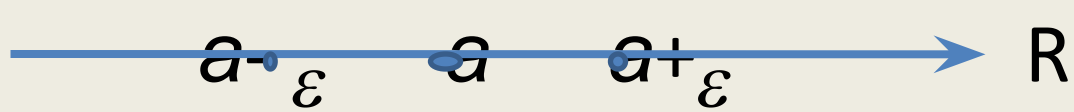
- Окрестность точки: числовое множество

$$R_\varepsilon(a)$$

- Пусть $\varepsilon > 0$
- По определению:

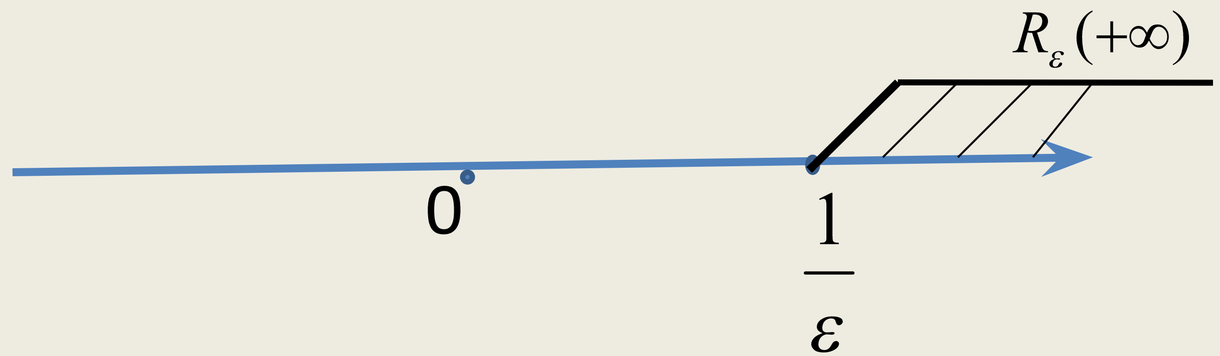
$$R_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \ \ \text{или}$$

$$(x \in R_\varepsilon(a)) \Leftrightarrow (a-\varepsilon < x < a+\varepsilon)$$

- Геометрически – это отрезок длины 2ε
- с серединой в точке *a* без включения концевых точек. Конечная точка.
- 

- Введем три бесконечные точки, определив их ε окрестности. $\varepsilon > 0$
- 1). $$R_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \ \ или$$

$$(x \in R_\varepsilon(+\infty)) \Leftrightarrow (x > \frac{1}{\varepsilon})$$

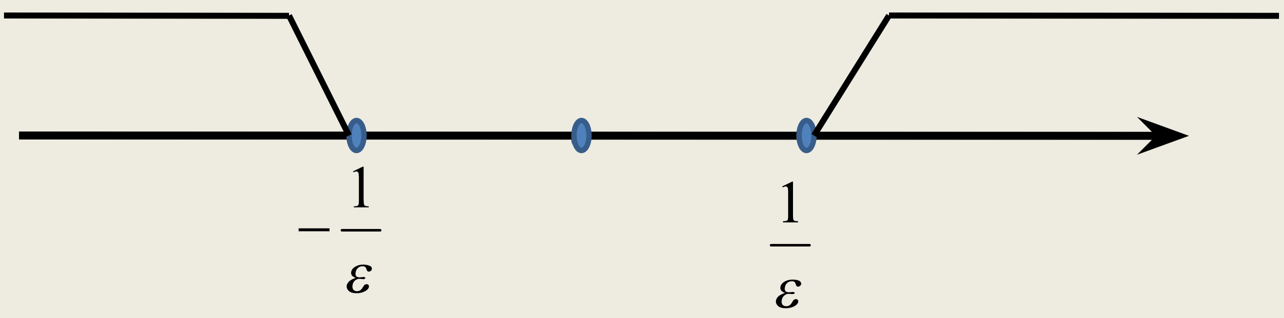
- 

$$R_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \text{ или}$$

$$(x \in R_\varepsilon(-\infty)) \Leftrightarrow (x < -\frac{1}{\varepsilon})$$

$$R_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \text{ или}$$

$$(x \in R_\varepsilon(\infty)) \Leftrightarrow (|x| > \frac{1}{\varepsilon})$$



- Левая и правая ε окрестности. По определению:

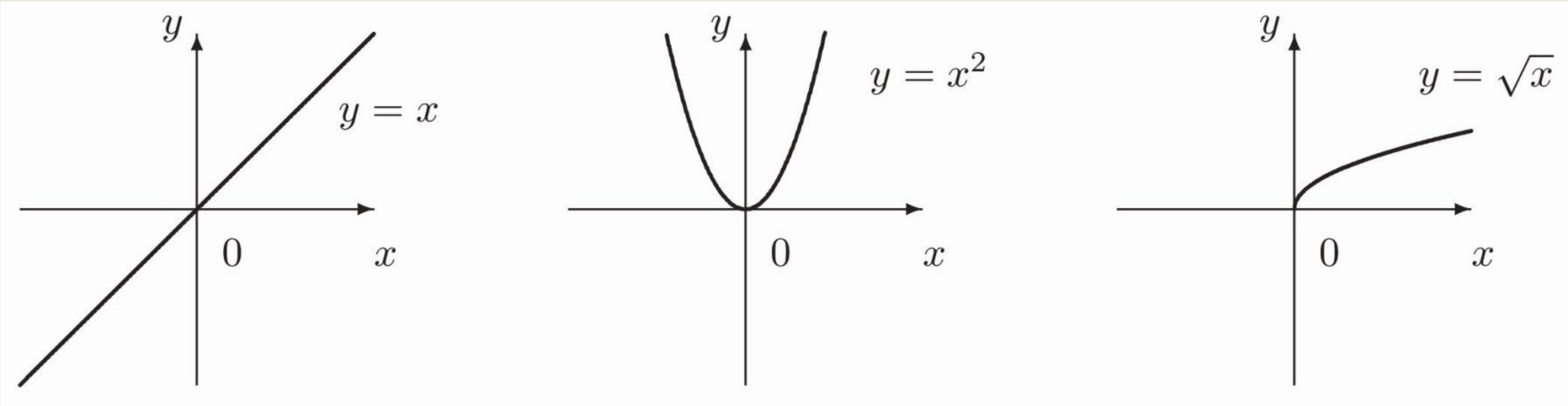
$$R_{-\varepsilon}(a) = (a-\varepsilon, a)$$

$$R_{+\varepsilon}(a) = (a, a+\varepsilon)$$

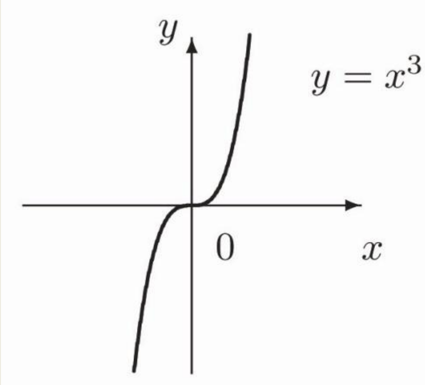
- <u>Функция</u>

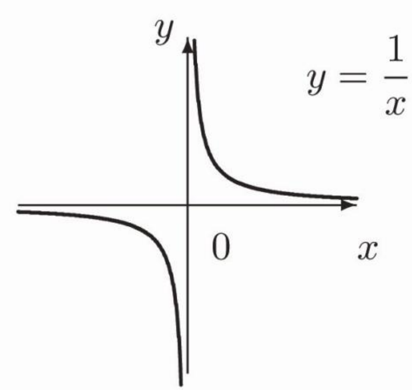
- **Определение**. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то это соответствие называется **функцией** (отображением), определённой на множестве X со значениями в множестве Y. Элемент x называется аргументом, а множество X – областью определения функции $f(x)$. Элемент y, поставленный в соответствие элементу x называется значением функции f в точке x. Обозначение: $y = f(x)$.

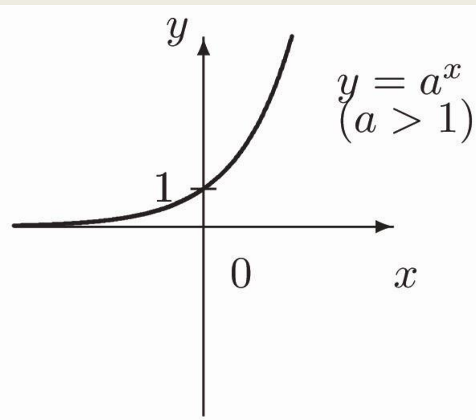
- К основным элементарным функции относятся:
- степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$;
- показательная функция $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\,x$, $y = \mathrm{ctg}\,x$;

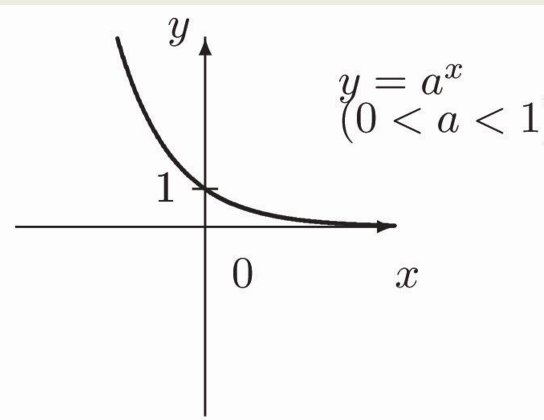


- обратные тригонометрические функции
  y = arcsin$x$, y = arccos$x$, y = arctg$x$, y = arcctg$x$.

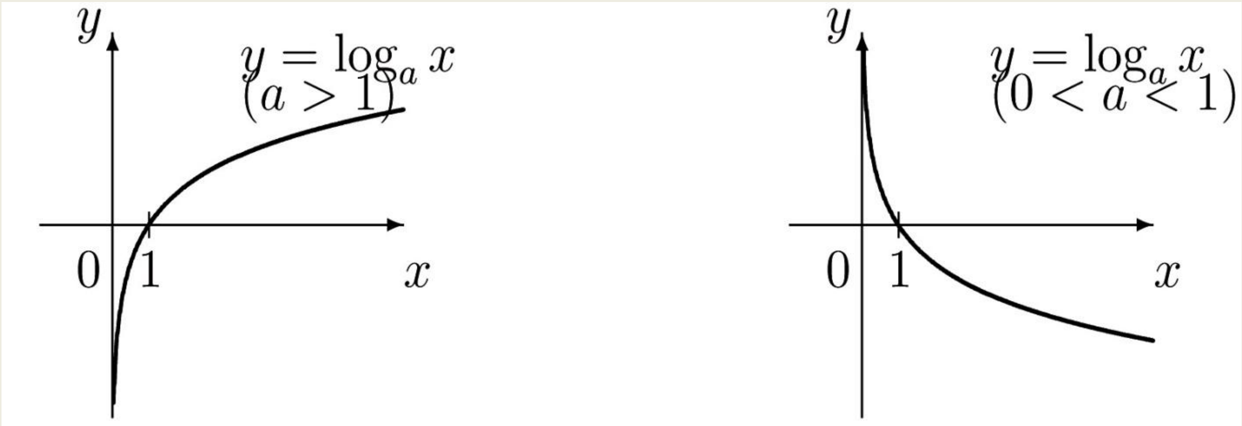


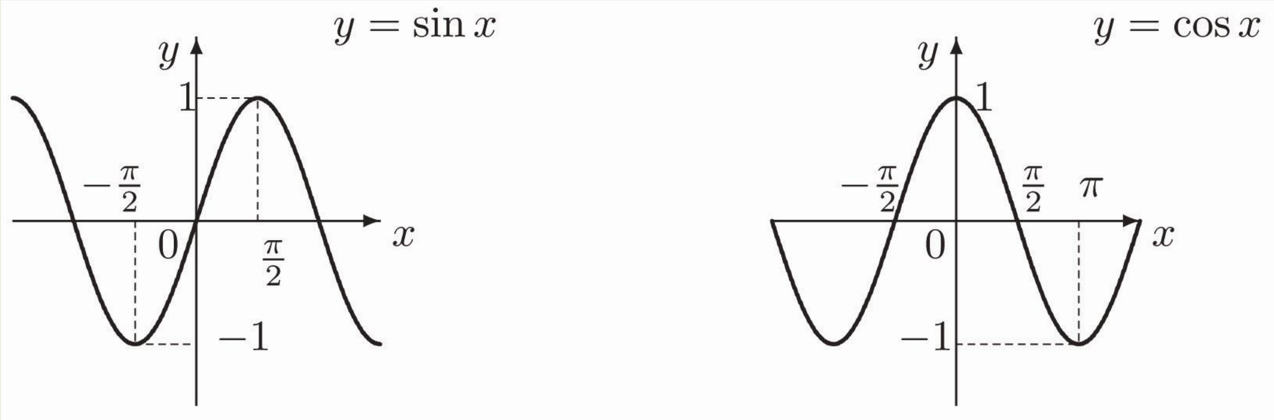




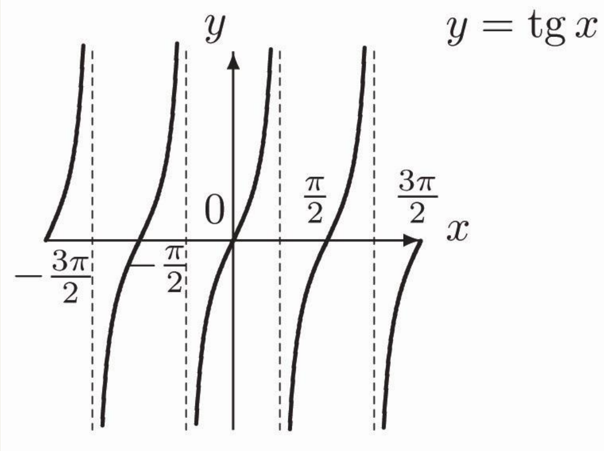


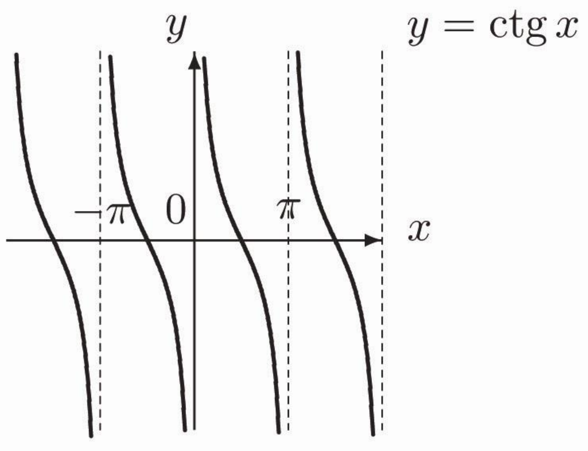
- Продолжение.

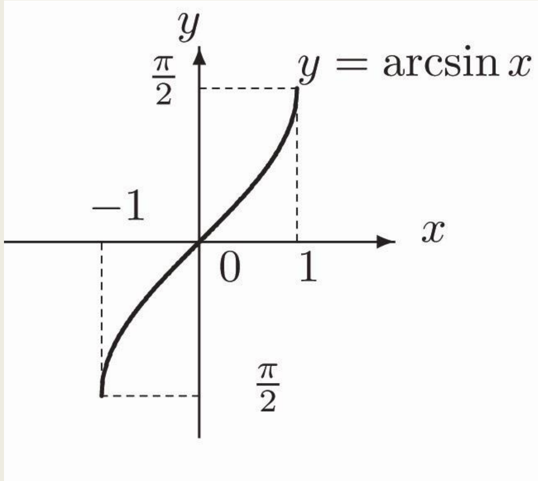


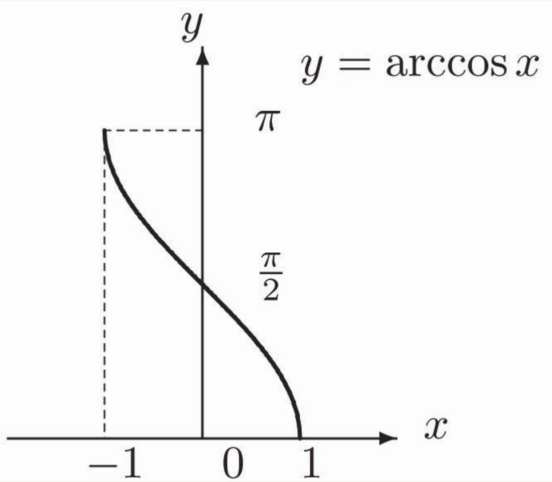


• Продолжение.

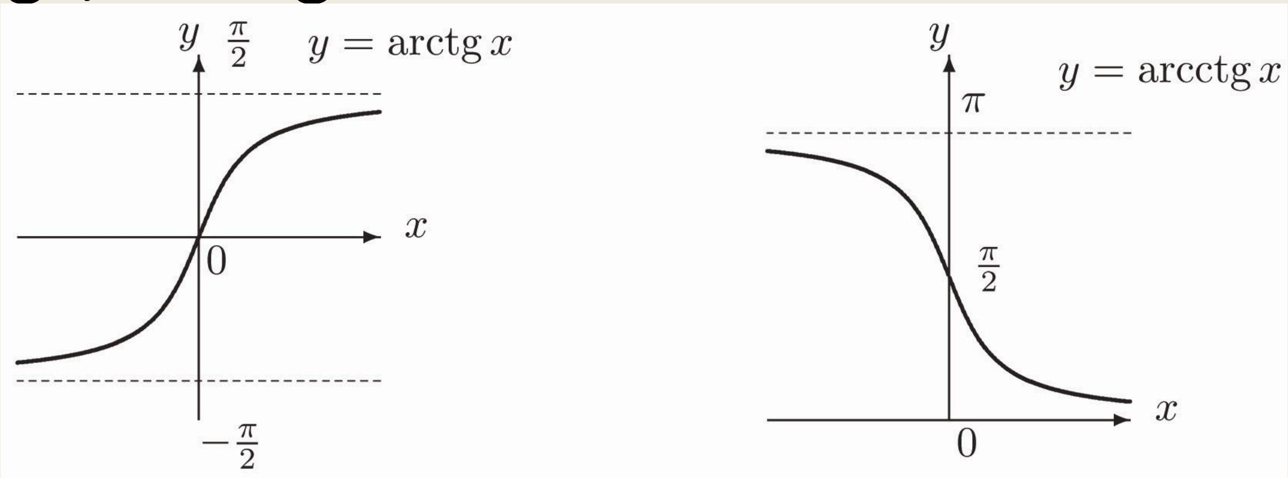








- arctgx, arcctgx:



Если *y = f*(*u*)*, u = ϕ*(*x*)*,* то функция *y = f*(*φ*(*x*)) называется **сложной функцией** (функцией от функции, суперпозицией функций) аргумента *x*; аргумент *u* функции *f* называется промежуточным. Например, если $y = \sqrt{u}$ и *U=sinx*

$y = \sqrt{\sin x}$

- то суперпозицией этих функций является

.

- **Свойства функций.**
- Функция называется **чётной**, если $f(-x) = f(x)$, и **нечётной**, если $f(-x) = -f(x)$. Например, x, x^3, $1/x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ (см.рис.) – нечётные функции, а x^2, $\cos x$ – чётные функции.
- Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е.
- $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- и **убывающей** на X, если
- $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

- Если неравенства нестрогие, то функции называются соответственно неубывающей и невозрастающей. Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие на X функции называются **монотонными**. Например, a^x, $log_a x$ (см. рис.) – монотонные функции, возрастающие при $a > 1$ и убывающие при $0 < a < 1$.
- Функция $f(x)$ называется **ограниченной** на X, если существует число $M > 0$, при котором выполняется
- $|f(x)| < M$ для $\forall x \in X$. Например, $\sin x$, $\cos x$ (см. рис.), $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$ – ограниченные функции.

- Функция *f*(*x*) называется **периодической**, если существует $T > 0$, при котором выполняется $f(x + T) = f(x)$ для всех $x \in R$. *T* – период функции, число nT также является ее периодом.
- ***Рациональные и дробно-рациональные функции***
- Целая рациональная функция (многочлен, полином) имеет вид

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

- $n \in N$.
- Если *a* является корнем многочлена, то

$$P_n(x) = (x - a) \cdot P_{n-1}(x)$$

- Дробно–рациональная функция (рациональная дробь) имеет вид

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

- где $Q_m(x), P_n(x)$
- – многочлены степени *m* и *n* соответственно. При *m* < *n* рациональная дробь называется правильной, в противном случае – неправильной.