

# Дифференциальное исчисление функции одной переменной

# 1. Функция

- 1.1. Некоторые математические символы.
- Для краткой записи – кванторы.
- 1.  $\Rightarrow$  - квантор следования. ( $\alpha \Rightarrow \beta$  – означает: из  $\alpha$  следует  $\beta$ )
- 2.  $\Leftrightarrow$  - квантор эквивалентности ( $\alpha$  эквивалентно  $\beta$ ). В формулировке теорем символ соответствует словам «необходимо и достаточно» или «тогда и только тогда».
- 3.  $\forall$  - квантор общности. Запись ( $\forall x:\alpha$ ) означает: « для любого  $x$  справедливо утверждение  $\alpha$ .

- **4.**  $\exists$  - квантор существования. Запись ( $\forall x:\alpha$ ) означает: существует по крайней мере один такой  $X$  для которого справедливо предложение  $\alpha$ .

- 1.2. Множества

- Множество – первоначальное понятие.  
 $A, B, C, \dots X, Y, Z$ .
- Элементы множества:  $a, b, c, \dots x, y, z$ .
- Конечное множество.
- Бесконечное множество.
- Пустое множество  $\emptyset$

- Элемент принадлежит данному множеству:
- $\alpha \in A$ , элемент не принадлежит данному множеству:  $\alpha \notin A$ .
- Пересечение и объединение множеств.

$$A \cap B = C$$

$$A \cup B = C$$

- Вещественные числа.
- Целые положительные числа 1,2,3,4... образуют мн-во натуральных чисел.  $\mathbb{N}$ .

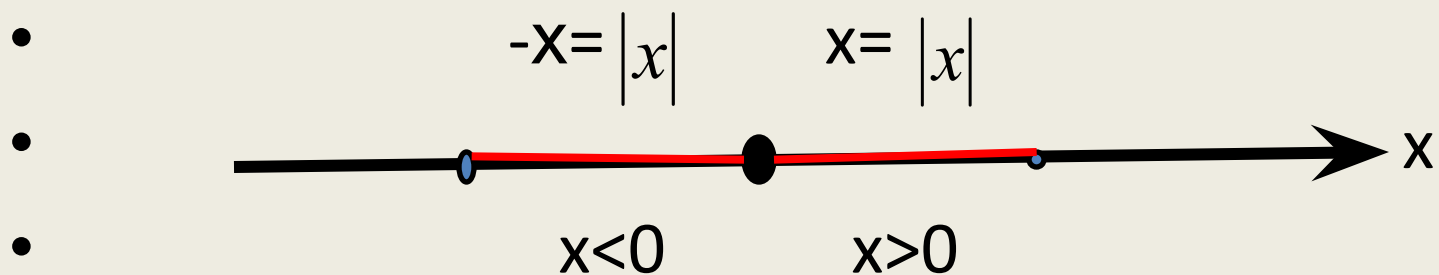
- Все числа вида  $\pm \frac{m}{n}$  ( $m \in N, n \in N$ )
- а также 0 образуют мн-во рациональных чисел:  $S$ .
- Иррациональные числа:  $Q$
- Множество вещественных чисел:  $R = S \cup Q$
- геометрически изображаются точками на числовой оси. Ось: прямая, указано положительное направление, начало отсчета и отрезок, длина кот. принята за единицу длины.

- Абсолютная величина вещественного числа

- Модуль.

- $|x|$  определяется соотношениями:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$



- Геометрически: модуль  $x$  – расстояние от точки  $x$  до  $0$

- Из определения:

$$|x_2 - x_1| = \begin{cases} x_2 - x_1, & \text{если } x_2 \geq x_1 \\ -x(x_2 - x_1), & \text{если } x_2 < x_1 \end{cases}$$

- Независимо от взаимного расположения точек – модуль представляет собой расстояние между ними.
  - Промежутки. Окрестности.
- Открытый интервал –  $(a, b)$  или  $]a, b[$  это множество вещественных чисел, удовл. усл.

$$a < x < b$$

- Замкнутый интервал:  $[a, b]$ ,

$$a \leq x \leq b$$

- Полуоткрытые интервалы.
- Это конечные промежутки.
- Бесконечные промежутки:
- Множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$  обозначается символом:  $(-\infty; +\infty)$
- Далее:

$$(x \in (a; +\infty)) \Leftrightarrow (x > a)$$

$$(x \in (-\infty; b]) \Leftrightarrow (x \leq b)$$



- Окрестность точки: числовое множество

$$R_\varepsilon(a)$$

- Пусть  $\varepsilon > 0$
- По определению:

$$R_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \text{ или}$$

$$(x \in R_\varepsilon(a)) \Leftrightarrow (a - \varepsilon < x < a + \varepsilon)$$

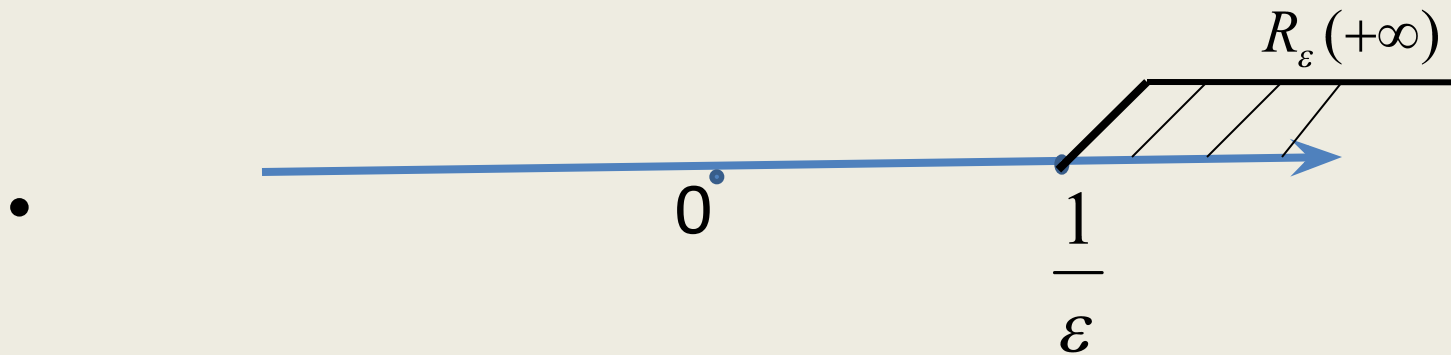
- Геометрически – это отрезок длины  $2\varepsilon$
- с серединой в точке  $a$  без включения концевых точек. Конечная точка.



- Введем три бесконечные точки, определив их окрестности.  $\varepsilon > 0$

- 1).  $R_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$  или

$$(x \in R_\varepsilon(+\infty)) \Leftrightarrow \left(x > \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

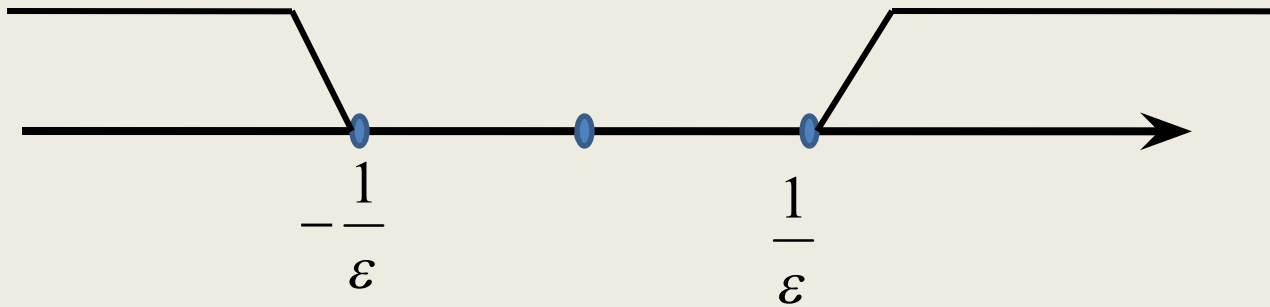


$$R_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \text{ или}$$

$$(x \in R_\varepsilon(-\infty)) \Leftrightarrow (x < -\frac{1}{\varepsilon})$$

$$R_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \text{ или}$$

$$(x \in R_\varepsilon(\infty)) \Leftrightarrow (|x| > \frac{1}{\varepsilon})$$



- Левая и правая  $\varepsilon$  окрестности. По определению:

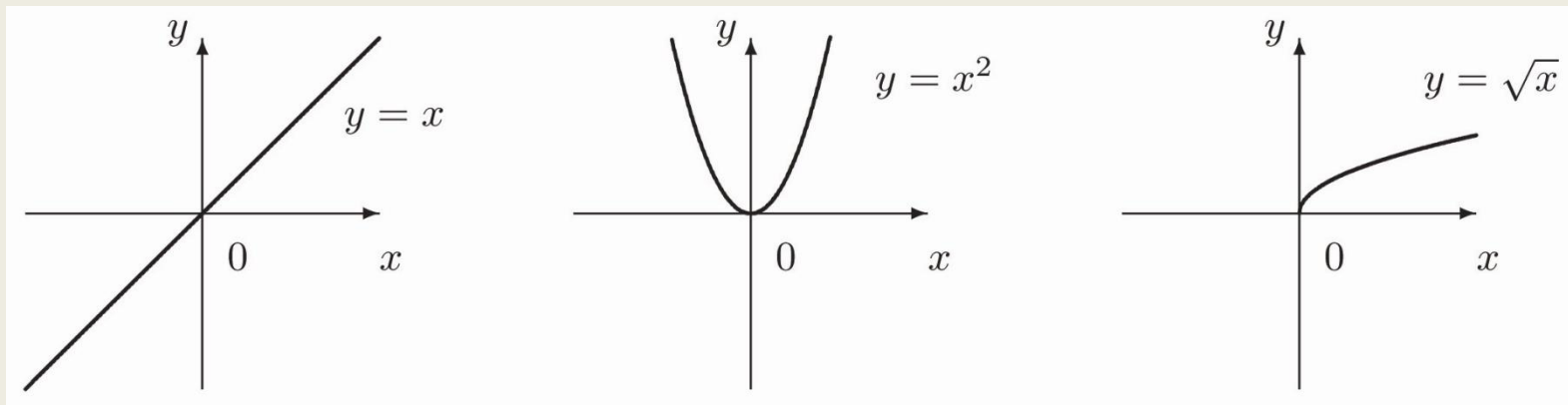
$$R_{-\varepsilon}(a) = (a - \varepsilon, a)$$

$$R_{+\varepsilon}(a) = (a, a + \varepsilon)$$

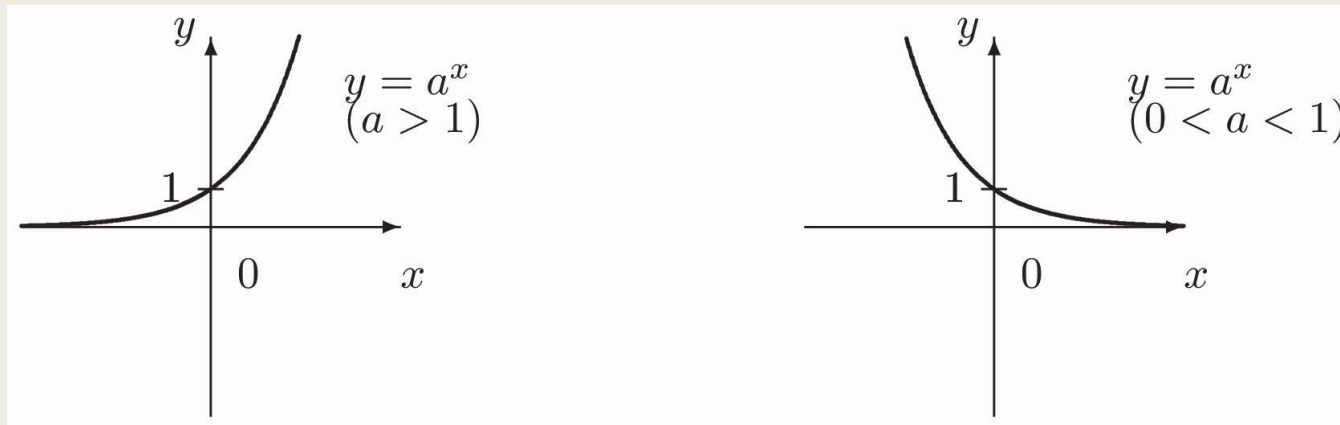
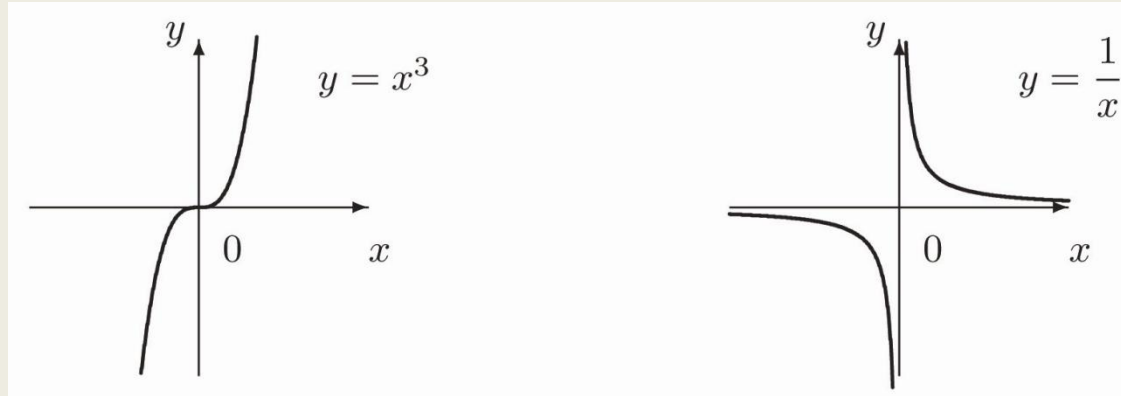
- ФУНКЦИЯ

- **Определение.** Если каждому элементу  $x \in X$  ставится в соответствие единственный элемент  $y \in Y$ , то это соответствие называется **функцией** (отображением), определённой на множестве  $X$  со значениями в множестве  $Y$ . Элемент  $x$  называется аргументом, а множество  $X$  – областью определения функции  $f(x)$ . Элемент  $y$ , поставленный в соответствие элементу  $x$  называется значением функции  $f$  в точке  $x$ . Обозначение:  $y = f(x)$ .

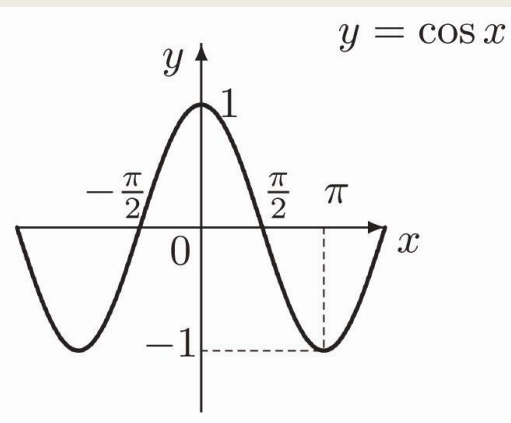
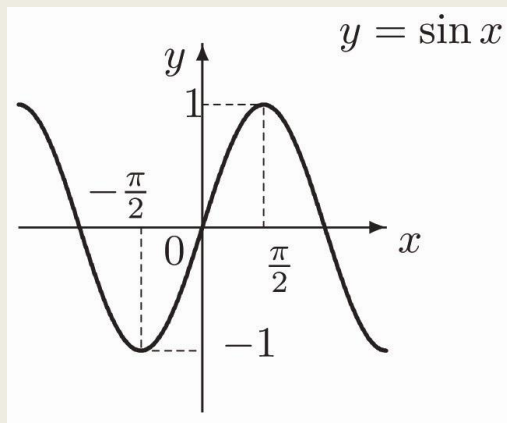
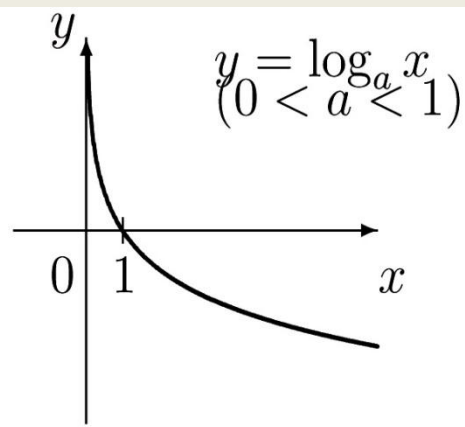
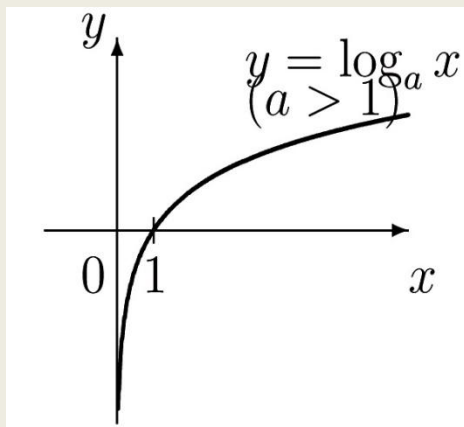
- К основным элементарным функции относятся:
- степенная функция  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha \in R$ ,  $\alpha \neq 0$ ;
- показательная функция  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- логарифмическая функция  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- тригонометрические функции  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  
 $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ;



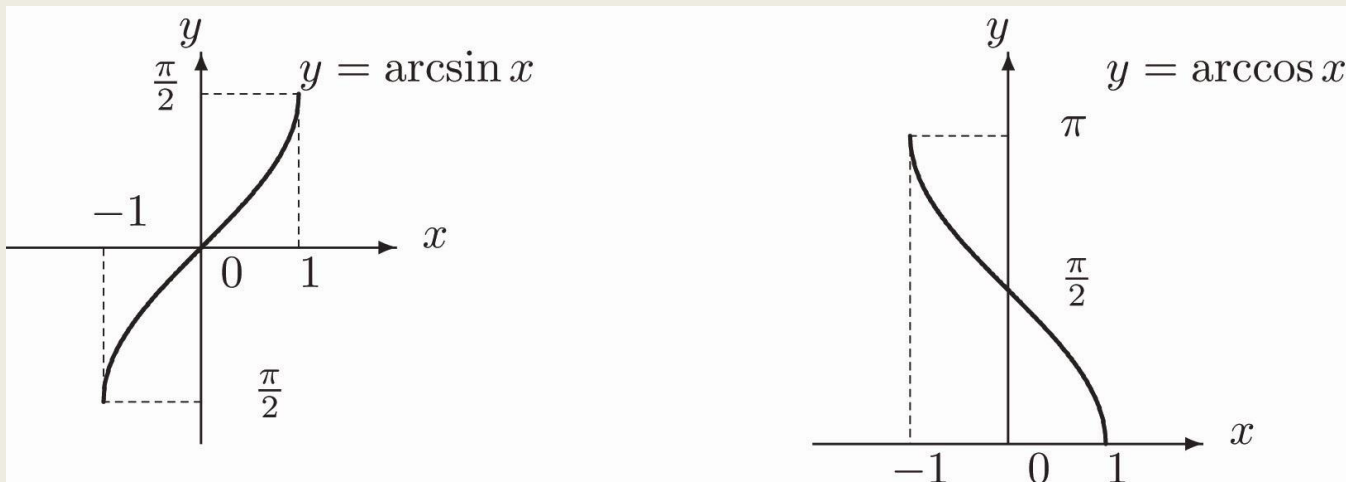
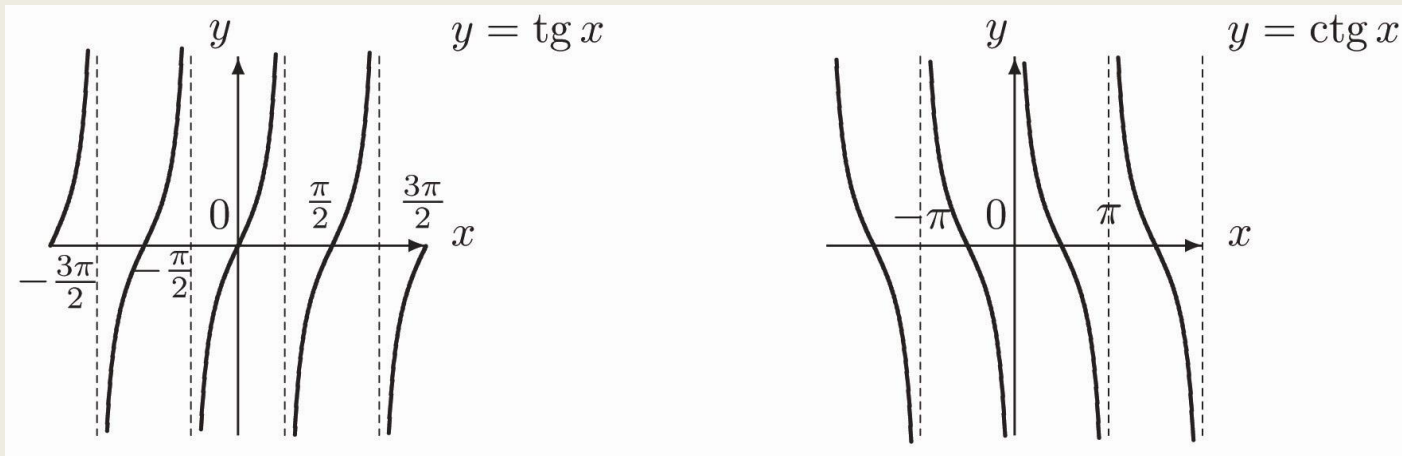
- обратные тригонометрические функции  
 $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ .



- Продолжение.

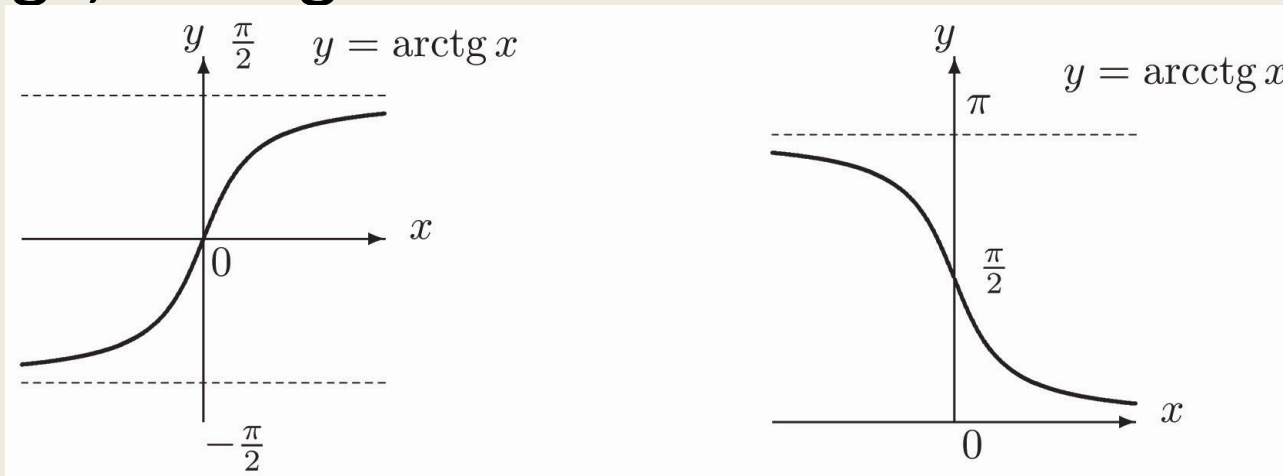


- Продолжение.





- $\text{arctg}x, \text{arcctg}x$ :



Если  $y = f(u)$ ,  $u = \phi(x)$ , то функция  $y = f(\phi(x))$  называется **сложной функцией** (функцией от функции, суперпозицией функций) аргумента  $x$ ; аргумент  $u$  функции  $f$  называется промежуточным. Например, если  $y = \sqrt{u}$  и

$$u = \sin x$$

$$y = \sqrt{\sin x}$$

- то суперпозицией этих функций является

.

- **Свойства функций.**
- Функция называется **чётной**, если  $f(-x) = f(x)$ , и **нечётной**, если  $f(-x) = -f(x)$ . Например,  $x, x^3, 1/x, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \operatorname{arcsin} x, \operatorname{arctg} x$  (см.рис.) – нечётные функции, а  $x^2, \cos x$  – чётные функции.
- Функция  $f(x)$  называется **возрастающей** на  $X$ , если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е.
- $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ,
- и **убывающей** на  $X$ , если
- $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

- Если неравенства нестрогие, то функции называются соответственно неубывающей и невозрастающей. Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие на  $X$  функции называются **МОНОТОННЫМИ**.  
Например,  $a^x$ ,  $\log_a x$  (см. рис.) – монотонные функции, возрастающие при  $a > 1$  и убывающие при  $0 < a < 1$ .
- Функция  $f(x)$  называется **ограниченной** на  $X$ , если существует число  $M > 0$ , при котором выполняется  

$$|f(x)| < M \text{ для } \forall x \in X.$$
Например,  $\sin x$ ,  $\cos x$  (см. рис.),  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arcctg} x$  – ограниченные функции.

- Функция  $f(x)$  называется **периодической**, если существует  $T > 0$ , при котором выполняется  $f(x + T) = f(x)$  для всех  $x \in R$ .  $T$  – период функции, число  $nT$  также является ее периодом.

- **Рациональные и дробно-рациональные функции**

- Целая рациональная функция (многочлен, полином) имеет вид

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

- $n \in N$ .

- Если  $a$  является корнем многочлена, то

$$P(x) = (x - a) \cdot P_{n-1}(x)$$

- Дробно–рациональная функция (рациональная дробь) имеет вид

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

- где  $Q_m(x), P_n(x)$
- – многочлены степени  $m$  и  $n$  соответственно. При  $m < n$  рациональная дробь называется правильной, в противном случае – неправильной.