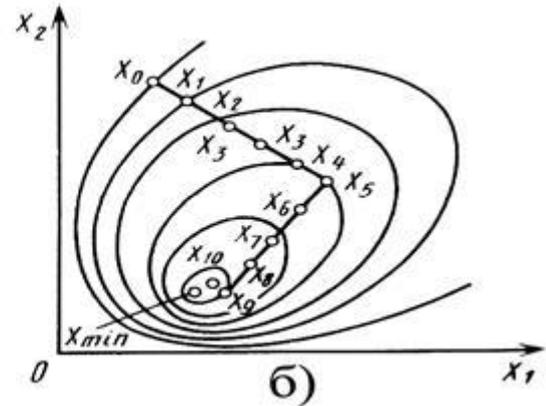
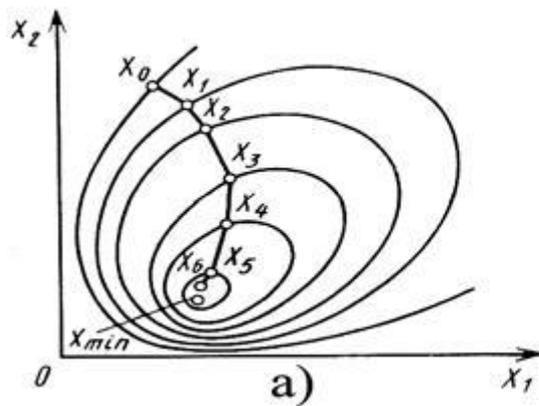
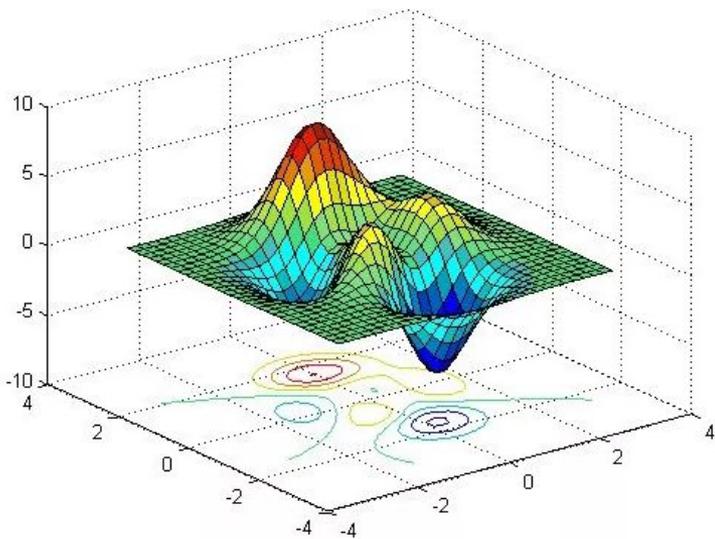
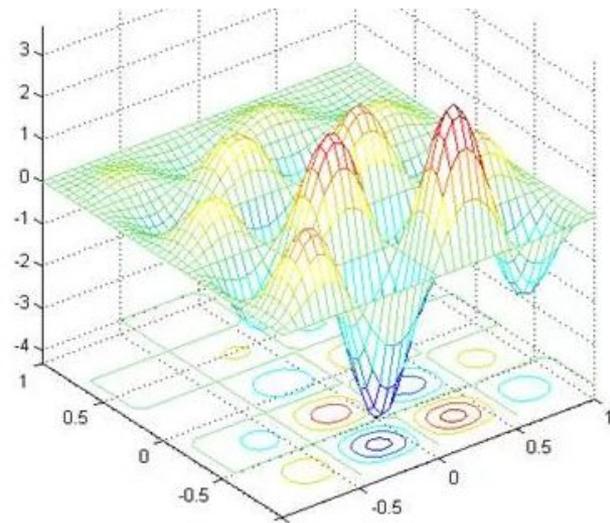
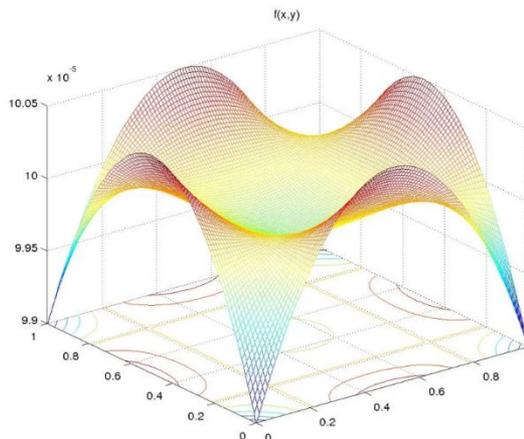
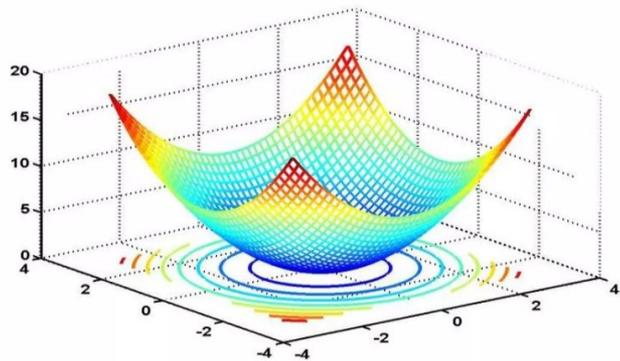


# Методы многомерной оптимизации



## Поиск экстремума методом Гаусса - Зейделя

Найти минимум функции  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$   
с точностью  $\varepsilon = 0,2$  для начальной точки с координатами  $\mathbf{x}^{(0)} = (5, 6)$ .

Определяем значение функции в начальной точке  $\mathbf{x}^{(0)} = (5, 6)$

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = (5+6)^2 + (6-1)^2 = 146.$$

Выбираем шаг по каждой координате:  $\Delta x_1 = 2$ ;  $\Delta x_2 = 2$ .

Осуществляем одномерный поиск по координате  $x_1$  при  $x_2 = 6$ .

$$x_1^{(0)1} = 5 + 2 = 7;$$

$f(\mathbf{x}^{(0)1}) = (7+6)^2 + (6-1)^2 = 194$  - шаг неудачный и движемся в обратном направлении;

$$x_1^{(0)1} = 5 - 2 = 3;$$

$f(\mathbf{x}^{(0)1}) = (3+6)^2 + (6-1)^2 = 106$  - шаг удачный и продолжаем движение в том же направлении;

$$\mathbf{x}^{(0)2} = (1; 6); \quad f(\mathbf{x}^{(0)2}) = (1+6)^2 + (6-1)^2 = 106;$$

$$\mathbf{x}^{(0)3} = (-1; 6); \quad f(\mathbf{x}^{(0)3}) = (-1+6)^2 + (6-1)^2 = 50;$$

$$\mathbf{x}^{(0)4} = (-3; 6); \quad f(\mathbf{x}^{(0)4}) = (-3+6)^2 + (6-1)^2 = 34;$$

$$\mathbf{x}^{(0)5} = (-5; 6); \quad f(\mathbf{x}^{(0)5}) = (-5+6)^2 + (6-1)^2 = 26;$$

$$\mathbf{x}^{(0)6} = (-7; 6); \quad f(\mathbf{x}^{(0)6}) = (-7+6)^2 + (6-1)^2 = 26;$$

$$\mathbf{x}^{(0)7} = (-9; 6); \quad f(\mathbf{x}^{(0)7}) = (-9+6)^2 + (6-1)^2 = 34$$
 - шаг неудачный,

возвращаемся в точку  $\mathbf{x}^{(0)6}$  и осуществляем одномерный поиск по координате  $x_2$ .

$$x_2^{(0)8} = 6+2 = 8 ;$$

$f(\mathbf{x}^{(0)8}) = (-7+8)^2 + (8-1)^2 = 50$  - шаг неудачный, меняем шаг на обратный;

$$x_2^{(0)9} = 6-2 = 4 ; \quad f(\mathbf{x}^{(0)9}) = (-7+4)^2 + (4-1)^2 = 18 \text{ - шаг удачный.}$$

Получили точку  $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)9}$  с координатами  $(-7; 4)$  и переходим к следующей итерации.

Осуществляем одномерный поиск по координате  $x_1$ .

$$\mathbf{x}^{(1)1} = (-5; 4); \quad f(\mathbf{x}^{(1)1}) = (-5+4)^2 + (4-1)^2 = 10 ;$$

$$\mathbf{x}^{(1)2} = (-3; 4); \quad f(\mathbf{x}^{(1)2}) = (-3+4)^2 + (4-1)^2 = 10 ;$$

$$\mathbf{x}^{(1)3} = (-1; 4); \quad f(\mathbf{x}^{(1)3}) = (-1+4)^2 + (4-1)^2 = 18 \text{ - шаг неудачный,}$$

возвращаемся в точку  $\mathbf{x}^{(1)2}$  и осуществляем одномерный поиск по координате  $x_2$ .

$$\mathbf{x}^{(1)4} = (-3; 6); \quad f(\mathbf{x}^{(1)4}) = (-3+6)^2 + (6-1)^2 = 34 \text{ -неудача;}$$

$$\mathbf{x}^{(1)5} = (-3; 2); \quad f(\mathbf{x}^{(1)5}) = (-3+2)^2 + (2-1)^2 = 2 \text{ -удача;}$$

$$\mathbf{x}^{(1)6} = (-3; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(1)6}) = (-3+0)^2 + (0-1)^2 = 10 \text{ -неудача и переходим}$$

к следующей итерации.

Базовая точка  $\mathbf{x}^{(2)} = (-3, 2)$ . Осуществляем одномерный поиск по координате  $x_1$ .

$$\mathbf{x}^{(2)1} = (-1; 2); \quad f(\mathbf{x}^{(2)1}) = 2 \text{ - удача; продолжаем по } x_2;$$

$$\mathbf{x}^{(2)2} = (-1; 4); \quad f(\mathbf{x}^{(2)2}) = 18 \text{ - неудача;}$$

$$\mathbf{x}^{(2)3} = (-1; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(2)3}) = 2 \text{ - удача, переходим к следующей}$$

итерации.

Базовая точка  $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 0)$ .

$\mathbf{x}^{(3)1} = (-3; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(3)1}) = 10$  – неудача;

$\mathbf{x}^{(3)2} = (1; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(3)2}) = 2$  – удача, продолжаем по  $x_2$ ;

$\mathbf{x}^{(3)3} = (1; 2); \quad f(\mathbf{x}^{(3)3}) = 10$  – неудача;

$\mathbf{x}^{(3)4} = (1; -2); \quad f(\mathbf{x}^{(3)4}) = 10$  – неудача, переходим к следующей

итерации.

Базовая точка  $\mathbf{x}^{(4)} = (1, 0)$ .

$\mathbf{x}^{(4)1} = (-3; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(4)1}) = 10$  – неудача;

$\mathbf{x}^{(4)2} = (3; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(4)2}) = 10$  – неудача, продолжаем по  $x_2$ ;

$\mathbf{x}^{(4)3} = (1; 2); \quad f(\mathbf{x}^{(4)3}) = 10$  – неудача;

$\mathbf{x}^{(4)4} = (1; -2); \quad f(\mathbf{x}^{(4)4}) = 10$  – неудача.

Поскольку в данной точке одномерный поиск не приводит к успеху ни по одной координате проверяем условие остановки алгоритма  $\Delta x_i = 2 > \varepsilon = 0,2$ , уменьшаем шаг по каждой координате в два раза:

$\Delta x_1 = 1; \quad \Delta x_2 = 1$  и переходим к следующей итерации.

Базовая точка  $\mathbf{x}^{(5)} = (1, 0)$ .

$\mathbf{x}^{(5)1} = (2; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(5)1}) = 5$  – неудача;

$\mathbf{x}^{(5)2} = (0; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(5)2}) = 1$  – удача, продолжаем по  $x_2$ ;

$\mathbf{x}^{(5)3} = (0; 1); \quad f(\mathbf{x}^{(5)3}) = 1$  – удача; переходим к следующей

итерации.

Базовая точка  $\mathbf{x}^{(6)} = (0, 1)$ .

$\mathbf{x}^{(6)1} = (1; 1); \quad f(\mathbf{x}^{(6)1}) = 4$  – неудача;

$\mathbf{x}^{(6)2} = (-1; 1); \quad f(\mathbf{x}^{(6)2}) = 0$  – удача, продолжаем по  $x_2$ ;

$\mathbf{x}^{(6)3} = (-1; 2); \quad f(\mathbf{x}^{(6)3}) = 2$  – неудача;

$\mathbf{x}^{(6)4} = (-1; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(6)4}) = 2$  – неудача; переходим к следующей

итерации.

Базовая точка  $\mathbf{x}^{(7)} = (-1, 1)$ .

Все последующие шаги из данной точки неудачны, поэтому сокращаем шаг в два раза до 0,5 и поскольку дальнейшие шаги также неудачны (произошло случайное попадание в точку экстремума) сокращаем шаг еще в два раза до 0,125. Последующие шаги также не улучшают целевую функцию и, поскольку условие остановки алгоритма  $\Delta x_i = 0,125 < \varepsilon = 0,2$  выполняется, прекращаем вычисления.

Таким образом, за точку минимума принимаем значение  $x^* \approx x^{(7)} = (-1; 1)$ .

Траектория поиска показана на рис. 1

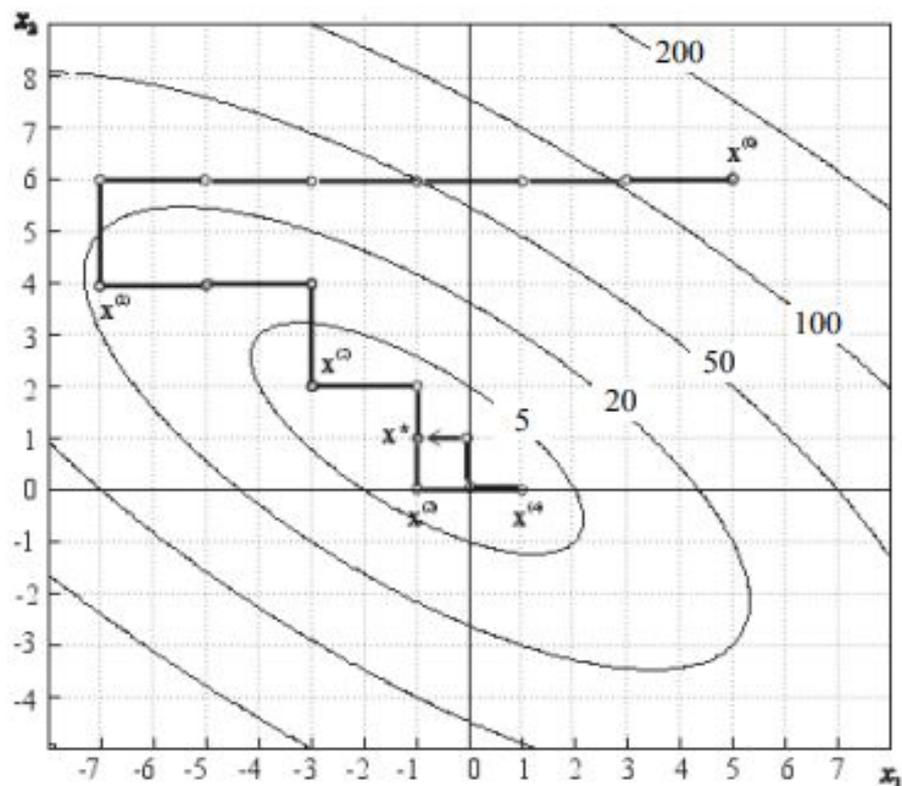


Рис. 1

## Поиск экстремума методом Хука и Дживса

Определяем значение функции в начальной точке

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = (5+6)^2 + (6-1)^2 = 146.$$

Выбираем приращения:

$$\Delta x_1 = 2; \quad \Delta x_2 = 2$$

Осуществляем исследующий поиск по координате  $x_1$

$$x_1^{(0)1} = 5+2 = 7;$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)1}) = (7+6)^2 + (6-1)^2 = 194 - \text{ шаг неудачный.}$$

$$x_1^{(0)2} = 5-2 = 3;$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)2}) = (3+6)^2 + (6-1)^2 = 106 - \text{ шаг удачный.}$$

Осуществляем исследующий поиск по координате  $x_2$ .

$$x_2^{(0)3} = 6+2 = 8;$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)3}) = (3+8)^2 + (8-1)^2 = 170 - \text{ шаг неудачный.}$$

$$x_2^{(0)4} = 6-2 = 4;$$

$$f(\mathbf{x}^{(0)4}) = (3+4)^2 + (4-1)^2 = 58 - \text{ шаг удачный.}$$

Получили точку  $\mathbf{x}^{(1)}$  с координатами (3; 4).

Осуществляем пошаговый поиск по образцу:

$$\text{Точка } \mathbf{x}^{(2)} \text{ имеет координаты } (1; 2); \quad f(\mathbf{x}^{(2)}) = (1+2)^2 + (2-1)^2 = 10.$$

$$\text{Точка } \mathbf{x}^{(3)} \text{ имеет координаты } (-1; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(3)}) = (-1+0)^2 + (0-1)^2 = 2.$$

$$\text{Точка } \mathbf{x}^{(4)} \text{ имеет координаты } (-3, -2); \quad f(\mathbf{x}^{(4)}) = (-3-2)^2 + (-2-1)^2 = 34 - \text{ шаг неудачный.}$$

Переходим ко второй итерации.

Координаты базисной точки  $\mathbf{x}^{(3)} = (-1; 0)$ .

Осуществляем исследующий поиск по координате  $x_1$ :

$$\mathbf{x}^{(3)1} = (1; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(3)1}) = (1+0)^2 + (0-1)^2 = 2 \text{ - шаг удачный.}$$

Осуществляем исследующий поиск по координате  $x_2$ .

$$\mathbf{x}^{(3)2} = (1; 2); \quad f(\mathbf{x}^{(3)2}) = (1+2)^2 + (2-1)^2 = 10 \text{ - шаг неудачный.}$$

$$\mathbf{x}^{(3)3} = (1; -2); \quad f(\mathbf{x}^{(3)3}) = (1-(-2))^2 + (-2-1)^2 = 10 \text{ - шаг неудачный.}$$

Получили точку  $\mathbf{x}^{(4)}$  с координатами (1; 0).

Осуществляем пошаговый поиск по образцу:

Точка  $\mathbf{x}^{(5)}$  имеет координаты (3; 0);

$$f(\mathbf{x}^{(5)}) = (3+0)^2 + (0-1)^2 = 10 \text{ - шаг неудачный.}$$

Поскольку неудачными оказались шаги по всем направлениям, проверяем условие окончания алгоритма  $\Delta x_i = 2 > \varepsilon = 0,2$ , уменьшаем приращения в два раза:  $\Delta x_1 = 1$ ;  $\Delta x_2 = 1$

и переходим ко второй итерации.

Координаты базисной точки  $\mathbf{x}^{(4)} = (1; 0)$ .

Осуществляем исследующий поиск по координате  $x_1$ :

$$\mathbf{x}^{(4)1} = (2; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(4)1}) = (2+0)^2 + (0-1)^2 = 5 \text{ - шаг неудачный.}$$

$$\mathbf{x}^{(4)2} = (0; 0); \quad f(\mathbf{x}^{(4)2}) = (0+0)^2 + (0-1)^2 = 1 \text{ - шаг удачный.}$$

Осуществляем исследующий поиск по координате  $x_2$ .

$$\mathbf{x}^{(4)3} = (0; 1); \quad f(\mathbf{x}^{(4)3}) = (0+1)^2 + (1-1)^2 = 1 \text{ - шаг удачный.}$$

Получили точку  $\mathbf{x}^{(5)}$  с координатами (0; 1);  $f(\mathbf{x}^{(5)}) = 1$ .

Осуществляем пошаговый поиск по образцу.

Точка  $\mathbf{x}^{(6)}$  имеет координаты  $(-1; 2)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(3)}) = (-1+2)^2 + (2-1)^2 = 2$ .

Шаг неудачный, поэтому возвращаемся к точке  $\mathbf{x}^{(5)}$  и повторяем исследующий поиск.

Координаты базисной точки  $\mathbf{x}^{(5)} = (0; 1)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(5)}) = 1$ .

Осуществляем исследующий поиск по координате  $x_1$ :

$\mathbf{x}^{(5)1} = (1; 1)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(5)1}) = (1+1)^2 + (1-1)^2 = 4$  - шаг неудачный.

$\mathbf{x}^{(5)2} = (-1; 1)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(5)2}) = (-1+1)^2 + (1-1)^2 = 0$  - шаг удачный.

Осуществляем исследующий поиск по координате  $x_2$ .

$\mathbf{x}^{(5)3} = (-1; 2)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(5)3}) = (-1+2)^2 + (2-1)^2 = 2$  - шаг неудачный.

$\mathbf{x}^{(5)4} = (-1; 0)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(5)4}) = (-1+0)^2 + (0-1)^2 = 2$  - шаг неудачный.

Получили точку  $\mathbf{x}^{(6)}$  с координатами  $(-1; 1)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(6)}) = 0$ .

Последующие неудачные шаги объясняются случайным попаданием в точку минимума.

Поскольку пошаговый поиск по образцу не приносит положительных результатов, а также неудачными оказываются шаги по всем направлениям, проверяем условие окончания алгоритма  $\Delta x_i = 1 > \varepsilon = 0,2$ , уменьшаем приращения в два раза:

$$\Delta x_1 = 0,5 ; \quad \Delta x_2 = 0,5$$

и переходим к следующей итерации итерации.

Координаты базисной точки  $\mathbf{x}^{(6)} = (-1; 1)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(6)}) = 0$ .

Исследующий поиск в окрестности базисной точки не приносит улучшения функции, поэтому уменьшаем шаг до 0,25 и далее до 0,125, что также не приводит к положительным результатам. Проверяем условие окончания поиска  $\Delta x_i = 0,125 < \varepsilon = 0,2$  и заканчиваем вычисления.

Таким образом, за точку минимума принимаем значение

$$x^* \approx x^{(6)} = (-1; 1).$$

Траектория поиска приведена на рис.2

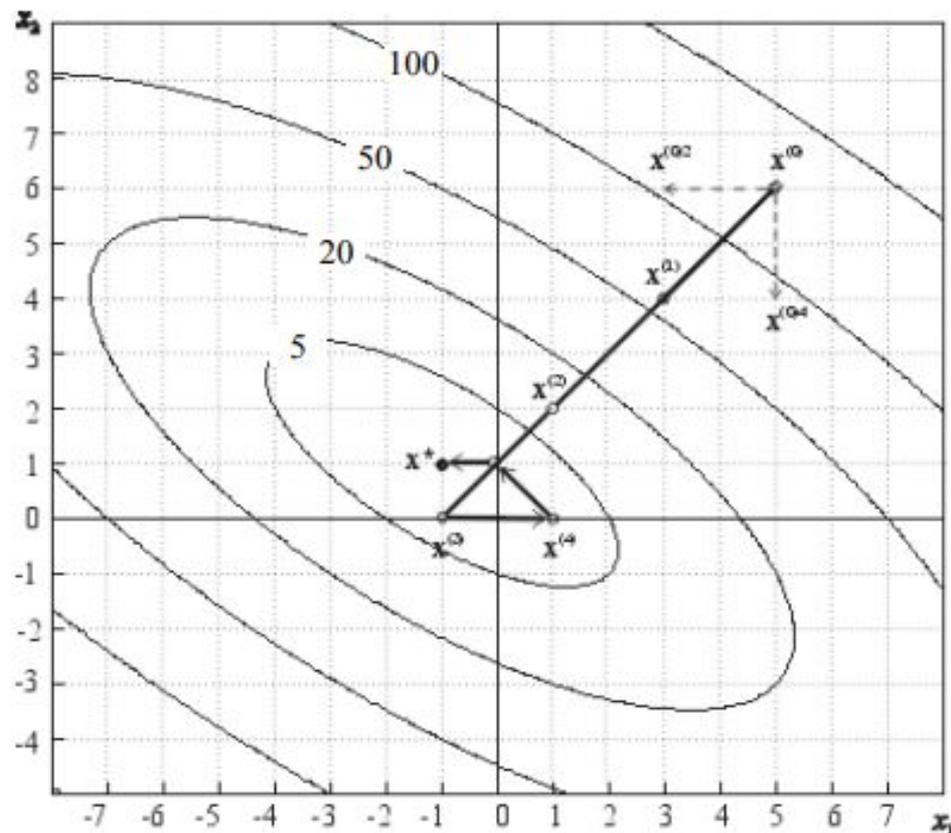
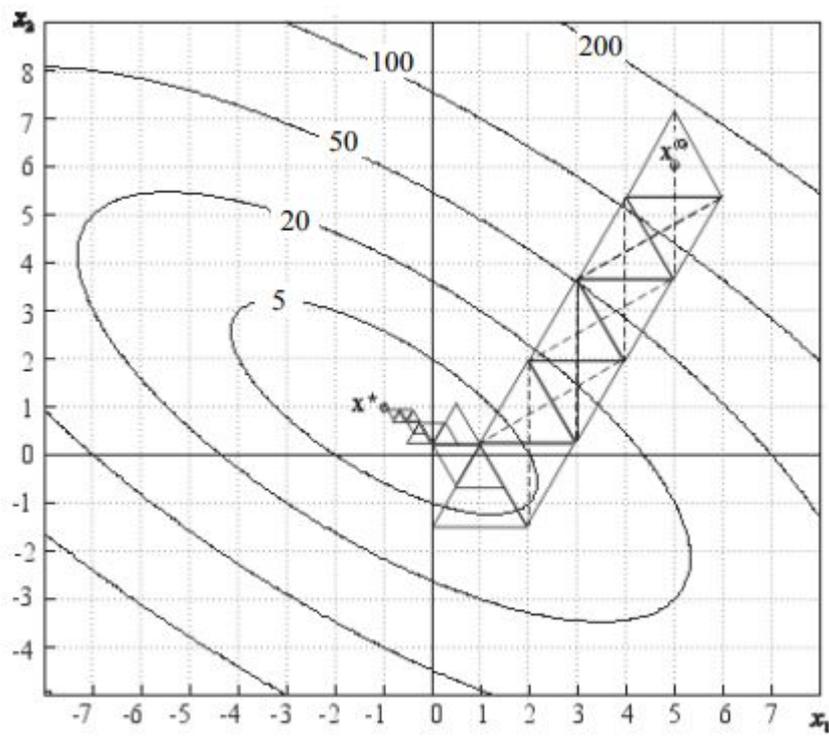
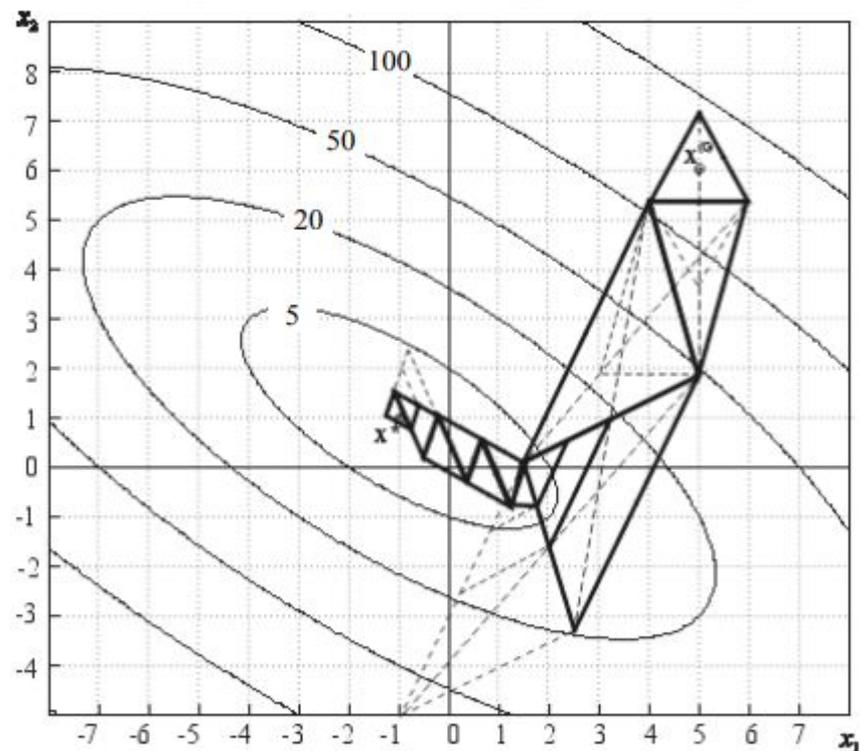


Рис. 2

## Поиск экстремума



*симплекс -методом*



*методом Нельдера - Мида*

# Градиентные методы

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = 9x_1^2 + x_2^2$ , выберем  $x^0 = (1, 1)$  и найдем точку минимума с погрешностью  $\varepsilon = 0.05$ , взяв в качестве критерия останова условие  $\|f'(x^k)\| \leq \varepsilon$ . Будем вести расчеты с точностью до третьего знака после запятой. Имеем  $f'(x_1, x_2) = (18x_1, 2x_2)^T$ , поэтому

$$1. \quad x^1 = x^0 - \alpha f'(x^0) = (1, 1)^T - \alpha(18, 2)^T, \text{ откуда}$$

$$f(x^0 - \alpha f'(x^0)) = 9(1 - 18\alpha)^2 + (1 - 2\alpha)^2.$$

Поэтому

$$4. \quad f'(x^3) = (0.000, 0.078)^T, \quad \|f'(x^3)\| > \varepsilon, \quad \alpha_2 = 0.456, \\ x^4 = (0.000, 0.003)^T.$$

$$5. \quad f'(x^4) = (0.000, 0.006)^T, \quad \|f'(x^4)\| < \varepsilon, \text{ поэтому принимаем в} \\ \text{качестве точки минимума } x_{min} = x^4.$$

$$\|f'(x^1)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x_2}\right)^2} > \varepsilon,$$

продолжаем вычисления. Действуя аналогично предыдущему, получим  $\alpha_1 = 0.475$ ,  $x^2 = (0.06, 0.044)^T$ . Далее

$$3. \quad f'(x^2) = (1.087, 0.089)^T, \quad \|f'(x^2)\| > \varepsilon, \quad \alpha_2 = 0.056, \\ x^3 = (0.000, 0.039)^T.$$

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = 9x_1^2 + x_2^2$ , выберем  $x^0 = (1, 1)$  и найдем точку минимума с погрешностью  $\varepsilon = 0.05$ , взяв в качестве критерия останова условие  $\|f'(x^k)\| \leq \varepsilon$ . Будем вести расчеты с точностью до третьего знака после запятой. Имеем  $f'(x_1, x_2) = (18x_1, 2x_2)^T$ , поэтому

$$1. \quad x^1 = x^0 - \alpha f'(x^0) = (1, 1)^T - \alpha(18, 2)^T, \text{ откуда}$$

$$f(x^0 - \alpha f'(x^0)) = 9(1 - 18\alpha)^2 + (1 - 2\alpha)^2.$$

Поэтому

$$\alpha_1 = \arg \min_{\alpha > 0} f(x^0 - \alpha f'(x^0)) = 0.056,$$

$$x^1 = x^0 - \alpha_0 f'(x^0) = (-0.008, 0.888)^T.$$

$$2. \quad f'(x^1) = (-0.144, 1.776)^T. \text{ Критерий останова не выполнен}$$

$$\|f'(x^1)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x^1)}{\partial x_2}\right)^2} > \varepsilon,$$

продолжаем вычисления. Действуя аналогично предыдущему, получим  $\alpha_1 = 0.475$ ,  $x^2 = (0.06, 0.044)^T$ . Далее

$$3. \quad f'(x^2) = (1.087, 0.089)^T, \quad \|f'(x^2)\| > \varepsilon, \quad \alpha_2 = 0.056, \\ x^3 = (0.000, 0.039)^T.$$

$$4. \quad f'(x^3) = (0.000, 0.078)^T, \quad \|f'(x^3)\| > \varepsilon, \quad \alpha_2 = 0.456, \\ x^4 = (0.000, 0.003)^T.$$

$$5. \quad f'(x^4) = (0.000, 0.006)^T, \quad \|f'(x^4)\| < \varepsilon, \text{ поэтому принимаем в} \\ \text{ качестве точки минимума } x_{min} = x^4.$$

*Пример* Найти локальный минимум функции

$$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

Для нахождения приближенного решения методом наискорейшего спуска зададим точность  $\varepsilon = 0,1$  и начальную точку  $x^0 = 0,5; 1$  и найдем градиент функции  $f(x)$  в произвольной точке  $x$ :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

1. Вычислим градиент в точке  $x^0$ :

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислим норму  $\nabla f(x^0)$  и проверим условие оста-

нова  $\|\nabla f(x^k)\| \leq \varepsilon$ :

$$\|\nabla f(x^0)\| = 3,9 > \varepsilon = 0,1.$$

3. Следующая точка  $x^1$  находится согласно (3.2.1):

$$x^1 = x^0 - \alpha_0 \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 0,5 - 3\alpha_0 \\ 1 - 2,5\alpha_0 \end{pmatrix},$$

где  $\alpha_0$  является решением оптимизационной задачи

$$f(x^0 - \alpha_0 \nabla f(x^0)) = \min_{\alpha \geq 0} f(x^0 - \alpha \nabla f(x^0)).$$

Подставив  $x_1 = 0,5 - 3\alpha$ ,  $x_2 = 1 - 2,5\alpha$  в функцию  $f(x)$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) = f(x^0 - \alpha \nabla f(x^0)) &= 2 \cdot (0,5 - 3\alpha)^2 + \\ &+ (0,5 - 3\alpha)(1 - 2,5\alpha) + (1 - 2,5\alpha)^2. \end{aligned}$$

Найдем минимум функции  $\varphi(\alpha)$  по  $\alpha$ . Для этого воспользуемся необходимым условием минимума функции:

$$\varphi'(\alpha) = -15,25 + 63,25 \cdot \alpha = 0.$$

Таким образом  $\alpha_0 \approx 0,24$ . Заметим, в силу достаточно-го условия минимума, так как  $\varphi''(\alpha) = 63,25 > 0$ , то найденное значение шага  $\alpha_0 \approx 0,24$  обеспечивает минимум функции  $\varphi(\alpha)$  по  $\alpha$ .

В результате вышеизложенного, получили точку

$$x^1 = \begin{pmatrix} -0,22 \\ 0,4 \end{pmatrix}.$$

$k$	$x^k$	$\nabla f(x^k)$	$\ \nabla f(x^k)\ $	$\alpha_k$
0	$\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$	3,9	0,24
1	$\begin{pmatrix} -0,22 \\ 0,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,48 \\ 0,58 \end{pmatrix}$	0,752	0,546
2	$\begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,08 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,24 \\ 0,2 \end{pmatrix}$	0,312	0,24
3	$\begin{pmatrix} -0,0176 \\ 0,032 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,012 \\ -0,0816 \end{pmatrix}$	0,082	-

Из таблицы следует, что  $\|\nabla f(x^3)\| = 0,082 < \varepsilon = 0,1$ , то есть на третьей итерации требуемая точность  $\varepsilon = 0,1$  достигнута. При этом найдено приближение к точке минимума

$$x^3 = \begin{pmatrix} -0,0176 \\ 0,032 \end{pmatrix}, \quad f(x^3) = 0,00127.$$

**ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ**

№ варианта	Вид целевой функции $f(x_1, x_2)$	Начальная точка		Точность $\varepsilon$
		$x_1^{(0)}$	$x_2^{(0)}$	
1	$(x_1 - 4x_2)^2 + (x_2 + 5)^2$	10	-5	0,15
2	$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 4)^2$	9	5	0,3
3	$(x_1 - 3x_2)^2 + (x_2 - 2)^2$	4	10	0,25
4	$(x_1 - 3x_2)^2 + (x_2 + 1)^2$	0	8	0,15
5	$(x_1 + 5x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$	8	10	0,35
6	$(x_1 + 2x_2)^2 + (x_2 - 3)^2$	0	10	0,18
7	$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 3)^2$	-7	-7	0,2
8	$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2)^2$	6	-1	0,18
9	$(x_1 + 3x_2)^2 + (x_2 + 5)^2$	10	10	0,35
10	$(x_1 + 9x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$	-6	5	0,25
11	$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 9)^2$	15	12	0,15
12	$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 6)^2$	10	8	0,18
13	$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$	5	6	0,15
14	$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 3)^2$	7	6	0,25
15	$(x_1 + 2x_2)^2 + (x_2 - 4)^2$	-4	7	0,3
16	$(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 + 5)^2$	-15	5	0,2
17	$(x_1 - 6x_2)^2 + (x_2 + 1)^2$	-5	-3	0,2
18	$(x_1 - 5x_2)^2 + (x_2 + 6)^2$	-10	-5	0,18
19	$(x_1 + 4x_2)^2 + (x_2 - 3)^2$	-5	6	0,22
20	$(x_1 + 6x_2)^2 + (x_2 + 2)^2$	-10	7	0,22
21	$(x_1 - 7x_2)^2 + (x_2 - 2)^2$	8	6	0,3
22	$(x_1 - 8x_2)^2 + (x_2 + 1)^2$	-5	-5	0,2
23	$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - 7)^2$	10	2	0,25
24	$(x_1 + 8x_2)^2 + (x_2 - 2)^2$	-10	5	0,35
25	$(x_1 - 5x_2)^2 + (x_2 + 3)^2$	-10	-5	0,21