Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кубанский государственный технологический университет»
(ФГБОУ ВО «КубГТУ»)

КУБАНСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция
Динамика жидкости и твердого тела

Краснодар
2020

Глава 5.

Элементы механики сплошных сред.

§ Кинематическое описание движения жидкости. Векторные поля, поток и циркуляция векторного поля. Общие св-ва жидкостей и газов.

Молекулы газа соверш. беспор. хаотич. движение, несвяз или весьма слабо связ. силами вдализ, движутся свободно и занимают весь объём сосуда.

Жидкость имеет определ. объём, и принимает форму сосуда. В жидкости сред. расстоя. между молек. постоянно, поэтому $V = const$.

Св-ва жид. и газов. во многих случаях одинаковы. Гидроаэромеханика – раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твёрдыми телами, пользуется единым подход к изучению жидкостей и газов.

Движение жидкости называется течением, а совокупность частиц движущейся жидкости – потоком. Графически движение жидкости обозначается с помощью линий тока, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответ. точках пространства.

Г1

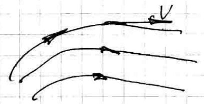
Линии тока проводят так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площадке ⊥ им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость и наоборот. Т.о. линии тока позволяют характ. движение жидкости.

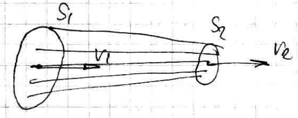
Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют <u>трубкой тока</u>.

Течение жидкости называется установившимся или стационарным, если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой её точке со временем не изменяются.

Произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки жидкости.

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = const$$ – ур-ие неразрывности





В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как <u>сплошная</u> непрерывно распределённая в занятой ими части пространства. Сжимаемостью жидкостей и газов можно пренебречь, используя понятие <u>несжимаемая</u>

жидкости - это жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем.

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется давлением p жидкости:

$$p = \Delta F / \Delta S \quad [1\,Па = 1\,Н / 1\,м^2].$$

Давление при равновесии жидкости или газа подчиняется <u>зн. Паскаля</u>: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причём давление одинаково передаётся по всему объёму, занятому покоящейся жидкостью. Давление в жидкости изменяется линейно с высотой и называется

$$p = \rho g h \quad \text{гидростатическим.}$$

На любое тело находящееся в жидкости или газе действует выталкивающая сила

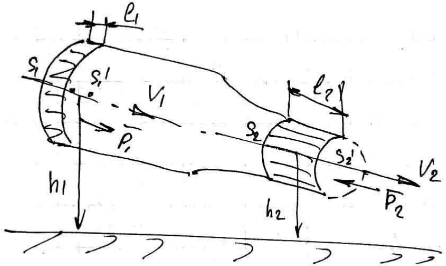
$$F_A = \rho g V$$

Она назыв. силой Архимеда.

§ Уравнение Бернулли.

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, огранич. S_1 и S_2.

За малый промежуток времени Δt жидкость перемещается от S_1 к S_1', S_2 к S_2'



Согласно закону сох. энергии, изменение полной энергии $E_2 - E_1$ идеал. несжим. жид. должно быть равно работе A внешних сил по перемещению массы m жидкости

$$E_2 - E_1 = A$$

С другой стороны работа, это работа соверш. при перемещении всей жидкости между S_1 и S_2

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2$$

т.к. $F_1 = p_1 S_1$, $F_2 = -p_2 S_2$, $l_1 = v_1 \Delta t$, $l_2 = v_2 \Delta t$

Полные энергии

$$E_1 = \frac{m v_1^2}{2} + mgh_1 \qquad E_2 = \frac{m v_2^2}{2} + mgh_2$$

Тогда $\frac{m v_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{m v_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t$

Согласно ур-ию неразрывности

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = const.$$

Тогда $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2$

Т.к. сечения выбир. произвольно

ть можно записать

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const$$

Ур-ие Бернулли, справедливо для жидкостей где трение очень мало.

p - статическое давление

$\rho v^2/2$ - динамическое давление.

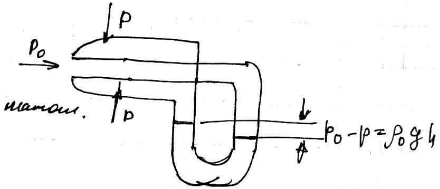
$\rho g h$ - гидростатич. давление.

Для горизонт. трубы

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = const$$ — полное давление.

Скорость потока жидкости измеряют трубкой Пито-Прандтля.

$$p_0 - p = \rho_0 g h$$

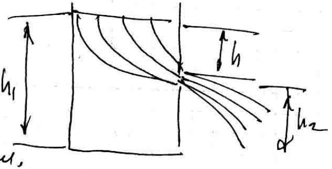


ρ_0 - плотность жид. в маном.

$$v = \sqrt{2\rho_0 g h/\rho}$$

Скорость потока жидкости.

Скорость истечения жидкости через отверстие в сосуде

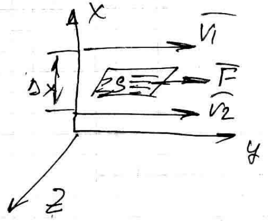


$v_2 = \sqrt{2gh}$ - фор. Торричелли.

§ <u>Вязкость. Коэф. вязкости жидкости.</u>

Вязкость (внутреннее трение) – это св-во реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоёв реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверх. слоёв. Ускоряющ. и тормозящие силы.

$\bar{F}\uparrow$ при $S\uparrow$, и зависит от роста V_1 к V_2.
Направлен, в котором отсчит. расстояние между слоями $\perp$ скорости течения слоёв.



Величина $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}$ харак. как быстро меняется скорость от слоя к слою и назыв. градиентом скорости.

Модуль силы внут. трения

$$F = \eta \left| \frac{\Delta \upsilon}{\Delta x} \right| S$$

η – динамическая вязкость. $[1 Па\cdot с = 1 Н\cdot с/м^2]$

$\eta\uparrow$ $\bar{F}\uparrow$, жидкость не идеальна.

$\eta = f(t)$. у газов $t\uparrow$ $\eta\uparrow$

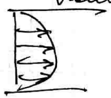
у жидкости $t\uparrow$ $\eta\downarrow$.

Сущ. два течения жидкости.

Ламинарное (слоистое) – без перемеш. слоев.

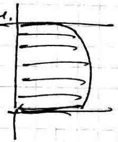
Турбулентное (вихревое) – перемеш. слоев.

Ламинар.



$V_{max} = 2\langle V\rangle$

Турбулен.



$V_{max} = 1{,}23\,\langle V\rangle$.

Характер течения зависит от числа Рейнольдса.

$$Re = \frac{\rho\langle v\rangle d}{\eta} = \frac{\langle v\rangle d}{\nu}$$

где $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость,

d – $\varnothing$

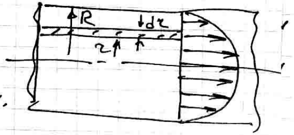
Ламинарное $Re \le 1000$

Турбулентное $Re \ge 2000$.

§ Формула Пуазейля.

Метод основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре.

Рассмотрим капилляр R и l. Выделим слой рад. r и тол. dr. Сила внутр. трения



$$F = -\eta\frac{dv}{dr}dS = -\eta\, 2\pi r l\frac{dv}{dr}$$

dS – боковая поверхность цилин. слоя.

„–" при $r\uparrow$ $V\downarrow$

Для установ. течения F урав. с силой дав. на его основание.

$$-\eta\, 2\pi r l \frac{dv}{dr} = \Delta p\, \pi r^2$$

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r\, dr.$$

Интегрируя $v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2)$

по параболическому закону, max на оси трубки.

За время t из трубки вытекает объем жидкости

$$V = \int_0^R v t\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8\eta l}$$

Тогда вязкость $\boxed{\eta = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8 V l}}$

§ Формула Стокса.

Вывод. на основ. измер. скорости сфер. тел. малой формы (метод подобия). Пусть в напр. вер. вниз упал шарик, на него действуют силы:

тяжести $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$, Архимеда $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$

Сила сопротив (эксперимент) $F = 6\pi \eta r v$.

При равномерном движ.

$$P = F_A + F$$

или $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi \eta r v$

Откуда $\boxed{v = 2(\rho - \rho') g r^2 / 9\eta}$

Измерив v получим $\eta = 2(\rho - \rho') g r^2 / 9 v$

§ Упругие напряжения, Закон Гука. Растяжение, сжатие, кручение.

Деформацией твердого тела — называется изменение размеров и формы тела. Деформации вызываются силовым и температурным воздействием. При деформациях происходят смещения частиц, находящихся в узлах кристаллических решеток твердых тел, из первоначального положения в равновесия в другое. Этому препятствуют силы взаимодействия между частицами, вследствие чего в деформированном теле возникают внутренние упругие силы, которые уравновешивают внешние силы.

Упругой называется деформация, которая исчезает после прекращения действия сил. При этом происходит обратимое смещения частиц из новых положений равновесия в кристаллической решетки в промежуточное.

Неупругие деформации твёрдого тела, сопровождающиеся необратимой перестройкой его кристаллической решетки, называются __пластическими.__

Напряжением σ называется физическая величина численно равная упругой силе $F_{упр}$, приходящейся на единицу площади S сечения тела:

$$\sigma = \frac{dF_{упр}}{dS}$$

Напряжение называется нормальным, если сила $dF_{упр}$ нормальна к поверхности dS, и касательным, если сила касательна к этой поверхности.

Мерой деформации является относительная деф. $\Delta x / x$, равная отношению абсолютной деф. к первоначальному значению величины x.

Закон Гука: напряжение σ при упругой деформации тела пропорционально относительной деформации: $\sigma = k \frac{\Delta x}{x}$.

k - модуль упругости, численно равный напряжению, которое возникает при относител. дефор. равной 1.

Величина $\alpha = \frac{1}{k}$ называется коэффициентом упругости.

Напряжение при котором нарушается пропорциональность между напряжением и деформацией, называется пределом пропорциональности.

Продольное растяжение (сжатие) состоит в изменении размеров тела под действием растягивающей и сжимающей силы F. Упругое растяжение (сжатие) прекращается при условии $F_{упр}=F$. Мерой деформации является относительное удлинение $\frac{\Delta l}{l}$. В этом случае $k = E$ называется модулем Юнга. При $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta l}{l}$ по закону Гука

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}$$

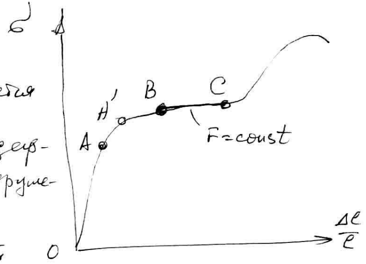
При $\Delta l = l$ модуль Юнга $E = \frac{F}{S} = \sigma$.

Относительное растяжение (сжатие) образца сопровождается его относительным поперечным сжатием (расширением) $\Delta d / d$. Коэффициентом Пуассона μ называется отношение относительного поперечного сжатия (расширения) $\frac{\Delta d}{d}$ к относительному продольному удлинению (сжатию) $\frac{\Delta l}{l}$:

$$\mu = \frac{\Delta d}{d} \Big/ \frac{\Delta l}{l}$$

A' – предел упругости

B' – предел текучести



Пределом прочности называется напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, выдерживаемой телом перед разрушением.

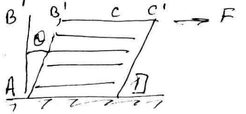
Объёмная плотность потенциальной энергии тела

$$w_\sigma = A_{упр} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Всестороннее растяжение (сжатие)

$$\sigma = K \frac{\Delta V}{V}$$

<u>Сдвигом</u> – называется деформация, при которой все плоские слои твердого тела, // некоторой плоскости (плоскости сдвига), не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются // друг другу. Сдвиг происход под действием силы F, приложенной касательно к грани BC // плоскости сдвига. Мерой деформации является угол сдвига $\theta \approx tg\theta = \frac{\Delta x}{x}$



$\Delta x = CC'$. Зк. Гука $\sigma_\tau = \frac{F}{S} = G\theta$

КУБАНСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

G – модуль сдвига.

$$G = \frac{E}{2}(1+\mu)$$

Кручение – наз. деформация образца с одним закреплённым концом под действием пары сил, плоскость которой ~~закреплена~~ $\perp$ к оси образца.

Момент $M_к$ этой пары сил назыв. крут. момент.

Кручение состоит в относительном повороте // друг другу сечений, проведенных $\perp$ к оси образца.

Если φ – угол поворота, z – измеренное по оси образца расстояние от закрепленного конца, то разность углов поворота двух бесконечно близких сечений равна

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dz}dz = \theta dz \qquad \theta = \frac{d\varphi}{dz}$$ – относит. угол кручения.

θ – мера деформации при кручении.

Полный поворот $\varphi = \theta z$.

Закон Гука при кручении

$$\theta = \frac{M_к}{G J_p}$$

J_p – полярный момент инерции кручения.

Для круглого сечения радиуса R

$$J_p = \pi R^4/2$$

Угол поворота $\varphi = \frac{M_к L}{G J_p}$ или $M_к = \frac{G J_p}{L}\varphi$.

Удельная потенциальная энергия

$$\omega_к = \frac{M_к^2 r^2}{2 G J_p^2}$$

КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!