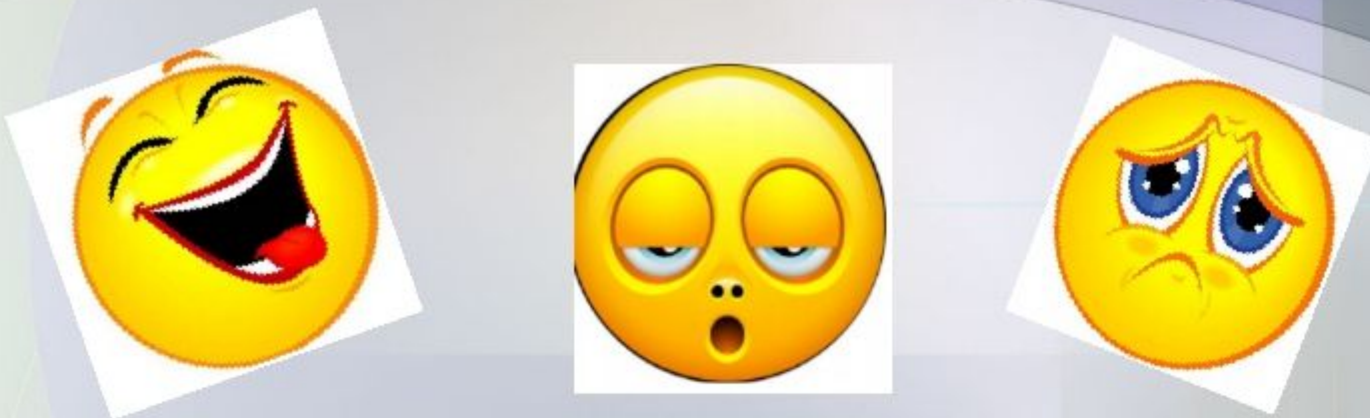
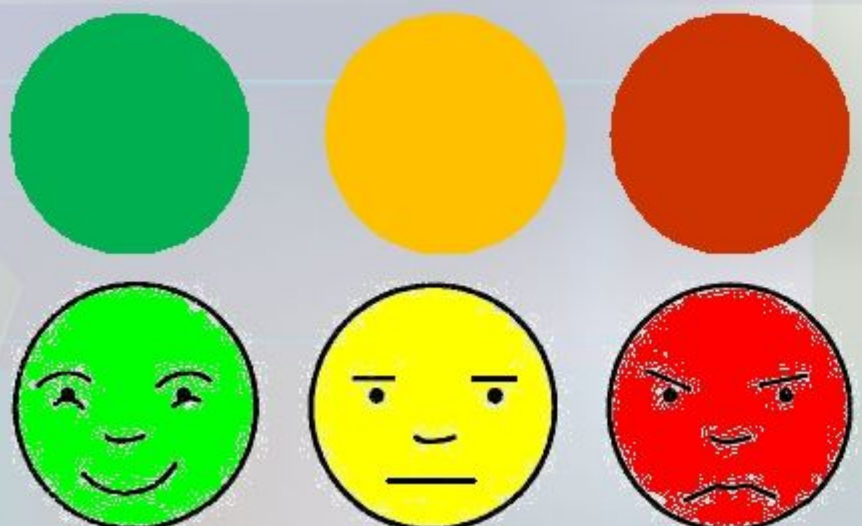
Теорема о рациональном корне многочлена с целыми коэффициентами

Три лица





Рефлексия настроения и эмоционального состояния

Цели урока

Ты узнаешь:

- *метод неопределенных коэффициентов.*

Ты научишься:

- *раскладывать многочлен на множители с помощью метода неопределенных коэффициентов.*

Критерии оценивания:

- *знает теорему о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами;*
- *применяет эту теорему при решении уравнений высших порядков*

Теорема 1. Если целое число k является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то свободный член делится на k.

Доказательство.

Пусть дан многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – числовые коэффициенты, $a_0 \neq 0$, n – целое неотрицательное число.

По условию $x = k$ является корнем многочлена $P(x)$, нужно доказать, что $a_n \vdots k$.

Согласно теореме Безу $P(k) = 0$:

$$P(k) = a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$

$$a_n = k\left(-a_0k^{n-1} - a_1k^{n-2} - a_2k^{n-3} - \cdots - a_{n-1}\right),$$

так как k и $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ – целые числа, то $-a_0k^{n-1} - a_1k^{n-2} - a_2k^{n-3} - \cdots - a_{n-1}$ – целое число. Отсюда и следует, что $a_n \vdots k$.

Алгоритм поиска целых корней многочлена с целыми коэффициентами:

- выписать все делители свободного члена многочлена
- вычислить значения многочлена для всех делителей свободного члена многочлена
- выписать делители свободного члена, при которых значения многочлена равны нулю (эти делители будут корнями многочлена).

Теорема 2. Приведенный многочлен с целыми коэффициентами не имеет дробных рациональных корней.

Теорема 1. Если целое число k является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то свободный член делится на k.

Доказательство.

Пусть дан многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – числовые коэффициенты, $a_0 \neq 0$, n – целое неотрицательное число.

По условию $x = k$ является корнем многочлена $P(x)$, нужно доказать, что $a_n \vdots k$.

Согласно теореме Безу $P(k) = 0$:

$$P(k) = a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$
$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$
$$a_n = k(-a_0k^{n-1} - a_1k^{n-2} - a_2k^{n-3} - \cdots - a_{n-1}),$$

так как k и $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ – целые числа, то $-a_0k^{n-1} - a_1k^{n-2} - a_2k^{n-3} - \cdots - a_{n-1}$ – целое число. Отсюда и следует, что $a_n \vdots k$.

Теорема 1. Если целое число k является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то свободный член делится на k.

Доказательство.

Пусть дан многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – числовые коэффициенты, $a_0 \neq 0$, n – целое неотрицательное число.

По условию $x = k$ является корнем многочлена $P(x)$, нужно доказать, что $a_n \vdots k$.

Согласно теореме Безу $P(k) = 0$:

$$P(k) = a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$
$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$
$$a_n = k(-a_0k^{n-1} - a_1k^{n-2} - a_2k^{n-3} - \cdots - a_{n-1}),$$

так как k и $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ – целые числа, то $-a_0k^{n-1} - a_1k^{n-2} - a_2k^{n-3} - \cdots - a_{n-1}$ – целое число. Отсюда и следует, что $a_n \vdots k$.

	6	−13	1	2
$x = 2$	6	−1	−1	0

	6	−1	−1
$x = \frac{1}{2}$	6	2	0

Теорема 1. Если целое число k является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то свободный член делится на k.

Доказательство.

Пусть дан многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – числовые коэффициенты, $a_0 \neq 0$, n – целое неотрицательное число.

По условию $x = k$ является корнем многочлена $P(x)$, нужно доказать, что $a_n \vdots k$.

Согласно теореме Безу $P(k) = 0$:

$$P(k) = a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$
$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$
$$a_n = k(-a_0k^{n-1} - a_1k^{n-2} - a_2k^{n-3} - \cdots - a_{n-1}),$$

так как k и $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ – целые числа, то $-a_0k^{n-1} - a_1k^{n-2} - a_2k^{n-3} - \cdots - a_{n-1}$ – целое число. Отсюда и следует, что $a_n \vdots k$.

ФО

№1.

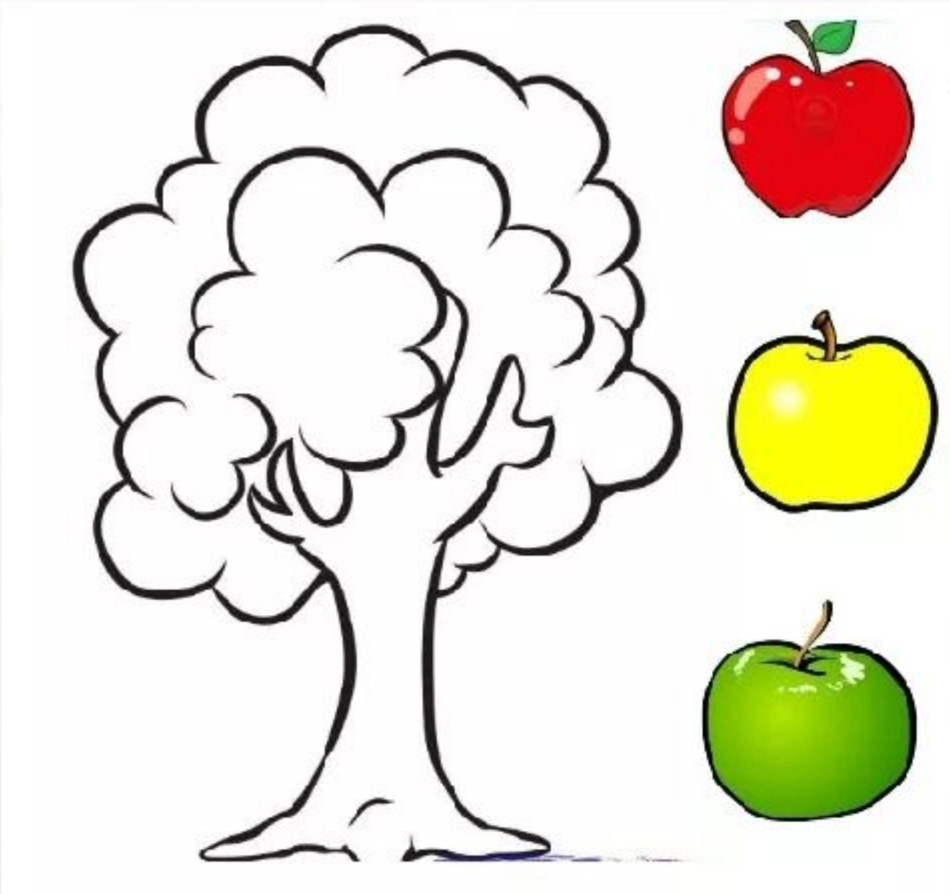
Разложи на множители многочлен $10x^4 + 3x^3 + 29x^2 + 9x - 3$.

№2. Найди произведение корней многочлена $P(x) = 15x^4 + ax^3 - 61x^2 + 17x + 6$, если один из корней равен 1.

№3 Составь многочлен, корнями которого будут числа

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{5}.$$

Дерево успеха



Урок интересный. Мне все понравилось, я выполнил все задания сам.

Урок мне понравился, но я не все усвоил.

Мне было скучно. Я ничего не выполнил.