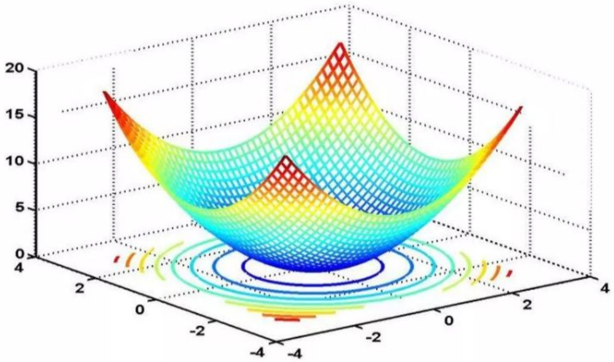
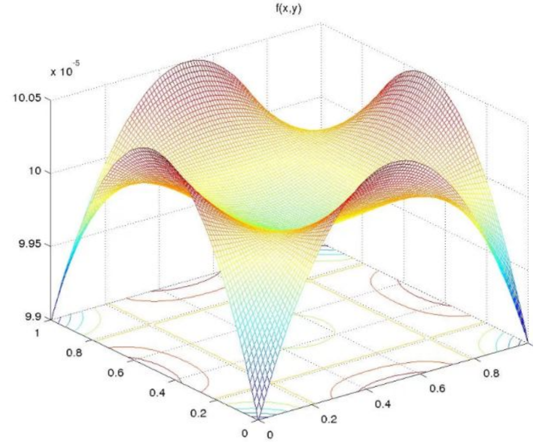
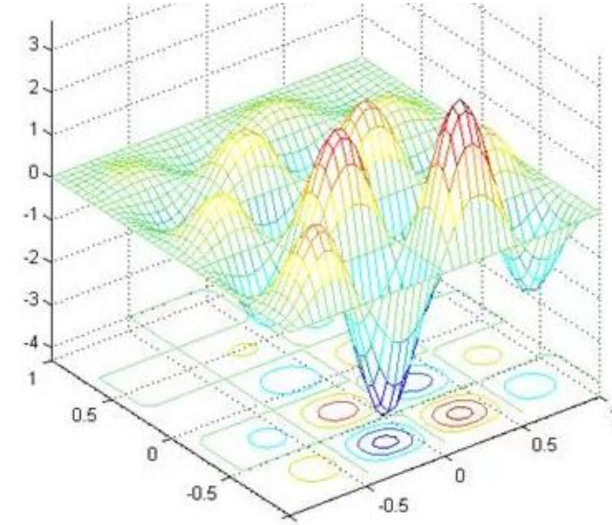
Методы многомерной оптимизации



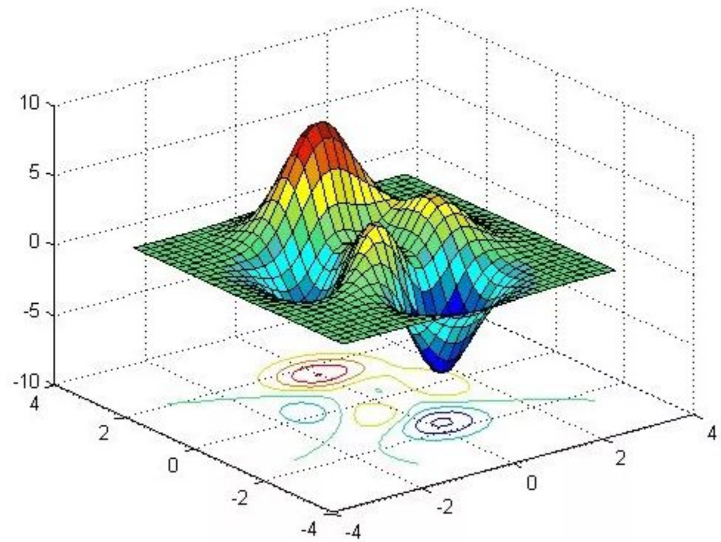
20
15
10
5
0
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4



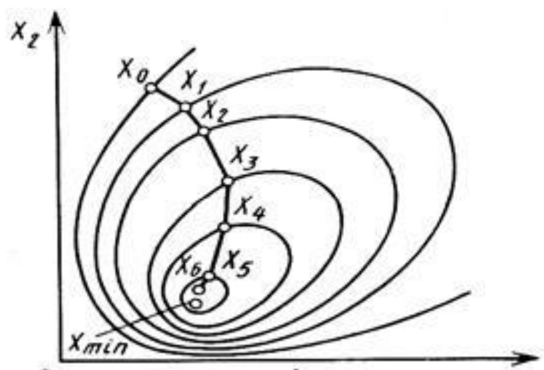
f(x,y)
x 10^-5
10.05
10
9.95
9.9



3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
1
0.5
0
-0.5
-0.5
0
0.5
1

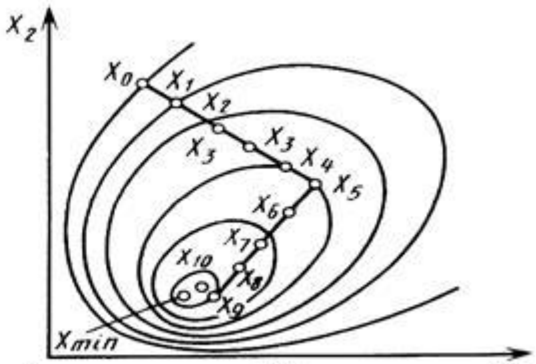


10
5
0
-5
-10
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4



x_2
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_{min}
0
x_1

а)



x_2
x_0
x_1
x_2
x_3
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
x_9
x_{10}
x_{min}
0
x_1

б)

Поиск экстремума методом Гаусса - Зейделя

Найти минимум функции $f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$ с точностью $\varepsilon = 0{,}2$ для начальной точки с координатами $\mathbf{x}^{(0)} = (5, 6)$.

Определяем значение функции в начальной точке $\mathbf{x}^{(0)} = (5, 6)$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = (5+6)^2+(6-1)^2 = 146.$$

Выбираем шаг по каждой координате: $\Delta x_1=2$; $\Delta x_2=2$.

Осуществляем одномерный поиск по координате x_1 при $x_2 = 6$.

$x_1^{(0)1} = 5+2 = 7$;

$f(\mathbf{x}^{(0)1}) = (7+6)^2+(6-1)^2 = 194$ - шаг неудачный и движемся в обратном направлении;

$x_1^{(0)1} = 5-2 = 3$;

$f(\mathbf{x}^{(0)1}) = (3+6)^2+(6-1)^2 = 106$ - шаг удачный и продолжаем движение в том же направлении ;

$\mathbf{x}^{(0)2} = (1; 6)$; $f(\mathbf{x}^{(0)2}) = (1+6)^2+(6-1)^2 = 106$;

$\mathbf{x}^{(0)3} = (-1; 6)$; $f(\mathbf{x}^{(0)3}) = (-1+6)^2+(6-1)^2 = 50$;

$\mathbf{x}^{(0)4} = (-3; 6)$; $f(\mathbf{x}^{(0)4}) = (-3+6)^2+(6-1)^2 = 34$;

$\mathbf{x}^{(0)5} = (-5; 6)$; $f(\mathbf{x}^{(0)5}) = (-5+6)^2+(6-1)^2 = 26$;

$\mathbf{x}^{(0)6} = (-7; 6)$; $f(\mathbf{x}^{(0)6}) = (-7+6)^2+(6-1)^2 = 26$;

$\mathbf{x}^{(0)7} = (-9; 6)$; $f(\mathbf{x}^{(0)7}) = (-9+6)^2+(6-1)^2 = 34$ – шаг неудачный, возвращаемся в точку $\mathbf{x}^{(0)6}$ и осуществляем одномерный поиск по координате x_2.

$x_2^{(0)8} = 6+2 = 8$;

$f(\mathbf{x}^{(0)8}) = (-7+8)^2 + (8-1)^2 = 50$ - шаг неудачный, меняем шаг на обратный;

$x_2^{(0)9} = 6-2 = 4$; $f(\mathbf{x}^{(0)9}) = (-7+4)^2+(4-1)^2=18$ - шаг удачный.

Получили точку $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)9}$ с координатами (-7; 4) и переходим к следующей итерации.

Осуществляем одномерный поиск по координате x_1 .

$\mathbf{x}^{(1)1} = (-5; 4)$; $f(\mathbf{x}^{(1)1}) = (-5+4)^2+(4-1)^2= 10$;

$\mathbf{x}^{(1)2} = (-3; 4)$; $f(\mathbf{x}^{(1)2}) = (-3+4)^2+(4-1)^2= 10$;

$\mathbf{x}^{(1)3} = (-1; 4)$; $f(\mathbf{x}^{(1)3}) = (-1+4)^2+(4-1)^2= 18$ - шаг неудачный, возвращаемся в точку $\mathbf{x}^{(1)2}$ и осуществляем одномерный поиск по координате x_2.

$\mathbf{x}^{(1)4} = (-3; 6)$; $f(\mathbf{x}^{(1)4}) = (-3+6)^2+(6-1)^2= 34$ –неудача;

$\mathbf{x}^{(1)5} = (-3; 2)$; $f(\mathbf{x}^{(1)5}) = (-3+2)^2+(2-1)^2= 2$ –удача;

$\mathbf{x}^{(1)6} = (-3; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(1)6}) = (-3+0)^2+(0-1)^2= 10$ –неудача и переходим к следующей итерации.

Базовая точка $\mathbf{x}^{(2)} = (-3, 2)$. Осуществляем одномерный поиск по координате x_1 .

$\mathbf{x}^{(2)1} = (-1; 2)$; $f(\mathbf{x}^{(2)1}) = 2$ – удача; продолжаем по x_2;

$\mathbf{x}^{(2)2} = (-1; 4)$; $f(\mathbf{x}^{(2)2}) = 18$ – неудача;

$\mathbf{x}^{(2)3} = (-1; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(2)3}) = 2$ – удача, переходим к следующей итерации.

Базовая точка $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 0)$.

$\mathbf{x}^{(3)1} = (-3; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(3)1}) = 10$ – неудача;

$\mathbf{x}^{(3)2} = (1; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(3)2}) = 2$ – удача, продолжаем по x_2;

$\mathbf{x}^{(3)3} = (1; 2)$; $f(\mathbf{x}^{(3)3}) = 10$ – неудача;

$\mathbf{x}^{(3)4} = (1;-2)$; $f(\mathbf{x}^{(3)4}) = 10$ – неудача, переходим к следующей итерации.

Базовая точка $\mathbf{x}^{(4)} = (1, 0)$.

$\mathbf{x}^{(4)1} = (-3; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(4)1}) = 10$ – неудача;

$\mathbf{x}^{(4)2} = (3; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(4)2}) = 10$ – неудача, продолжаем по x_2;

$\mathbf{x}^{(4)3} = (1; 2)$; $f(\mathbf{x}^{(4)3}) = 10$ – неудача;

$\mathbf{x}^{(4)4} = (1;-2)$; $f(\mathbf{x}^{(4)4}) = 10$ – неудача.

Поскольку в данной точке одномерный поиск не приводит к успеху ни по одной координате проверяем условие остановки алгоритма $\Delta x_i=2> \varepsilon=0,2$, уменьшаем шаг по каждой координате в два раза:

$\Delta x_1=1$; $\Delta x_2=1$ и переходим к следующей итерации.

Базовая точка $\mathbf{x}^{(5)} = (1, 0)$.

$\mathbf{x}^{(5)1} = (2; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(5)1}) = 5$ – неудача;

$\mathbf{x}^{(5)2} = (0; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(5)2}) = 1$ – удача, продолжаем по x_2;

$\mathbf{x}^{(5)3} = (0; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(5)3}) = 1$ – удача; переходим к следующей итерации.

Базовая точка $\mathbf{x}^{(6)} = (0, 1)$.

$\mathbf{x}^{(6)1} = (1; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(6)1}) = 4$ – неудача;

$\mathbf{x}^{(6)2} = (-1; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(6)2}) = 0$ – удача, продолжаем по x_2;

$\mathbf{x}^{(6)3} = (-1; 2)$; $f(\mathbf{x}^{(6)3}) = 2$ – неудача;

$\mathbf{x}^{(6)4} = (-1; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(6)4}) = 2$– неудача; переходим к следующей итерации.

Базовая точка $\mathbf{x}^{(7)} = (-1, 1)$.

Все последующие шаги из данной точки неудачны, поэтому сокращаем шаг в два раза до 0,5 и поскольку дальнейшие шаги также неудачны (произошло случайное попадание в точку экстремума) сокращаем шаг еще в два раза до 0,125. Последующие шаги также не улучшают целевую функцию и, поскольку условие остановки алгоритма Δx_i=0,125 < ε=0,2 выполняется, прекращаем вычисления.

Таким образом, за точку минимума принимаем значение $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(7)}$=(-1; 1).

Траектория поиска показана на рис.1

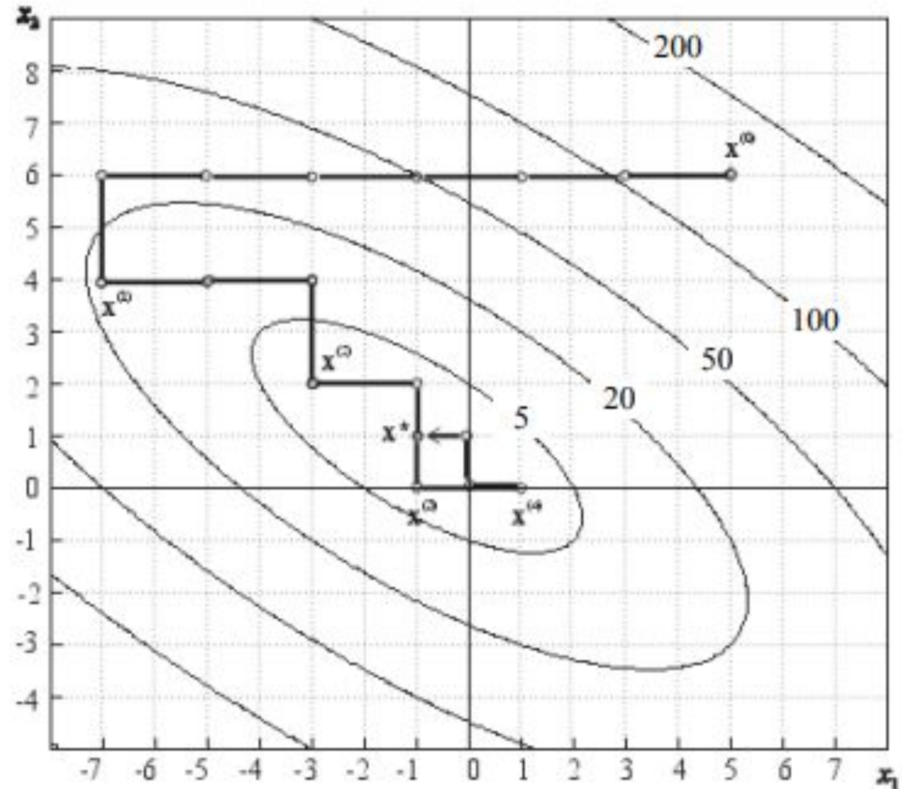


Рис. 1

Поиск экстремума методом Хука и Дживса

Определяем значение функции в начальной точке

$$f(\mathbf{x}^{(0)})= (5+6)^2+(6-1)^2= 146.$$

Выбираем приращения:

$$\Delta x_1=2\ ; \qquad \Delta x_2=2$$

Осуществляем исследующий поиск по координате x_1

$x_1^{(0)1} = 5+2 = 7$;

$f(\mathbf{x}^{(0)1}) = (7+6)^2+(6-1)^2= 194$ - шаг неудачный.

$x_1^{(0)2} = 5-2 = 3$;

$f(\mathbf{x}^{(0)2}) = (3+6)^2+(6-1)^2= 106$ - шаг удачный.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_2.

$x_2^{(0)3} = 6+2 = 8$;

$f(\mathbf{x}^{(0)3}) = (3+8)^2+ (8-1)^2= 170$ - шаг неудачный.

$x_2^{(0)4} = 6-2 = 4$;

$f(\mathbf{x}^{(0)4}) = (3+4)^2+(4-1)^2=58$ - шаг удачный.

Получили точку $\mathbf{x}^{(1)}$ с координатами (3; 4).

Осуществляем пошаговый поиск по образцу:

Точка $\mathbf{x}^{(2)}$ имеет координаты (1; 2); $f(\mathbf{x}^{(2)})= (1+2)^2+(2-1)^2=10.$

Точка $\mathbf{x}^{(3)}$ имеет координаты (-1; 0); $f(\mathbf{x}^{(3)}) =(-1+0)^2+(0-1)^2=2.$

Точка $\mathbf{x}^{(4)}$ имеет координаты (-3,-2); $f(\mathbf{x}^{(4)}) =(-3-2)^2+(-2-1)^2=34$ - шаг неудачный.

Переходим ко второй итерации.

Координаты базисной точки $\mathbf{x}^{(3)} = (-1; 0)$.
Осуществляем исследующий поиск по координате x_1:

$\mathbf{x}^{(3)1} = (1; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(3)1}) = (1+0)^2+(0-1)^2=2$ - шаг удачный.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_2.

$\mathbf{x}^{(3)2} = (1; 2)$; $f(\mathbf{x}^{(3)2}) = (1+2)^2+(2-1)^2=10$ - шаг неудачный.

$\mathbf{x}^{(3)3} = (1; -2)$; $f(\mathbf{x}^{(3)3}) = (1-(-2))^2+(-2-1)^2=10$ - шаг неудачный.

Получили точку $\mathbf{x}^{(4)}$ с координатами (1; 0).

Осуществляем пошаговый поиск по образцу:

Точка $\mathbf{x}^{(5)}$ имеет координаты (3; 0);

$f(\mathbf{x}^{(5)}) = (3+0)^2+(0-1)^2=10$ - шаг неудачный.

Поскольку неудачными оказались шаги по всем направлениям, проверяем условие окончания алгоритма $\Delta x_i=2> \varepsilon=0{,}2$, уменьшаем приращения в два раза: $\Delta x_1=1$; $\Delta x_2=1$

и переходим ко второй итерации.

Координаты базисной точки $\mathbf{x}^{(4)} = (1; 0)$.
Осуществляем исследующий поиск по координате x_1:

$\mathbf{x}^{(4)1} = (2; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(4)1}) = (2+0)^2+(0-1)^2=5$ - шаг неудачный.

$\mathbf{x}^{(4)2} = (0; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(4)2}) = (0+0)^2+(0-1)^2=1$ - шаг удачный.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_2.

$\mathbf{x}^{(4)3} = (0; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(4)3}) = (0+1)^2+(1-1)^2=1$ - шаг удачный.

Получили точку $\mathbf{x}^{(5)}$ с координатами (0; 1); $f(\mathbf{x}^{(5)}) =1$.

Осуществляем пошаговый поиск по образцу.

Точка $\mathbf{x}^{(6)}$ имеет координаты (-1; 2); $f(\mathbf{x}^{(3)}) = (-1+2)^2+(2-1)^2=2$.

Шаг неудачный, поэтому возвращаемся к точке $\mathbf{x}^{(5)}$ и повторяем исследующий поиск.

Координаты базисной точки $\mathbf{x}^{(5)} = (0; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(5)}) =1$.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_1:

$\mathbf{x}^{(5)1} = (1; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(5)1}) = (1+1)^2+(1-1)^2=4$ - шаг неудачный.

$\mathbf{x}^{(5)2} = (-1; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(5)2}) = (-1+1)^2+(1-1)^2=0$ - шаг удачный.

Осуществляем исследующий поиск по координате x_2.

$\mathbf{x}^{(5)3} = (-1; 2)$; $f(\mathbf{x}^{(5)3}) = (-1+2)^2+(2-1)^2=2$ - шаг неудачный.

$\mathbf{x}^{(5)4} = (-1; 0)$; $f(\mathbf{x}^{(5)4}) = (-1+0)^2+(0-1)^2=2$ - шаг неудачный.

Получили точку $\mathbf{x}^{(6)}$ с координатами (-1; 1); $f(\mathbf{x}^{(6)}) =0$.

Последующие неудачные шаги объясняются случайным попаданием в точку минимума.

Поскольку пошаговый поиск по образцу не приносит положительных результатов, а также неудачными оказываются шаги по всем направлениям, проверяем условие окончания алгоритма $\Delta x_i=1> \varepsilon=0{,}2$, уменьшаем приращения в два раза:

$$\Delta x_1=0{,}5\ ; \quad \Delta x_2=0{,}5$$

и переходим к следующей итерации итерации.

Координаты базисной точки $\mathbf{x}^{(6)} = (-1; 1)$; $f(\mathbf{x}^{(6)}) =0$.

Исследующий поиск в окрестности базисной точки не приносит улучшения функции, поэтому уменьшаем шаг до 0,25 и далее до 0,125, что также не приводит к положительным результатам. Проверяем условие окончания поиска $\Delta x_i=0{,}125 < \varepsilon=0{,}2$ и заканчиваем вычисления.

Таким образом, за точку минимума принимаем значение

$\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{(6)} = (-1;\ 1)$.

Траектория поиска приведена на рис.2

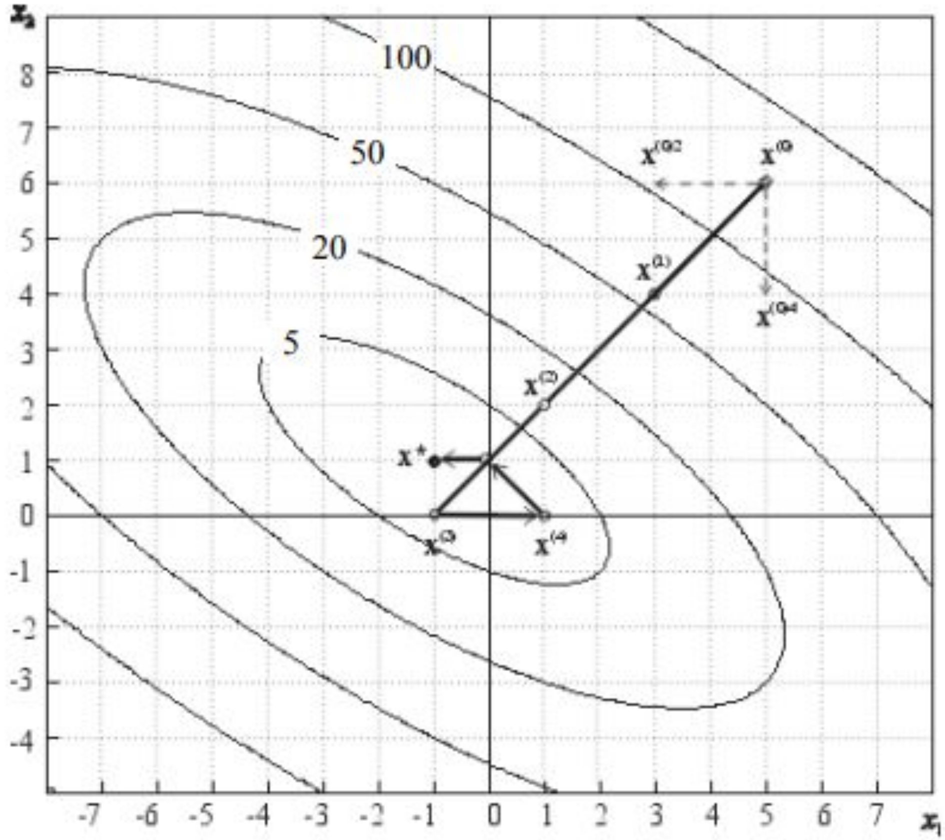
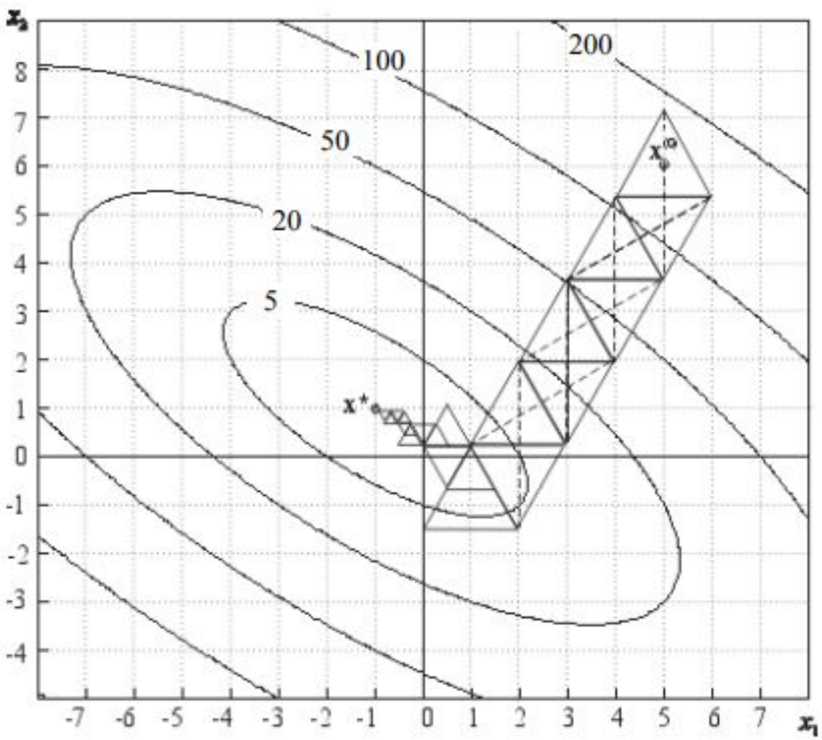
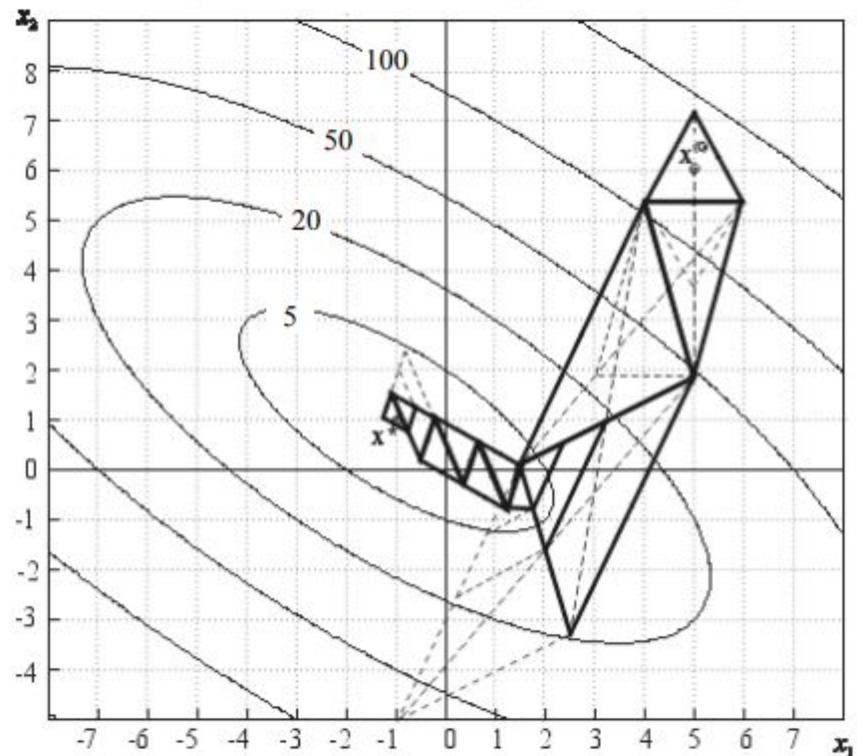


Рис. 2

Поиск экстремума



симплекс -методом



методом Нельдера - Мида

Градиентные методы

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = 9x_1^2 + x_2^2$, выберем $x^0 = (1,1)$ и найдем точку минимума с погрешностью $\varepsilon = 0.05$, взяв в качестве критерия остановки условие $\|f'(x^k)\| \leqslant \varepsilon$. Будем вести расчеты с точностью до третьего знака после запятой. Имеем $f'(x_1, x_2) = (18x_1, 2x_2)^T$, поэтому

1. $x^1 = x^0 - \alpha f'(x^0) = (1,1)^T - \alpha(18,2)^T$, откуда

$$f(x^0 - \alpha f'(x^0)) = 9(1 - 18\alpha)^2 + (1 - 2\alpha)^2.$$

Поэтому

4. $f'(x^3) = (0.000, 0.078)^T$, $\|f'(x^3)\| > \varepsilon$, $\alpha_2 = 0.456$, $x^4 = (0.000, 0.003)^T$.

5. $f'(x^4) = (0.000, 0.006)^T$, $\|f'(x^4)\| < \varepsilon$, поэтому принимаем в качестве точки минимума $x_{min} = x^4$.

$$\|f'(x^1)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x_2}\right)^2} > \varepsilon,$$

продолжаем вычисления. Действуя аналогично предыдущему, получим $\alpha_1 = 0.475$, $x^2 = (0.06, 0.044)^T$. Далее

3. $f'(x^2) = (1.087, 0.089)^T$, $\|f'(x^2)\| > \varepsilon$, $\alpha_2 = 0.056$, $x^3 = (0.000, 0.039)^T$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = 9x_1^2 + x_2^2$, выберем $x^0 = (1, 1)$ и найдем точку минимума с погрешностью $\varepsilon = 0.05$, взяв в качестве критерия остановки условие $\|f'(x^k)\| \leqslant \varepsilon$. Будем вести расчеты с точностью до третьего знака после запятой. Имеем $f'(x_1, x_2) = (18x_1, 2x_2)^T$, поэтому

1. $x^1 = x^0 - \alpha f'(x^0) = (1, 1)^T - \alpha(18, 2)^T$, откуда

$$f(x^0 - \alpha f'(x^0)) = 9(1 - 18\alpha)^2 + (1 - 2\alpha)^2.$$

Поэтому

$$\alpha_1 = \arg\min_{\alpha > 0} f(x^0 - \alpha f'(x^0)) = 0.056,$$

$$x^1 = x^0 - \alpha_0 f'(x^0) = (-0.008, 0.888)^T.$$

2. $f'(x^1) = (-0.144, 1.776)^T$. Критерий остановки не выполнен

$$\|f'(x^1)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x_2}\right)^2} > \varepsilon,$$

продолжаем вычисления. Действуя аналогично предыдущему, получим $\alpha_1 = 0.475$, $x^2 = (0.06, 0.044)^T$. Далее

3. $f'(x^2) = (1.087, 0.089)^T$, $\|f'(x^2)\| > \varepsilon$, $\alpha_2 = 0.056$, $x^3 = (0.000, 0.039)^T$.

4. $f'(x^3) = (0.000, 0.078)^T$, $\|f'(x^3)\| > \varepsilon$, $\alpha_2 = 0.456$, $x^4 = (0.000, 0.003)^T$.

5. $f'(x^4) = (0.000, 0.006)^T$, $\|f'(x^4)\| < \varepsilon$, поэтому принимаем в качестве точки минимума $x_{min} = x^4$.

Пример Найти локальный минимум функции

$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Для нахождения приближенного решения методом наискорешего спуска зададим точность ε=0,1 и начальную точку $x^0 = \ 0,5;\ 1\ '$ и найдем градиент функции $f(x)$ в произвольной точке x:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

1. Вычислим градиент в точке x^0:

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислим норму $\nabla f(x^0)$ и проверим условие останова $\left\|\nabla f(x^k)\right\| \le \varepsilon$:

$$\left\|\nabla f(x^0)\right\| = 3,9 > \varepsilon = 0,1.$$

3. Следующая точка x^1 находится согласно (3.2.1):

$$x^1 = x^0 - \alpha_0 \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0,5 - 3\alpha_0 \\ 1 - 2,5\alpha_0 \end{pmatrix},$$

где α_0 является решением оптимизационной задачи

$$f(x^0 - \alpha_0 \nabla f(x^0)) = \min_{\alpha \ge 0} f(x^0 - \alpha \nabla f(x^0)).$$

Подставив $x_1 = 0,5 - 3\alpha$, $x_2 = 1 - 2,5\alpha$ в функцию $f(x)$, получим

$$\varphi(\alpha) = f(x^0 - \alpha \nabla f(x^0)) = 2 \cdot (0,5 - 3\alpha)^2 +$$

$$+ (0,5 - 3\alpha)(1 - 2,5\alpha) + (1 - 2,5\alpha)^2.$$

Найдем минимум функции $\varphi(\alpha)$ по α. Для этого воспользуемся необходимым условием минимума функции:

$$\varphi'(\alpha) = -15,25 + 63,25 \cdot \alpha = 0.$$

Таким образом $\alpha_0 \approx 0,24$. Заметим, в силу достаточного условия минимума, так как $\varphi''(\alpha) = 63,25 > 0$, то найденное значение шага $\alpha_0 \approx 0,24$ обеспечивает минимум функции $\varphi(\alpha)$ по α.

В результате вышеизложенного, получили точку $x^1 = \begin{pmatrix} -0,22 \\ 0,4 \end{pmatrix}$.

k	x^k	$\nabla f(x^k)$	$\|\nabla f(x^k)\|$	α_k
0	$\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$	3,9	0,24
1	$\begin{pmatrix} -0,22 \\ 0,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,48 \\ 0,58 \end{pmatrix}$	0,752	0,546
2	$\begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,08 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,24 \\ 0,2 \end{pmatrix}$	0,312	0,24
3	$\begin{pmatrix} -0,0176 \\ 0,032 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,012 \\ -0,0816 \end{pmatrix}$	0,082	-

Из таблицы следует, что $\|\nabla f(x^3)\| = 0,082 < \varepsilon = 0,1$, то есть на третьей итерации требуемая точность $\varepsilon = 0,1$ достигнута. При этом найдено приближение к точке минимума

$$x^3 = \begin{pmatrix} -0,0176 \\ 0,032 \end{pmatrix}, \qquad f(x^3) = 0,00127.$$

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

№ варианта	Вид целевой функции $f(x_1,x_2)$	Начальная точка		Точность ε
		$x_1^{(0)}$	$x_2^{(0)}$	
1	$(x_1 - 4x_2)^2 + (x_2 + 5)^2$	10	-5	0,15
2	$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 4)^2$	9	5	0,3
3	$(x_1 - 3x_2)^2 + (x_2 - 2)^2$	4	10	0,25
4	$(x_1 - 3x_2)^2 + (x_2 + 1)^2$	0	8	0,15
5	$(x_1 + 5x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$	8	10	0,35
6	$(x_1 + 2x_2)^2 + (x_2 - 3)^2$	0	10	0,18
7	$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 3)^2$	-7	-7	0,2
8	$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2)^2$	6	-1	0,18
9	$(x_1 + 3x_2)^2 + (x_2 + 5)^2$	10	10	0,35
10	$(x_1 + 9x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$	-6	5	0,25
11	$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 9)^2$	15	12	0,15
12	$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 6)^2$	10	8	0,18
13	$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$	5	6	0,15
14	$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 3)^2$	7	6	0,25
15	$(x_1 + 2x_2)^2 + (x_2 - 4)^2$	-4	7	0,3
16	$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 + 5)^2$	-15	5	0,2
17	$(x_1 - 6x_2)^2 + (x_2 + 1)^2$	-5	-3	0,2
18	$(x_1 - 5x_2)^2 + (x_2 + 6)^2$	-10	-5	0,18
19	$(x_1 + 4x_2)^2 + (x_2 - 3)^2$	-5	6	0,22
20	$(x_1 + 6x_2)^2 + (x_2 + 2)^2$	-10	7	0,22
21	$(x_1 - 7x_2)^2 + (x_2 - 2)^2$	8	6	0,3
22	$(x_1 - 8x_2)^2 + (x_2 + 1)^2$	-5	-5	0,2
23	$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 7)^2$	10	2	0,25
24	$(x_1 + 8x_2)^2 + (x_2 - 2)^2$	-10	5	0,35
25	$(x_1 - 5x_2)^2 + (x_2 + 3)^2$	-10	-5	0,21