Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений и систем

Пусть требуется найти частное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ — заданные числа.

Будем считать, что искомая функция $y(t)$ вместе с ее рассматриваемыми производными и функция $f(t)$ являются оригиналами.

Пусть $y(t) \doteqdot Y(p) = Y$ и $f(t) \doteqdot F(p) = F$. Пользуясь свойствами дифференцирования оригинала и линейности, перейдем в уравнении (1) от оригиналов к изображениям:

$$(p^n Y - p^{n-1} c_0 - p^{n-2} c_1 - \ldots - c_{n-1}) + a_1 (p^{n-1} Y - p^{n-2} c_0 - \ldots - c_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(pY - c_0) + a_n Y = F.$$

Полученное уравнение называют *операторным* (или уравнением в изображениях). Разрешим его относительно Y:

$$Y(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n) = F + c_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) + \\ + c_1(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}) + \ldots + c_{n-1},$$

т. е. $Y(p) \cdot Q_n(p) = F(p) + R_{n-1}(p)$, где $Q_n(p)$ и $R_{n-1}(p)$ — алгебраические многочлены от p степени n и $n-1$ соответственно.

Из последнего уравнения находим

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \tag{2}$$

Полученное равенство называют *операторным решением* дифференциального уравнения (1). Оно имеет более простой вид, если все начальные условия равны нулю, т. е. $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$. В этом случае $Y(p) = \dfrac{F(p)}{Q_n(p)}$.

Находя оригинал $y(t)$, соответствующий найденному изображению (2), получаем, в силу теоремы единственности, частное решение дифференциального уравнения (1).

Замечание. Полученное решение $y(t)$ во многих случаях оказывается справедливым при всех значениях t (а не только при $t \geqslant 0$).

Пример 1. Решить операционным методом дифференциальное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$ при условиях $y(0) = 2, y'(0) = 6$.

❍ Решение: Пусть $y(t) \doteqdot Y(p) = Y$. Тогда

$$y'(t) \doteqdot pY - y(0) = pY - 2,$$

$$y''(t) \doteqdot p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 2p - 6,$$

$$\text{и} \quad e^{3t} \doteqdot \frac{1}{p-3}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, получаем операторное уравнение: $p^2Y - 2p - 6 - 3(pY - 2) + 2Y = 12\frac{1}{p-3}$. Отсюда $Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$. Находим $y(t)$. Можно разбить дробь на сумму простейших ($Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}$), но так как корни знаменателя ($p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$) простые, то удобно воспользоваться второй теоремой разложения

$$A(p) = 2p^2 - 6p + 12,$$

$$B'(p) = (p-2)(p-3) + (p-1)(p-3) + (p-1)(p-2).$$

Получаем:

$$y(t) = \frac{8}{(-1)\cdot(-2)}e^{1\cdot t} + \frac{8}{1\cdot(-1)}e^{2\cdot t} + \frac{12}{2\cdot 1}e^{3\cdot t} = 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}. \quad ●$$

Элементы теории функций комплексного переменного

Пусть даны два множества D и E, элементами которых являются комплексные числа. Числа $z = x + iy$ множества D будем изображать точками комплексной плоскости z, а числа $w = u + iv$ множества E — точками комплексной плоскости w.

Если каждому числу (точке) $z \in D$ по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное число (точка) $w \in E$, то говорят, что на множестве определена ***однозначная функция комплексного переменного*** $w = f(z)$, отображающая множество D в множество E (см. рис.).

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько значений w, то функция $w = f(z)$ называется *многозначной*.

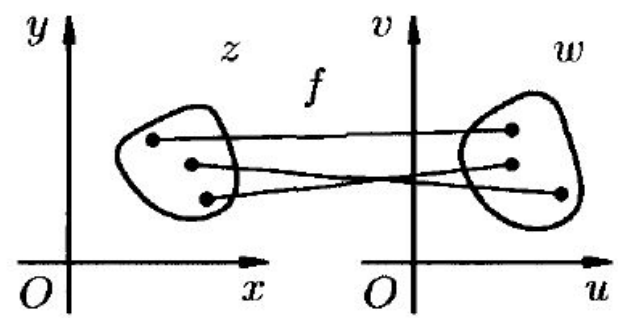

Рис.

Множество D называется *областью определения* функции $w = f(z)$; множество E_1 всех значений w, которые $f(z)$ принимает на E, называется *областью значений* этой функции (если же каждая точка множества E является значением функции, то E — область значений функции; в этом случае функция f отображает D на E).

Далее, как правило, будем рассматривать такие функции $w = f(z)$, для которых множества D и E_1 являются областями. *Областью* комплексной плоскости называется множество точек плоскости, обладающих свойствами открытости и связности.

Функцию $w = f(z)$ можно записать в виде

$$u + iv = f(x + iy),$$

т. е.

$$f(x + iy) = u(x; y) + iv(x; y),$$

где

$$u = u(x; y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v = v(x; y) = \operatorname{Im} f(z), \quad (x; y) \in D.$$

Функцию $u(x; y)$ при этом называют *действительной частью функции* $f(z)$, а $v(x; y)$ — *мнимой*.

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

Пример . Найти действительную и мнимую части функции $w = z^2$.

❍ Решение: Функцию $w = z^2$ можно записать в виде $u + iv = (x + iy)^2$, т. е.

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Отсюда следует: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. ●

Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, исключая, может быть, саму точку z_0. Под *δ-окрестностью точки* z_0 комплексной плоскости понимают внутренность круга радиуса δ с центром в точке z_0.

Число w_0 называется ***пределом функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z_0 (или при $z \to z_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Это определение коротко можно записать так:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon\right) \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Из определения следует, что если предел w_0 существует, то существуют и пределы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x;y) = u_0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x;y) = v_0.$$

Верно и обратное утверждение.

Теоремы об арифметических свойствах пределов для функции одного (или нескольких) действительного переменного остаются справедливыми и для функции комплексного переменного. Так, если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют пределы в точке $z_0 \in D$, то

$$\lim_{z \to z_0} (c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)) = c_1 \lim_{z \to z_0} f_1(z) \pm c_2 \lim_{z \to z_0} f_2(z),$$

где c_1, c_2 — постоянные;

$$\lim_{z \to z_0} f_1(z) \cdot f_2(z) = \lim_{z \to z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \to z_0} f_2(z)$$

и

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} f_2(z)},$$

если $\lim\limits_{z \to z_0} f_2(z) \neq 0$.

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке $z = z_0$ и в некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение непрерывности можно сформулировать и так: функция $f(x)$ непрерывна в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f(z) = 0.$$

Функция $f(z)$ непрерывна в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Основные элементарные функции комплексного переменного

Показательная функция

Показательная функция $w = e^z$ определяется формулой

$$w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (1)$$

Положив в этом равенстве $y = 0$, устанавливаем, что для действительных значений $z = x$ показательная функция e^z совпадает с показательной функцией действительного переменного: $e^z = e^x$.

Показательная функция $w = e^z$ обладает «известным» свойством: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Действительно, по правилу умножения комплексных чисел («модули перемножаются, а аргументы складываются»), имеем:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) =$$

$$= e^{x_1+x_2} \cdot (\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)) = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

Аналогично можно убедиться в справедливости свойств: $e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$, $(e^z)^n = e^{nz}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Учитывая, что $|e^z| = e^x$, а $e^x \neq 0$, утверждаем, что показательная функция e^z нигде в нуль не обращается, т. е. $e^z \neq 0$.

Исходя из определения (1), легко убедиться, что

$$\lim_{\substack{\mathrm{Re}\, z\to-\infty \\ (x\to-\infty)}} e^z = 0, \qquad \lim_{\substack{\mathrm{Re}\, z\to+\infty \\ (x\to+\infty)}} e^z = \infty,$$

выражение e^z при $z \to \infty$ не имеет смысла.

Положив в равенстве (1) $x = 0$, $y = \varphi$, получим классическую формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. С ее помощью, в частности, можно представить тригонометрическую форму комплексного числа $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в более компактной форме $z = r\cdot e^{i\varphi} (= |z|\cdot e^{i\arg z})$, называемой *показательной формой* комплексного числа

Показательная функция комплексного переменного обладает и специфическим свойством: она является ***периодической*** с мнимым основным периодом $2\pi i$.

☐ Действительно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z,$$

т. е. $e^{z+2\pi i} = e^z$. Отметим, что e^z не всегда больше нуля. Например, $e^{\pi i} = -1 < 0$. ■

Логарифмическая функция

Эта функция определяется как функция, обратная показательной: число w называется ***логарифмом числа*** $z \neq 0$, если $e^w = z$, обозначается $w = \operatorname{Ln} z$. Так как значения показательной функции $e^w = z$ всегда отличны от нуля, то логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определена на всей плоскости z, кроме точки $z = 0$ (стало быть, имеет смысл и выражение $\operatorname{Ln}(-2)$).

Положив $z = r \cdot e^{i\varphi}, w = u + iv$, получим, согласно определению логарифмической функции, $e^{u+iv} = r \cdot e^{i\varphi}$, или $e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\varphi}$. Отсюда имеем:

$$e^u = r,\ v = \varphi + 2k\pi,\ \text{т. е. } u = \ln r,\ v = \varphi + 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Следовательно,

$$w = \operatorname{Ln} z = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \qquad (2)$$

т. е. $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ или, $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, где $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Формула (2) показывает, что логарифмическая функция комплексного переменного имеет бесчисленное множество значений, т. е. $w = \operatorname{Ln} z$ — многозначная функция.

Однозначную ветвь этой функции можно выделить, подставив в формулу (2) определенное значение k. Положив $k = 0$, получим однозначную функцию, которую называют *главным значением* логарифма $\operatorname{Ln} z$ и обозначают символом $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad \text{где } -\pi < \arg z \leqslant \pi. \tag{3}$$

Если z — действительное положительное число, то $\arg z = 0$ и $\ln z = \ln|z|$, т. е. главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает с обычным натуральным логарифмом этого числа.

Формулу (2) можно переписать так: $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$.

Из формулы (2) следует, что логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ обладает известными свойствами логарифма действительного переменного:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \cdot \operatorname{Ln} z,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Ln} z.$$

❑ Докажем, например, первое свойство:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) =$$
$$= (\ln|z_1| + i\operatorname{Arg} z_1) + (\ln|z_2| + i\operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2. \quad \blacksquare$$

Пример 2. Вычислить $\mathrm{Ln}(-1)$ и $\ln(-1)$; $\ln 2i$.

❍ Решение: Для числа $z = -1$ имеем $|z| = 1, \arg z = \pi$. Следовательно, $\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i\pi(2k + 1)$, $\ln(-1) = \pi i$ (формулы (2) и (74.3)); $\ln 2i = \ln|2i| + i\arg 2i = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$. ●