

# Операционный метод решения линейных дифференциальных уравнений и систем

Пусть требуется найти частное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  — заданные числа.

Будем считать, что искомая функция  $y(t)$  вместе с ее рассматриваемыми производными и функция  $f(t)$  являются оригиналами.

Пусть  $y(t) \doteq Y(p) = Y$  и  $f(t) \doteq F(p) = F$ . Пользуясь свойствами дифференцирования оригинала и линейности, перейдем в уравнении (1) от оригиналов к изображениям:

$$(p^n Y - p^{n-1} c_0 - p^{n-2} c_1 - \dots - c_{n-1}) + a_1 (p^{n-1} Y - p^{n-2} c_0 - \dots - c_{n-2}) + \dots \\ \dots + a_{n-1} (pY - c_0) + a_n Y = F.$$

Полученное уравнение называют *операторным* (или уравнением в изображениях). Разрешим его относительно  $Y$ :

$$Y(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) = F + c_0(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \\ + c_1(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + c_{n-1},$$

т. е.  $Y(p) \cdot Q_n(p) = F(p) + R_{n-1}(p)$ , где  $Q_n(p)$  и  $R_{n-1}(p)$  — алгебраические многочлены от  $p$  степени  $n$  и  $n - 1$  соответственно.

Из последнего уравнения находим

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \quad (2)$$

Полученное равенство называют *операторным решением* дифференциального уравнения (1). Оно имеет более простой вид, если все начальные условия равны нулю, т. е.  $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ .

В этом случае  $Y(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}$ .

Находя оригинал  $y(t)$ , соответствующий найденному изображению (2), получаем, в силу теоремы единственности, частное решение дифференциального уравнения (1).

*Замечание.* Полученное решение  $y(t)$  во многих случаях оказывается справедливым при всех значениях  $t$  (а не только при  $t \geq 0$ ).

**Пример 1.** Решить операционным методом дифференциальное уравнение  $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$  при условиях  $y(0) = 2, y'(0) = 6$ .

○ Решение: Пусть  $y(t) \doteq Y(p) = Y$ . Тогда

$$\begin{aligned}y'(t) &\doteq pY - y(0) = pY - 2, \\y''(t) &\doteq p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 2p - 6, \\&\text{и } e^{3t} \doteq \frac{1}{p-3}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, получаем операторное уравнение:  $p^2Y - 2p - 6 - 3(pY - 2) + 2Y = 12 \frac{1}{p-3}$ . Отсю-

да  $Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}$ . Находим  $y(t)$ . Можно разбить дробь на сумму простейших ( $Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}$ ), но так как корни знаменателя ( $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$ ) простые, то удобно воспользоваться второй теоремой разложения

$$\begin{aligned}A(p) &= 2p^2 - 6p + 12, \\B'(p) &= (p-2)(p-3) + (p-1)(p-3) + (p-1)(p-2).\end{aligned}$$

Получаем:

$$y(t) = \frac{8}{(-1) \cdot (-2)} e^{1 \cdot t} + \frac{8}{1 \cdot (-1)} e^{2 \cdot t} + \frac{12}{2 \cdot 1} e^{3 \cdot t} = 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}. \quad \bullet$$

## Элементы теории функций комплексного переменного

Пусть даны два множества  $D$  и  $E$ , элементами которых являются комплексные числа. Числа  $z = x + iy$  множества  $D$  будем изображать точками комплексной плоскости  $z$ , а числа  $w = u + iv$  множества  $E$  — точками комплексной плоскости  $w$ .

☞ Если каждому числу (точке)  $z \in D$  по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное число (точка)  $w \in E$ , то говорят, что на множестве определена **однозначная функция комплексного переменного**  $w = f(z)$ , отображающая множество  $D$  в множество  $E$  (см. рис.).

Если каждому  $z \in D$  соответствует несколько значений  $w$ , то функция  $w = f(z)$  называется *многозначной*.

Множество  $D$  называется *областью определения* функции  $w = f(z)$ ; множество  $E_1$  всех значений  $w$ , которые  $f(z)$  принимает на  $E$ , называется *областью значений* этой функции (если же каждая точка множества  $E$  является значением функции, то  $E$  — область значений функции; в этом случае функция  $f$  отображает  $D$  на  $E$ ).

Далее, как правило, будем рассматривать такие функции  $w = f(z)$ , для которых множества  $D$  и  $E_1$  являются областями. *Областью* комплексной плоскости называется множество точек плоскости, обладающих свойствами открытости и связности.

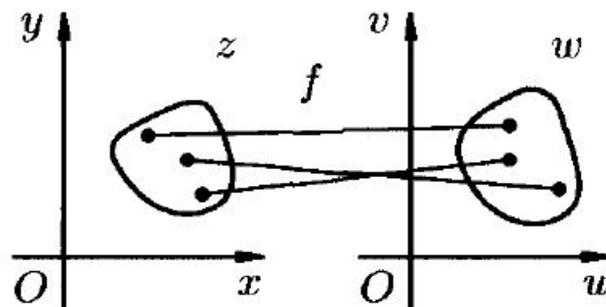


Рис.

Функцию  $w = f(z)$  можно записать в виде

$$u + iv = f(x + iy),$$

т. е.

$$f(x + iy) = u(x; y) + iv(x; y),$$

где

$$u = u(x; y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v = v(x; y) = \operatorname{Im} f(z), \quad (x; y) \in D.$$

Функцию  $u(x; y)$  при этом называют *действительной частью функции  $f(z)$* , а  $v(x; y)$  — *мнимой*.

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

**Пример.** Найти действительную и мнимую части функции  $w = z^2$ .

○ Решение: Функцию  $w = z^2$  можно записать в виде  $u + iv = (x + iy)^2$ ,

т. е.

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Отсюда следует:  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ . ●

## Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть однозначная функция  $w = f(z)$  определена в некоторой окрестности точки  $z_0$ , исключая, может быть, саму точку  $z_0$ . Под  $\delta$ -окрестностью точки  $z_0$  комплексной плоскости понимают внутренность круга радиуса  $\delta$  с центром в точке  $z_0$ .

⇒ Число  $w_0$  называется **пределом функции**  $w = f(z)$  **в точке**  $z_0$  (или при  $z \rightarrow z_0$ ), если для любого положительного  $\varepsilon$  найдется такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $z \neq z_0$ , удовлетворяющих неравенству  $|z - z_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ .

Записывают:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ . Это определение коротко можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon) \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0.$$

Из определения следует, что если предел  $w_0$  существует, то существуют и пределы

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x; y) = u_0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x; y) = v_0.$$

Верно и обратное утверждение.

Теоремы об арифметических свойствах пределов для функции одного (или нескольких) действительного переменного остаются справедливыми и для функции комплексного переменного. Так, если функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  имеют пределы в точке  $z_0 \in D$ , то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)) = c_1 \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \pm c_2 \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z),$$

где  $c_1, c_2$  — постоянные;

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \cdot f_2(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)$$

и

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)},$$

если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) \neq 0$ .

 Пусть функция  $w = f(z)$  определена в точке  $z = z_0$  и в некоторой ее окрестности. Функция  $w = f(z)$  называется **непрерывной в точке**  $z_0$ , если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Определение непрерывности можно сформулировать и так: функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $z_0$ , если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f(z) = 0.$$

Функция  $f(z)$  непрерывна в области  $D$ , если она непрерывна в каждой точке этой области.

# Основные элементарные функции комплексного переменного

## Показательная функция

☞ Показательная функция  $w = e^z$  определяется формулой

$$w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1)$$

Положив в этом равенстве  $y = 0$ , устанавливаем, что для действительных значений  $z = x$  показательная функция  $e^z$  совпадает с показательной функцией действительного переменного:  $e^z = e^x$ .

Показательная функция  $w = e^z$  обладает «известным» свойством:  $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ . Действительно, по правилу умножения комплексных чисел («модули перемножаются, а аргументы складываются»), имеем:

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = \\ &= e^{x_1+x_2} \cdot (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Аналогично можно убедиться в справедливости свойств:  $e^{z_1} : e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$ ,  $(e^z)^n = e^{nz}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Учитывая, что  $|e^z| = e^x$ , а  $e^x \neq 0$ , утверждаем, что показательная функция  $e^z$  нигде в нуль не обращается, т. е.  $e^z \neq 0$ .

Исходя из определения (1), легко убедиться, что

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} e^z = 0, \quad \lim_{\substack{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow +\infty)}} e^z = \infty,$$

выражение  $e^z$  при  $z \rightarrow \infty$  не имеет смысла.

Положив в равенстве (1)  $x = 0$ ,  $y = \varphi$ , получим классическую формулу Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . С ее помощью, в частности, можно представить тригонометрическую форму комплексного числа  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  в более компактной форме  $z = r \cdot e^{i\varphi} (= |z| \cdot e^{i \arg z})$ , называемой *показательной формой* комплексного числа

☉ Показательная функция комплексного переменного обладает и специфическим свойством: она является *периодической* с мнимым основным периодом  $2\pi i$ .

□ Действительно,

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z,$$

т. е.  $e^{z+2\pi i} = e^z$ . Отметим, что  $e^z$  не всегда больше нуля. Например,  $e^{\pi i} = -1 < 0$ . ■

## Логарифмическая функция

⇒ Эта функция определяется как функция, обратная показательной: число  $w$  называется **логарифмом числа**  $z \neq 0$ , если  $e^w = z$ , обозначается  $w = \text{Ln } z$ . Так как значения показательной функции  $e^w = z$  всегда отличны от нуля, то логарифмическая функция  $w = \text{Ln } z$  определена на всей плоскости  $z$ , кроме точки  $z = 0$  (стало быть, имеет смысл и выражение  $\text{Ln}(-2)$ ).

Положив  $z = r \cdot e^{i\varphi}$ ,  $w = u + iv$ , получим, согласно определению логарифмической функции,  $e^{u+iv} = r \cdot e^{i\varphi}$ , или  $e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\varphi}$ . Отсюда имеем:

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2k\pi, \quad \text{т. е. } u = \ln r, \quad v = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Следовательно,

$$w = \text{Ln } z = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad (2)$$

т. е.  $\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$  или,  $\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$ , где  $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$ .

Формула (2) показывает, что логарифмическая функция комплексного переменного имеет бесчисленное множество значений, т. е.  $w = \text{Ln } z$  — многозначная функция.

Однозначную ветвь этой функции можно выделить, подставив в формулу (2) определенное значение  $k$ . Положив  $k = 0$ , получим однозначную функцию, которую называют *главным значением* логарифма  $\text{Ln } z$  и обозначают символом  $\ln z$ :

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad \text{где } -\pi < \arg z \leq \pi. \quad (3)$$

Если  $z$  — действительное положительное число, то  $\arg z = 0$  и  $\ln z = \ln |z|$ , т. е. главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает с обычным натуральным логарифмом этого числа.

Формулу (2) можно переписать так:  $\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i$ .

Из формулы (2) следует, что логарифмическая функция  $w = \text{Ln } z$  обладает известными свойствами логарифма действительного переменного:

$$\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2,$$

$$\text{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2,$$

$$\text{Ln } z^n = n \cdot \text{Ln } z,$$

$$\text{Ln } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \cdot \text{Ln } z.$$

□ Докажем, например, первое свойство:

$$\begin{aligned} \text{Ln}(z_1 \cdot z_2) &= \ln |z_1 \cdot z_2| + i \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2) = \\ &= (\ln |z_1| + i \text{Arg} z_1) + (\ln |z_2| + i \text{Arg} z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить  $\text{Ln}(-1)$  и  $\ln(-1)$ ;  $\ln 2i$ .

○ Решение: Для числа  $z = -1$  имеем  $|z| = 1$ ,  $\arg z = \pi$ . Следовательно,  $\text{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i\pi(2k + 1)$ ,  $\ln(-1) = \pi i$  (формулы (2) и (74.3));  $\ln 2i = \ln |2i| + i\arg 2i = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$ . ●