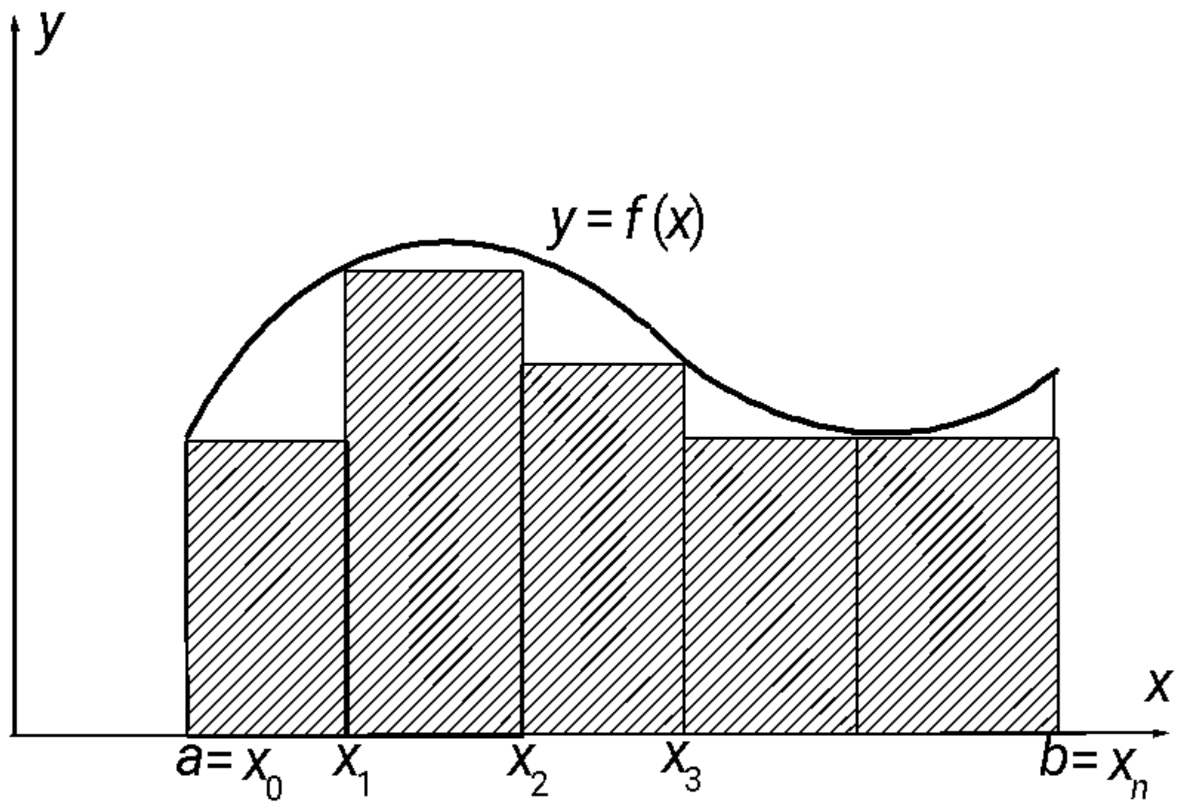
Здравствуйте!

Лекция №5

$ 17. Вычисление площадей и объемов

17.1. Площадь криволинейной трапеции



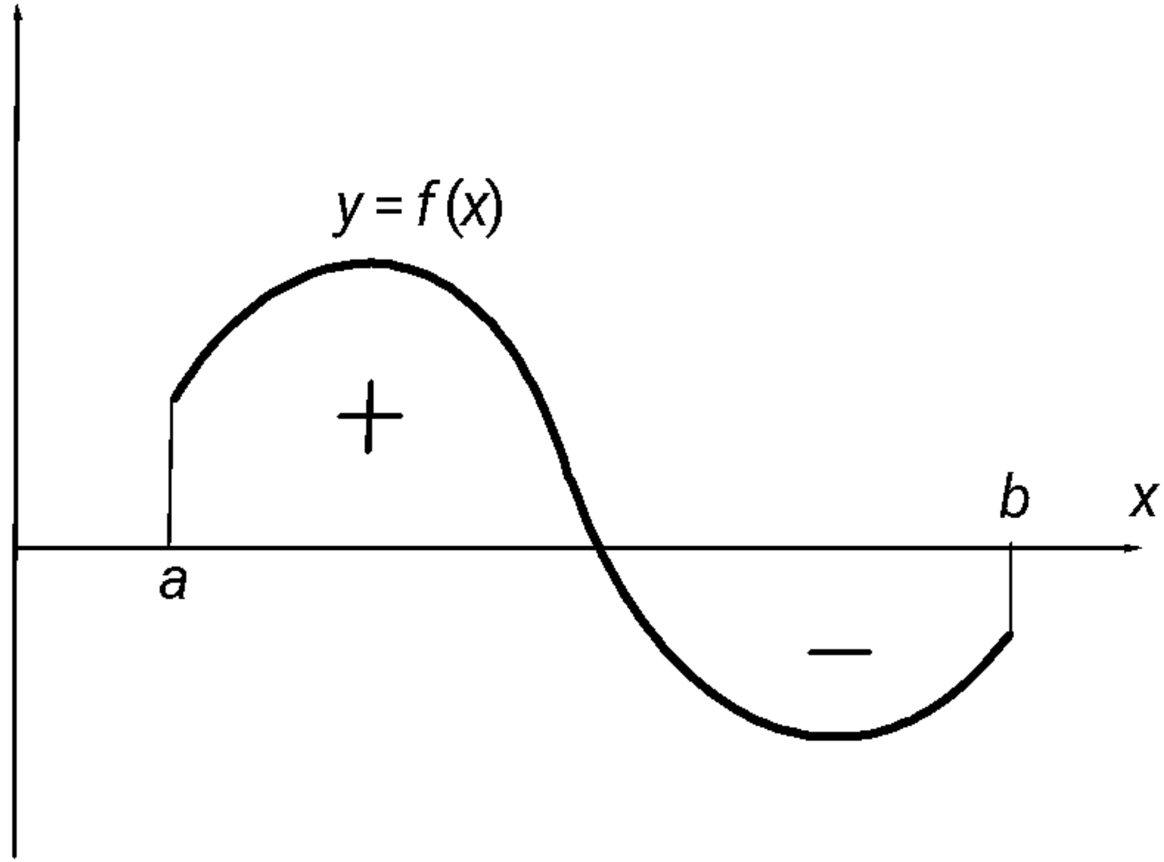
Рассмотрим фигуру, называемую **криволинейной трапецией**. Ее границами являются: ось OX (внизу), прямые x=a (слева) и x=b (справа) и кривая (сверху) (см. рис.).

Разобьем отрезок $[a,b]$ на части $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и пусть $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x)$. Составим величины $P_* = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ и $P^* = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$, в которых узнаем верхние и нижние суммы Дарбу. Величины $I_* = \lim\limits_{\lambda\to 0} P_*$ и $I^* = \lim\limits_{\lambda\to 0} P^*$ называются внутренней и внешней площадями криволинейной трапеции. Если выполняется равенство $I_* = I^* = P$, то их общее значение и называется площадью криволинейной трапеции.

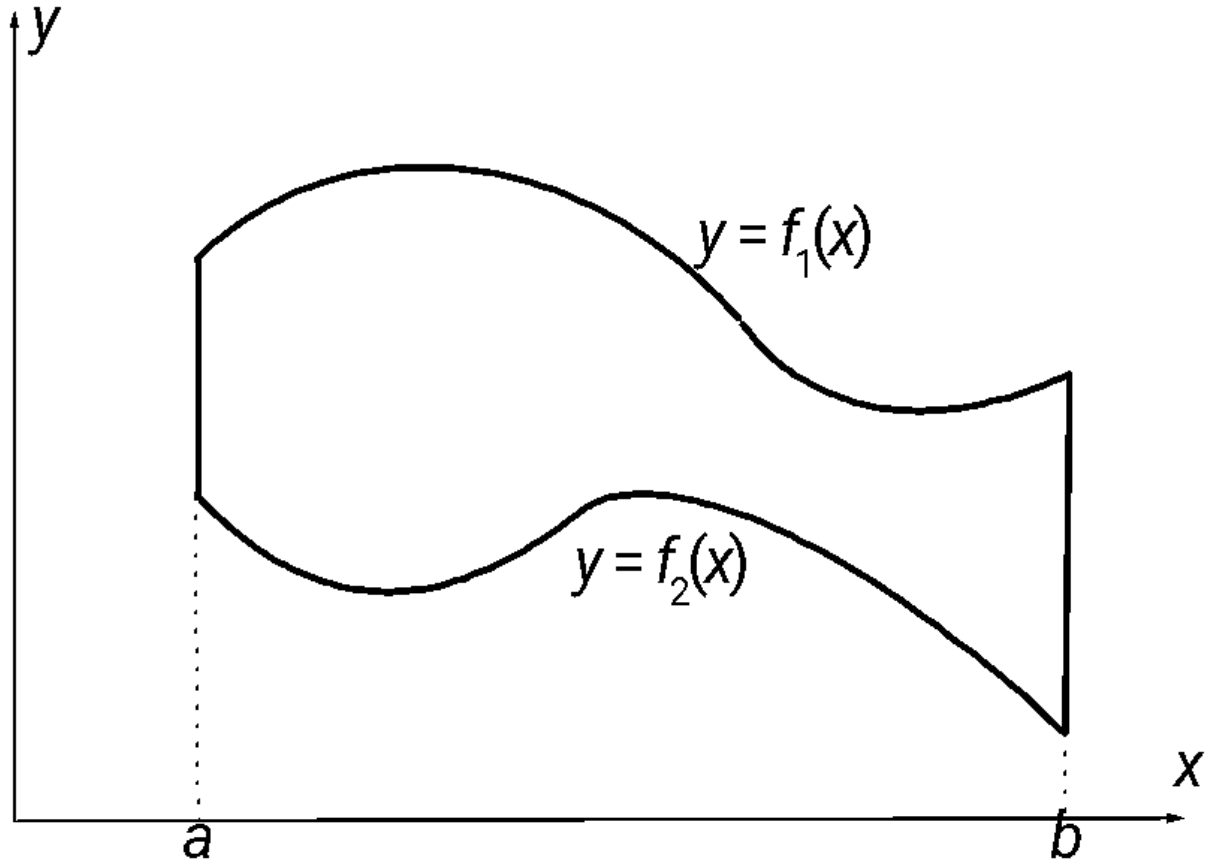
Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то, вспоминая теорию определенного интеграла, можно записать

$$P = \int_a^b f(x)dx,$$

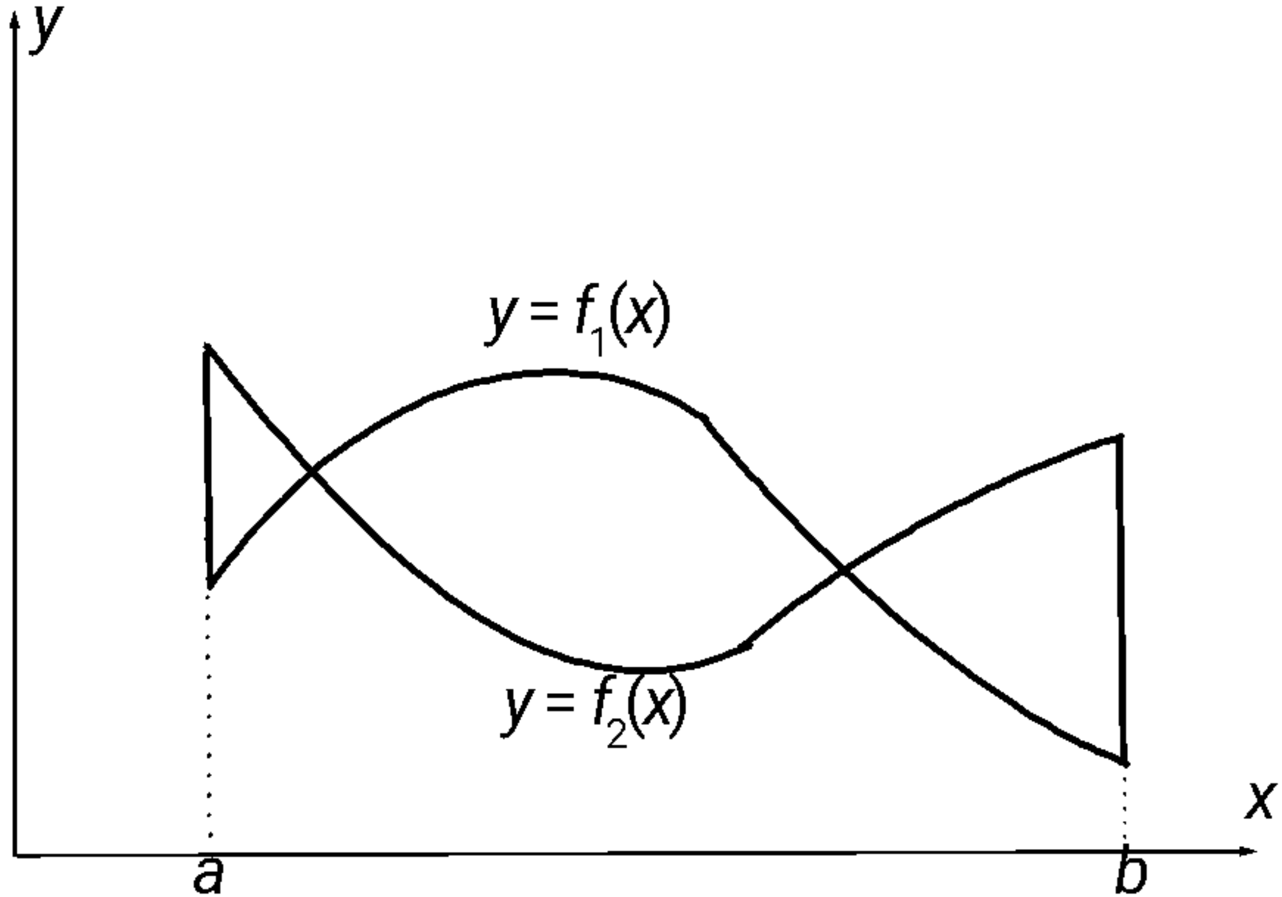
что и определяет площадь криволинейной трапеции.



Так как площадь не может быть отрицательной, то в этом случае



В этом случае очевидно, что



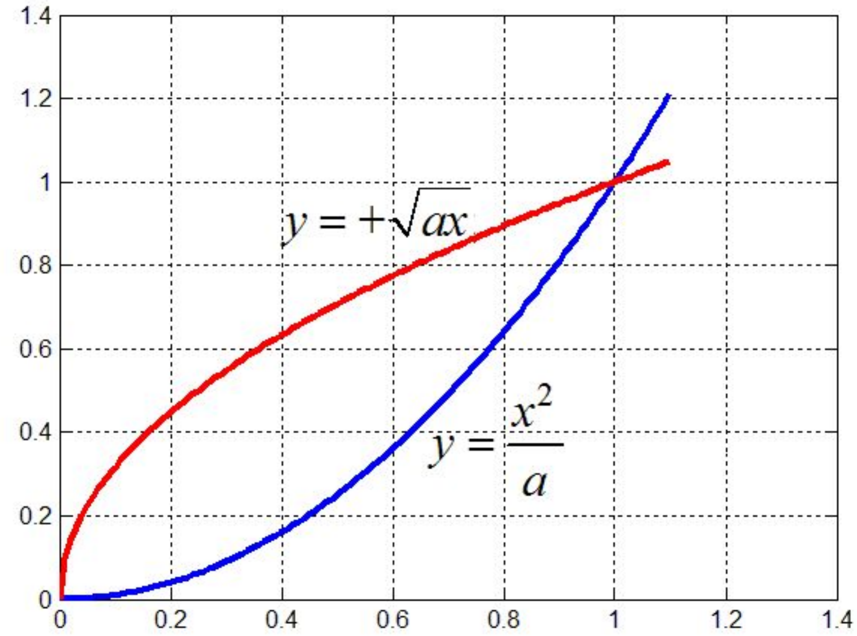
Наконец, в этом случае .

Учебный пример:

$$ax = y^2; \qquad ay = x^2;$$

$$y = \pm\sqrt{ax}; \qquad y = \frac{x^2}{a};$$

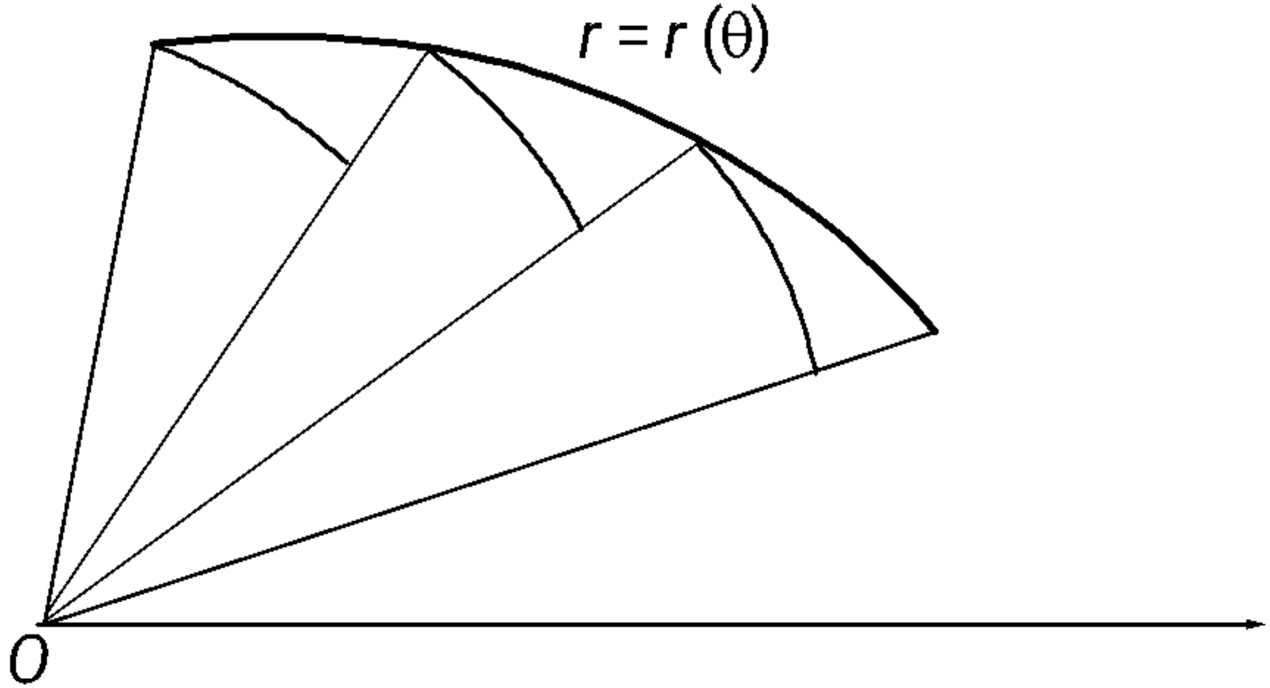
$$\sqrt{ax} = \frac{x^2}{a}; \qquad x = 0; \ \ x = a;$$



$$S = \int_0^a \left| \sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right| dx = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \sqrt{a}\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a - \frac{x^3}{3a}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{a}\cdot a^{3/2} - \frac{a^2}{3} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)a^2 = \frac{a^2}{3}$$

17.2. Площадь криволинейного сектора



Рассмотрим кривую , , заданную в полярных координатах. Соединим концы кривой прямыми линиями с полюсом системы координат. Получившаяся фигура называется криволинейным сектором.

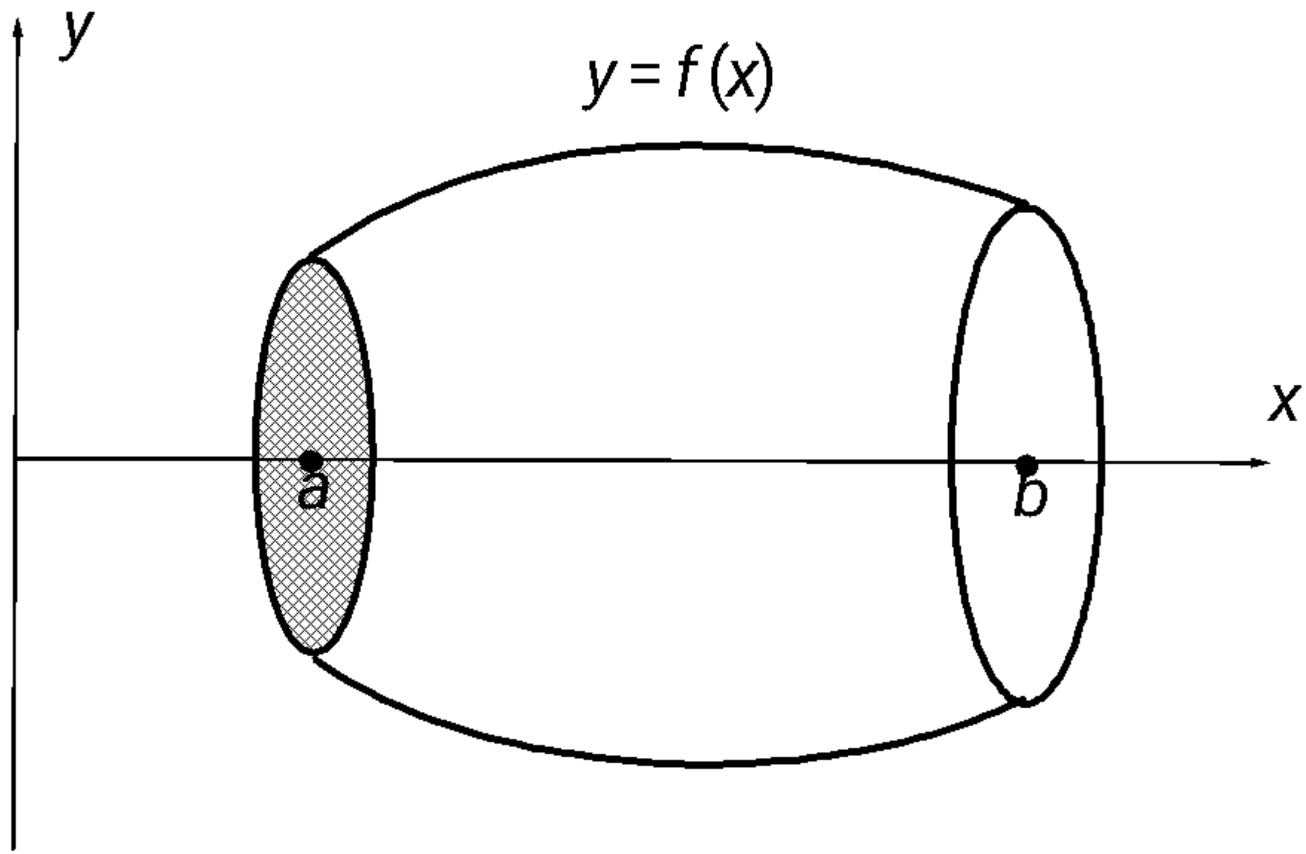
Разобьем отрезок $[\alpha,\beta]$ на части $\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_{n-1}<\theta_n=\beta$ и пусть $\lambda=\max\limits_i \Delta\theta_i$. Пусть далее $r_i=\inf\limits_{\theta\in[\theta_i,\theta_{i+1}]} r(\theta)$ и $R_i=\sup\limits_{\theta\in[\theta_i,\theta_{i+1}]} r(\theta)$.

Построим величины $P_*=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} r_i^2\Delta\theta_i$ и $P^*=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} R_i^2\Delta\theta_i$, имеющие смысл внутренней и внешней площадей криволинейного сектора. Если $\lim\limits_{\lambda\to 0} P_*=\lim\limits_{\lambda\to 0} P^*=P$, то величина P называется площадью криволинейного сектора. Если функция $r(\theta)$ интегрируема на $[\alpha,\beta]$, то

$$P=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta.$$

Пример. Вычислить площадь круга, полукруга, четверти круга.

17.3. Объем тела вращения



Представим себе, что имеется кривая , заданная на отрезке . Пусть эта кривая **вращается** около оси *OX*. Получающееся тело называется **телом вращения**

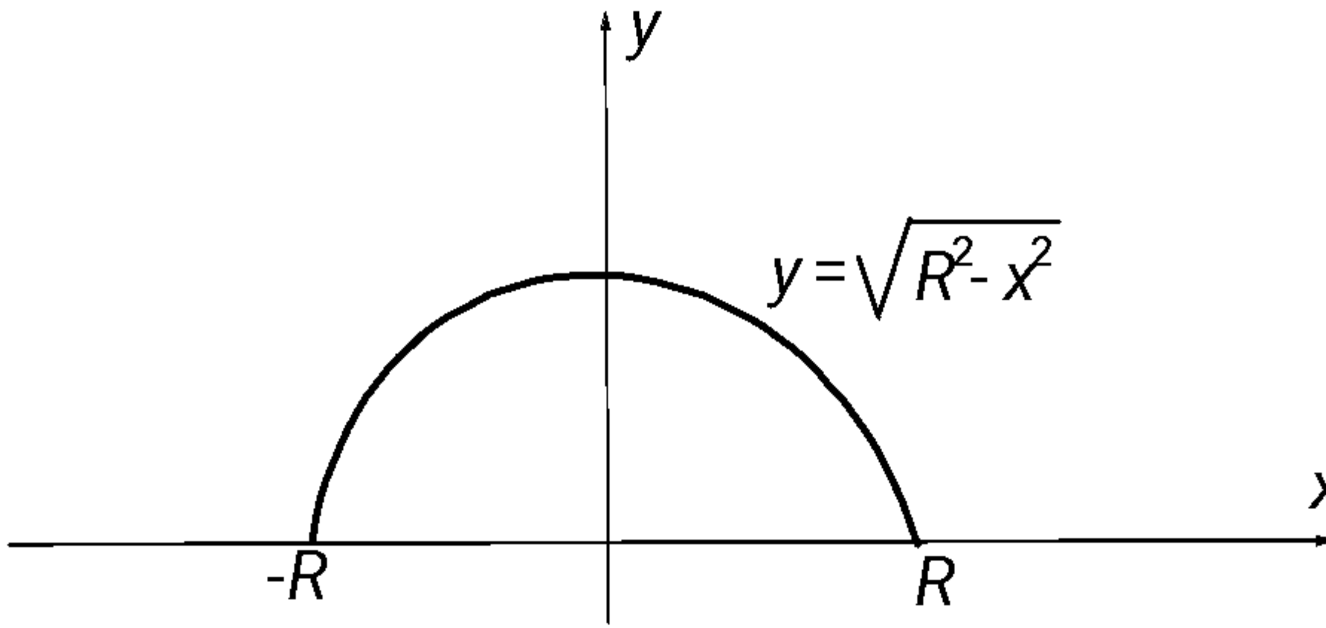
Разобьем отрезок $[a,b]$ на части $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и определим $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$. На каждом отрезке построим **цилиндр** с радиусом основания m_i и высотой Δx_i. Все эти цилиндры будут **вписаны** в наше тело вращения и их общий объем будет равен $V_* = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \pi m_i^2 \Delta x_i$.

Далее, на каждом отрезке построим **цилиндр** с радиусом основания M_i и высотой Δx_i. Все эти цилиндры будут **описаны** около нашего тело вращения и их общий объем будет равен $V^* = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2 \Delta x_i$.

Если $\lim\limits_{\lambda \to 0} V_* = \lim\limits_{\lambda \to 0} V^* = V$, то величина V называется объемом тела вращения. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то очевидно, что

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Пример. **Объём шара**



Очевидно, что шар получается вращением полуокружности около оси OX. Поэтому объем шара

.

$.18. Несобственные интегралы первого рода

Пусть

1. функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,+\infty)$;
2. $\forall A > a$ существует $\int\limits_a^A f(x)dx$.

Произведем теперь предельный переход $A \to +\infty$. Тогда $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ называется **несобственным интегралом первого рода** и обозначается символом $\int\limits_a^\infty f(x)dx$:

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx=\int_a^\infty f(x)dx.$$

Если этот предел **существует и конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится** (или: **существует**). Если этот предел равен **бесконечности** или вообще **не существует**, то говорят, что несобственный интеграл **расходится** (или: **не существует**).

Совершенно аналогично определяются и следующие несобственные интегралы первого рода:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{a} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{a} f(x)dx + \lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A} f(x)dx \ (a - \text{любое}).$$

Простейшие свойства несобственных интегралов первого рода

1. Если сходится $\int_a^\infty f(x)dx$, то $\forall b > a$ сходится и $\int_b^\infty f(x)dx$.

Наоборот, если $\int_b^\infty f(x)dx$ сходится и существует $\int_a^b f(x)dx$, то сходится и $\int_a^\infty f(x)dx$. При этом верно соотношение

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $A > b > a$. Тогда имеем

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^A f(x)dx.$$

Сделаем предельный переход $A \to +\infty$:

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lim_{A\to+\infty}\int_b^A f(x)dx.$$

Так как предел слева существует, то существует и предел справа и $\int_b^{\infty} f(x)dx$ сходится и соотношение принимает вид

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx.$$

Подумайте сами, что надо изменить в предыдущей фразе, чтобы доказать обратное утверждение.

2. Если $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится, то $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_A^\infty f(x)dx = 0$

<u>Доказательство</u>.

Согласно предыдущему пункту

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \int\limits_a^A f(x)dx + \int\limits_A^\infty f(x)dx$$

Отсюда

$$\int\limits_A^\infty f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx - \int\limits_a^A f(x)dx.$$

Делая предельный переход $A\to+\infty$, получаем

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_A^\infty f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx - \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^\infty f(x)dx - \int\limits_a^\infty f(x)dx = 0.$$

3. Если сходятся $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$, то сходится также и $\int\limits_a^\infty (f(x) \pm g(x))dx$ и верно соотношение

$$\int\limits_a^\infty (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx \pm \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

<u>Доказательство</u>. Имеем

$$\int\limits_a^A (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^A f(x)dx \pm \int\limits_a^A g(x)dx.$$

Делая предельный переход $A \to +\infty$, получаем

$$\int\limits_a^\infty (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A (f(x) \pm g(x))dx =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x)dx \pm \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A g(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx \pm \int\limits_a^\infty g(x)dx.$$

4. Если сходятся $\int_a^\infty f(x)dx$ и c – константа, то сходится и $\int_a^\infty cf(x)dx$ и верна формула

$$\int_a^\infty cf(x)dx = c\int_a^\infty f(x)dx.$$

<u>Доказательство</u>. Имеем

$$\int_a^A cf(x)dx = c\int_a^A f(x)dx.$$

Делая предельный переход $A \to +\infty$, получаем

$$\int_a^\infty cf(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A cf(x)dx = c\cdot\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = c\int_a^\infty f(x)dx.$$