Тема: Фильтр Винера.

Кафедра Радиоэлектроники.

Преподаватель:
Лазаренко
Сергей Валерьевич.

Учебные вопросы:

1. Постановка задачи фильтрации.
2. Интегральное уравнение оптимального фильтра.
3. Коэффициент передачи оптимального фильтра.

1. Постановка задачи фильтрации.

Например, пусть на вход приемника поступает смесь амплитудно-модулированного сигнала

$$s(t) = U(t)\cos(\omega t + \varphi)$$

и помехи *n(t)*, т.е.

$$x(t) = s(t) + n(t) = U(t)\cos(\omega t + \varphi) + n(t)$$

На вход некоторой системы (фильтра) поступает аддитивная смесь *x(t)* полезного сигнала *s(t)* и шума (помехи) *n(t)*

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

Желаемым выходом фильтра является, естественно, сигнал

$$y_0(t) = s(t)$$

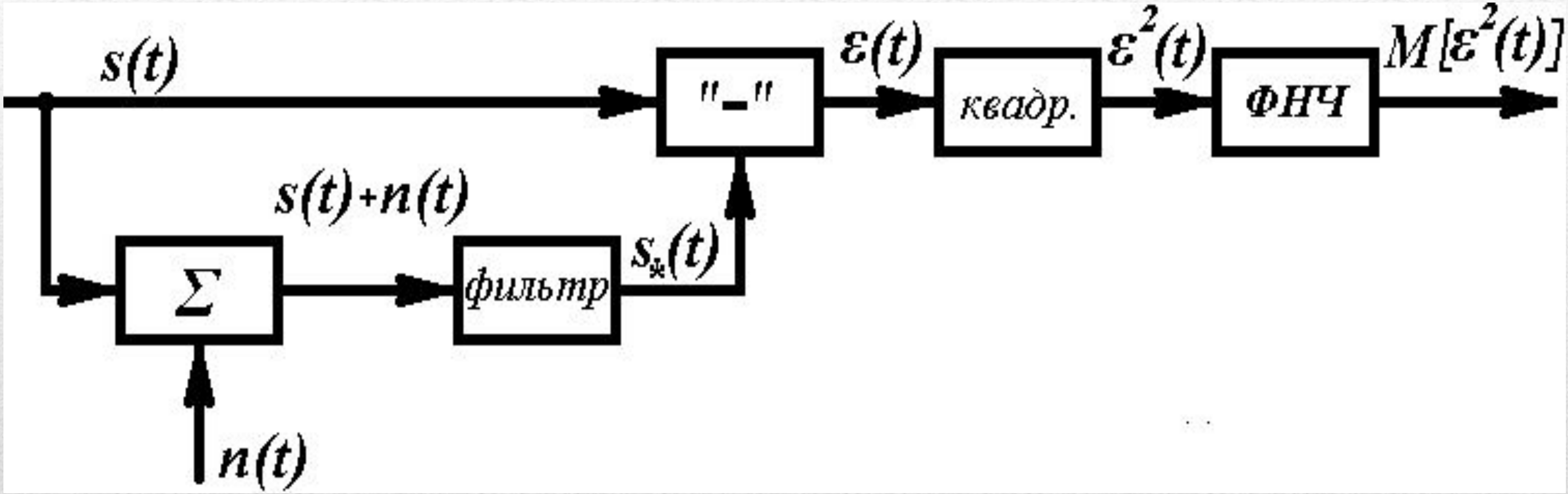
Реакцией реального фильтра является оценка сигнала, т.е.

$$y(t) = s^*(t)$$

Требуется найти характеристики реального фильтра, выходное колебание которого $y(t)=s^*(t)$ отличалось бы от желаемого выхода $y_0(t)=s(t)$ с минимальной среднеквадратической погрешностью

$$M\left[\varepsilon^2(t)\right] = M\left[\left(s(t) - s^*(t)\right)^2\right] \to \min \qquad (1)$$

Так как рассматриваемые процессы эргодические, то усреднение сводится к интегрированию (*низкочастотной фильтрации*).



Задача может ставиться несколько иначе: по известным значениям *x(t)* в прошлом и настоящем дать оптимальную оценку $s^*(t+\Delta)$, т.е. в будущем.

2. Интегральное уравнение оптимального фильтра.

Более подробно рассмотрим выражение (1). При этом учтем, что выходной сигнал искомого реального фильтра определится интегралом Дюамеля

$$s_*(t) = \int_0^\infty g(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty g(\tau)[s(t-\tau)+n(t-\tau)]d\tau \qquad (2)$$

Где g(τ)- импульсная характеристика искомого реального фильтра. Для нахождения этой характеристики определим квадрат ошибки

$$\varepsilon^2(t) = [s(t)-s_*(t)]^2 = s^2(t) - 2s(t)s^*(t) + s^{*2}(t) =$$

$$= s^2(t) - 2s(t)\int_0^\infty g(\tau)x(t-\tau)d\tau + \int_0^\infty\int_0^\infty g(\tau)g(\gamma)x(t-\tau)x(t-\gamma)d\tau\, d\gamma \qquad (3)$$

Усредняя левую и правую части выражения (3), получим

$$M[\varepsilon^2(t)] = M[s^2(t)] - 2\int_0^\infty g(\tau)M[x(t-\tau)s(t)]d\tau +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty g(\tau)g(\gamma)M[x(t-\tau)x(t-\gamma)]d\tau\, d\gamma \qquad (4)$$

Учтем, что $M\left[s^2(t)\right]=\sigma_s^2$ - энергия (дисперсия) сигнала *s(t)*,

$M\left[x(t-\tau)s(t)\right]=B_{xs}(\tau)$ - взаимная корреляционная функция сигнала *s(t)* и принятого сигнала (принятой реализации) *x(t)*,

$M\left[x(t-\tau)x(t-\gamma)\right]=B_x(\tau-\gamma)$ - автокорреляционная функция принятого сигнала.

С учетом этого выражение (4) перепишется в виде

$$M\left[\varepsilon^2(t)\right]=\sigma_\varepsilon^2=\sigma_s^2-2\int_0^\infty g(\tau)\,B_{xs}(\tau)\,d\tau+\int_0^\infty\int_0^\infty g(\tau)g(\gamma)B_x(\tau-\gamma)\,d\tau\,d\gamma \qquad (5)$$

Пусть импульсная характеристика какого-то условного фильтра равна

$$g(t)=g_0(t)+\eta\cdot h(t) \qquad (6)$$

Где *h(t)* - произвольная функция, не равная тождественно нулю;

Найдем среднеквадратическую ошибку фильтрации этого условного фильтра, для чего подставим в выражение (5) соотношение (6).

$$M\left[\varepsilon_1^2(t)\right]=\sigma_s^2-2\int_0^\infty\left[g_0(\tau)+\eta\cdot h(\tau)\right]B_{xs}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\left[g_0(\tau)+\eta\cdot h(\tau)\right]\left[g_0(\gamma)+\eta\cdot h(\gamma)\right]B_x(\tau-\gamma)\,d\tau\,d\gamma \qquad (7)$$

Очевидно, что при $\eta = 0$ ошибка фильтрации $M\left[\varepsilon_1^2(t)\right] = M\left[\varepsilon^2(t)\right]$ минимальна, так как в этом случае $g(t)=g_0(t)$.

Перепишем формулу (7) в следующем виде

$$M\left[\varepsilon_1^2(t)\right] = \sigma_s^2 - 2\int_0^\infty g_0(\tau)\cdot B_{xs}(\tau)d\tau - 2\eta\int_0^\infty h(\tau)\cdot B_{xs}(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty g_0(\tau)\cdot g_0(\gamma)\cdot B_x(\tau-\gamma)d\tau\, d\gamma + 2\eta\int_0^\infty\int_0^\infty g_0(\tau)\cdot h(\gamma)\cdot B_x(\tau-\gamma)d\tau\, d\gamma +$$

$$+\eta^2\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\cdot h(\gamma)\cdot B_x(\tau-\gamma)d\tau\, d\gamma \qquad (8)$$

Согласно выражению (5)

$$M\left[\varepsilon^2(t)\right] = \sigma_s^2 - 2\int_0^\infty g_0(\tau)\, B_{xs}(\tau)d\tau + \int_0^\infty\int_0^\infty g_0(\tau)g_0(\gamma)B_x(\tau-\gamma)d\tau\, d\gamma \qquad (9)$$

Введем обозначения

$$Q = \int_0^\infty h(\tau)\cdot B_{xs}(\tau)d\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty g_0(\tau)h(\gamma)\cdot B_x(\tau-\gamma)d\tau\, d\gamma \qquad (10)$$

$$L = \int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau)\cdot h(\gamma)\cdot B_x(\tau-\gamma)d\tau\, d\gamma \qquad (11)$$

Подставляя соотношения (9), (10), (11) в выражение (8), получим

$$M\left[\varepsilon_1^2(t)\right] = M\left[\varepsilon^2(t)\right] - 2\eta Q + \eta^2 L \qquad (12)$$

Условие минимума

$$\frac{dM\left[\varepsilon_1^2(t)\right]}{d\eta} = -2Q + 2\eta L = 0$$

откуда следует $\eta = \dfrac{Q}{L}$ (13)

С другой стороны, как было отмечено ранее, для обеспечения минимума $M\left[\varepsilon_1^2(t)\right]$ необходимо, чтобы $\eta = 0$. Из выражения (13) следует, что *Q=0*.

Преобразуем выражение (10) следующим образом, поменяв порядок интегрирования и приравняв *Q=0*

$$Q = \int_0^\infty h(\tau)\cdot\left[B_{xs}(\tau)d\tau - \int_0^\infty g_0(\gamma)\cdot B_x(\tau-\gamma)d\gamma\right]d\tau = 0$$

Так как функция *h(t)* - произвольная функция, не равная нулю, то, следовательно, нулю равно выражение в квадратных скобках, откуда следует:

$$B_{xs}(\tau)d\tau = \int_0^\infty g_0(\gamma)\cdot B_x(\tau-\gamma)d\gamma \qquad (14)$$

3. Коэффициент передачи оптимального фильтра.

Применяя к обеим частям выражения (14) преобразование Фурье и используя свойства спектра свертки двух функций, получим

$$S_{xs}(\omega) = K_0(\omega) S_x(\omega) \qquad (15)$$

Где $S_{xs}(\omega)$ - взаимный энергетический спектр сигнала $s(t)$ и принятой реализации $x(t)$ (смеси сигнала и шума);

$K_0(\omega)$ - коэффициент передачи мощности оптимального фильтра;

$K_x(\omega)$ - энергетический спектр принятой реализации $x(t)$ (смеси сигнала и шума).

Из выражения (15) следует

$$K_0(\omega) = \frac{S_{xs}(\omega)}{S_x(\omega)} \qquad (16)$$

Если сигнал $s(t)$ и помеха $n(t)$ не коррелированны между собой (что практически всегда выполняется), то

$$S_{xs}(\omega) = S_s(\omega)$$

$$S_x(\omega) = S_s(\omega) + S_n(\omega)$$

В этом случае выражение (16) приобретает вид

$$K_0(\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)} \qquad (17)$$

Среднеквадратическая ошибка восстановления сигнала с помощью оптимального фильтра определится на основании уравнения Винера-Хопфа при τ=0

$$\sigma^2_{\varepsilon\min} = B_{xs}(0)d\tau = \int_0^\infty g_0(\gamma)\cdot B_x(\gamma)d\gamma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\omega_н}^{\omega_в} K_0(\omega)\cdot S_n(\omega)d\omega$$