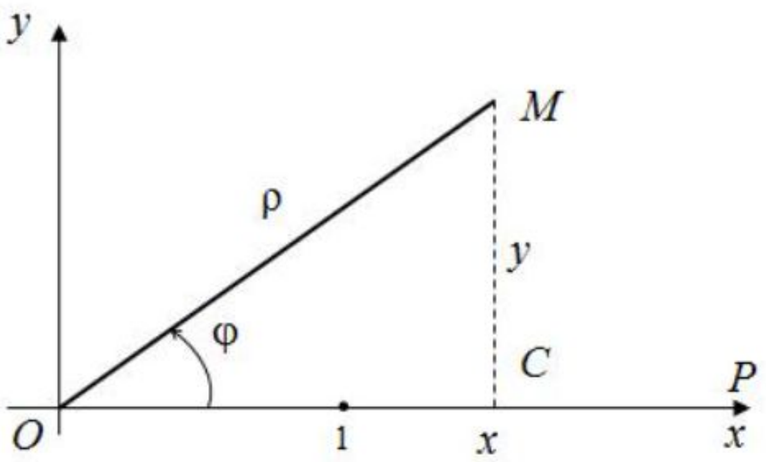
ПОСТРОЕНИЕ ЭСКИЗОВ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

СЕМИНАР 4

ЭСКИЗЫ КРИВЫХ ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ И В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Зададим на плоскости точку O, назовем ее ***полюсом***. Из этой точки проведем вправо горизонтально луч OP – ***полярную ось***. На полярной оси зададим единицу, определим масштаб.



Полярными координатами (ρ, φ) точки M, не совпадающей с полюсом, называются: расстояние ρ от полюса O до точки M – ***полярный радиус точки***, и угол φ от полярной оси до луча OM – ***полярный угол точки***.
Для полюса O полагается, что $\rho = 0$, а угол φ не определен. Полярный угол точки M, отличной от O, имеет бесконечно много значений, ***главным значением угла*** φ называется его значение, удовлетворяющее условию $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Совместив начало декартовых координат с полюсом, а ось Ox с полярной осью, из прямоугольного треугольника OCM выразим соотношения между полярными и декартовыми координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Определяя ρ, как функцию переменной φ:

$$\rho = \rho(\varphi),$$

где в общем случае $-\infty < \varphi < +\infty$, получим некоторую кривую, заданную в полярных координатах.

Так как ρ – радиус – неотрицательное число, то область определения ρ находим из условия $\rho(\varphi) \geq 0$. Угол φ откладываем от полярной оси в положительном направлении – против часовой стрелки. Откладывая значения φ по часовой стрелке, получим отрицательные значения угла φ.

СПИРАЛЬ АРХИМЕДА

Построим кривую $\rho = \varphi$. Область определения определим из неравенства

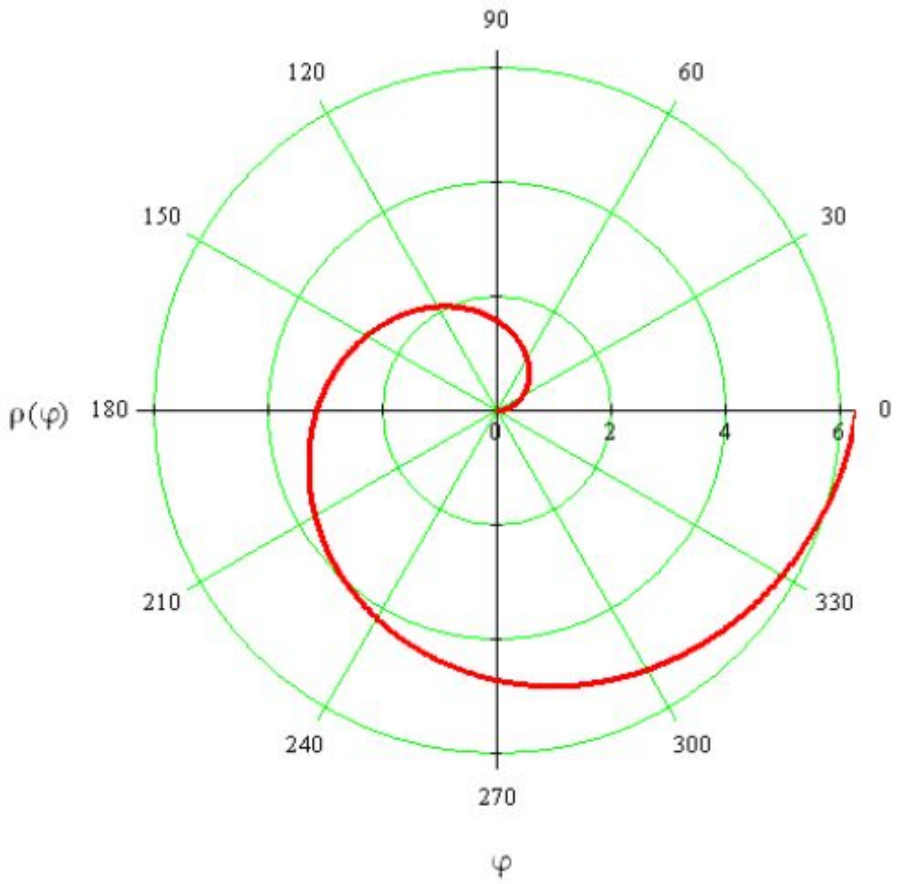
$$\rho \geq 0 \;\Rightarrow\; \varphi \geq 0.$$

Значения углов φ будем откладывать в положительном направлении, против часовой стрелки. Значения занесем в таблицу:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	0	0,52	1,05	1,57	2,09	2,62	3,14	3,66	4,19	4,71	5,23	5,76	6,28

Функция $\rho = \varphi$ монотонно возрастает, с ростом угла точка удаляется от полюса.

Откладывая на лучах, выходящих из полюса под углом φ, соответствующие значения ρ, построим кривую.



Полученная кривая называтся спиралью Архимеда

ОКРУЖНОСТЬ

Построим кривую, определяемую уравнением $\rho = \cos\varphi$.

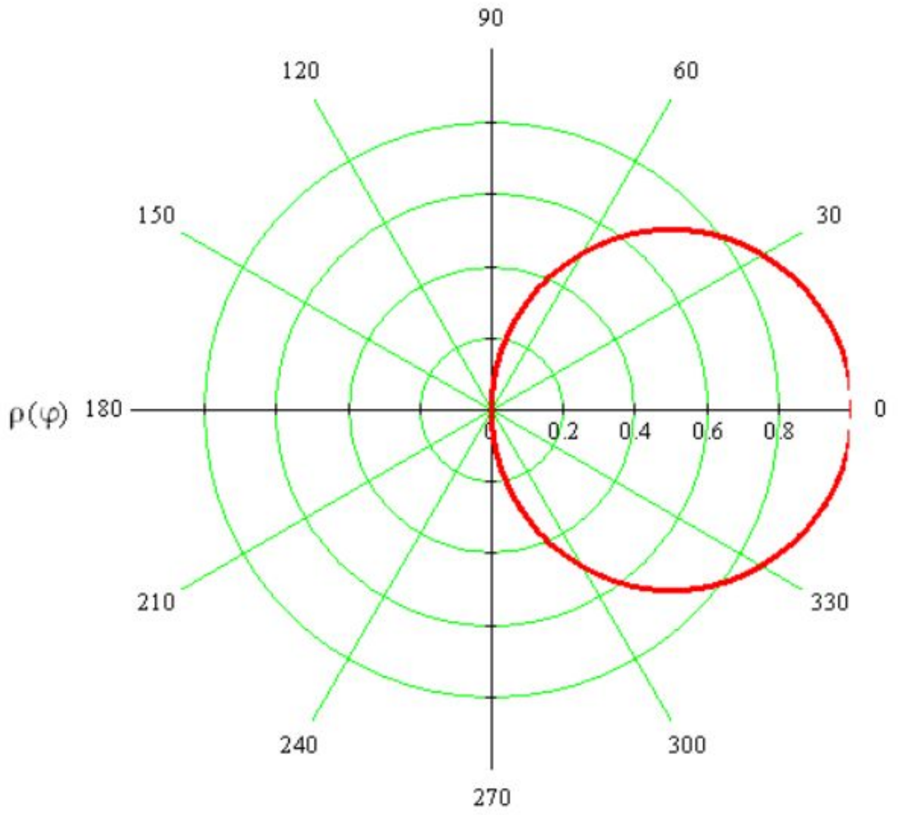
Область определения найдем из неравенства $\rho \geq 0$:

$$\cos\varphi \geq 0 \;\Rightarrow\; -\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\; k \in \mathbf{Z}.$$

Составим таблицу значений.

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Построим кривую:



Полученная кривая является окружностью радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Действительно, перейдем от полярных координат к декартовым в уравнении $\rho = \cos\varphi$.

Из соотношений $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ выразим $\cos\varphi = \frac{x}{\rho}$, и подставим в уравнение вместе с $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{x^2 + y^2}$ и преобразуем полученное равенство:

$$x^2 + y^2 = x \;\Rightarrow\; x^2 - x + \tfrac{1}{4} + y^2 = \tfrac{1}{4} \;\Rightarrow\; \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

Последнее уравнение и есть уравнение окружности радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

ТРЕХЛЕПЕСТКОВАЯ РОЗА

Построим кривую, определяемую уравнением $\rho = 2\cos 3\varphi$.

Область определения найдем из неравенства $\rho \geq 0$:

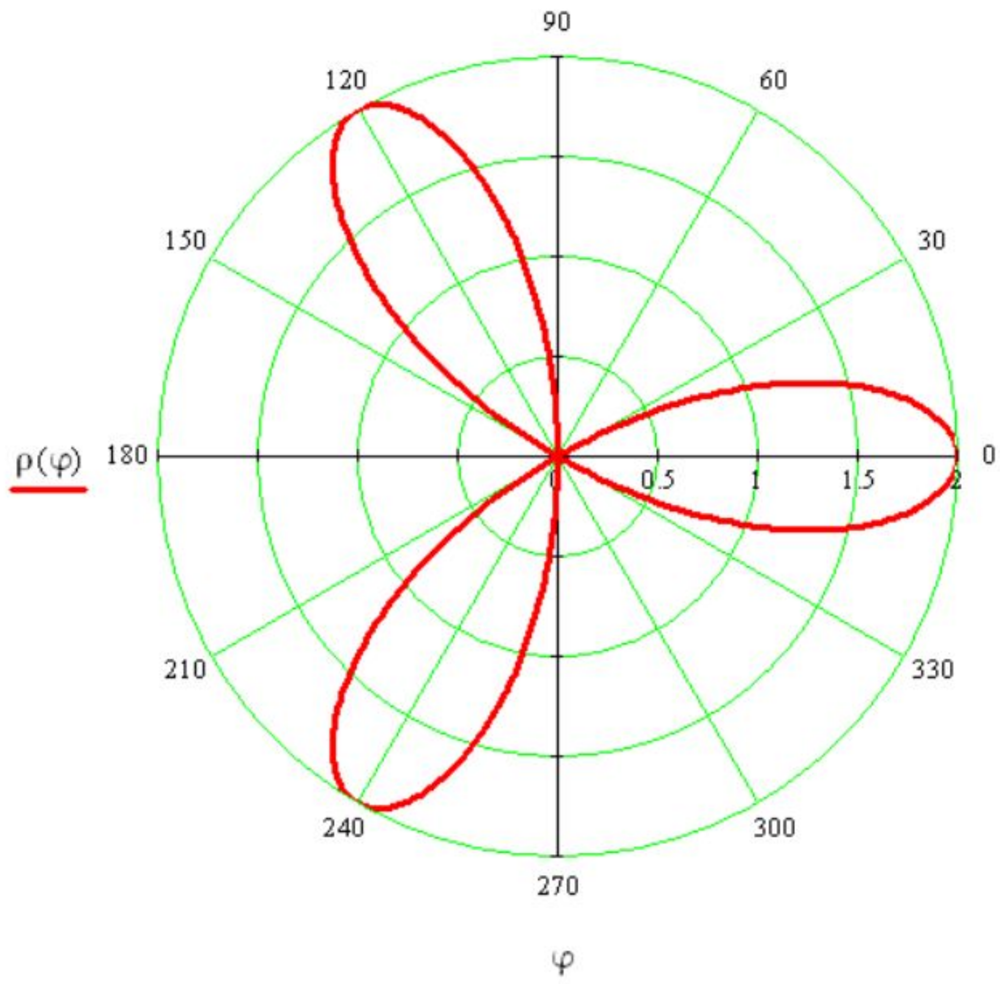
$$\cos 3\varphi \geq 0 \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\; k \in \mathbf{Z} \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}.$$

Построим кривую для φ из промежутка $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$. Составим таблицу значений.

φ	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$
ρ	0	2	0

Затем выполним поворот полученной линии на $\frac{2\pi k}{3}$, $k = 1, 2$.

Построим кривую:



Полученная кривая называется трехлепестковой розой.

КАРДИОИДА

Построим кривую, определяемую уравнением $\rho = 1 - \cos\varphi$.

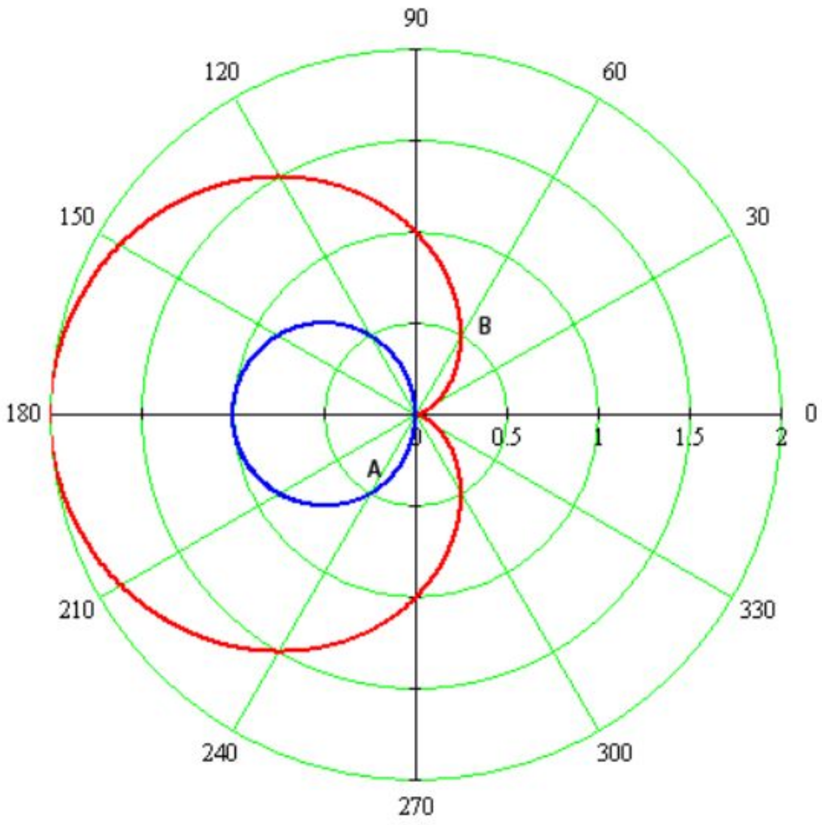
Область определения найдем из неравенства $\rho \geq 0$:

$$1 - \cos\varphi \geq 0 \ \forall\varphi.$$

Составим таблицу значений.

φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{4\pi}{3}$	2π
ρ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

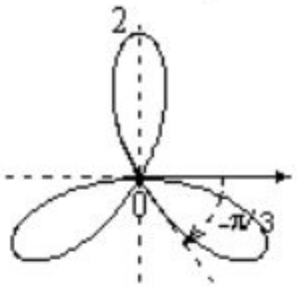
Построим кривую (красный контур)



Кардиоида получается из окружности $\rho = -\cos\varphi$ (синий контур), если на каждом луче выходящем из полюса, увеличить радиус на 1 в направлении луча. При этом в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ т.е. в правой полуплоскости, где функция $\rho = -\cos\varphi$ принимает отрицательные значения, увеличивать радиус нужно от точки окружности, лежащей на продолжении луча в противоположном направлении. Так на луче, выходящем под углом 60° строим точку B, добавляя 1 к точке A в направлении луча 60°. Точка A соответствует радиусу $\rho\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, отрицательное значение которого отложили в направлении противоположном лучу 60°.

ЗАДАЧИ

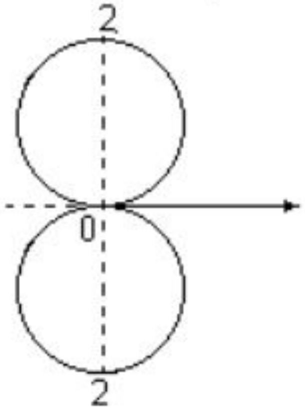
Укажите уравнение изображенной кривой:



- $\rho = -2\sin^3\varphi$
- $\rho = -2\sin 3\varphi$
- $\rho = 2\cos 3\varphi$
- $\rho = 2\sin 3\varphi$

Ответ 2

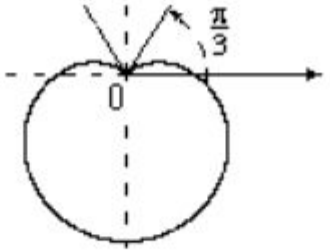
Укажите уравнение изображенной кривой:



- $\rho = 2\sin\frac{\varphi}{2}$
- $\rho = 2\sin 2\varphi$
- $\rho = 2|\sin\varphi|$
- $\rho = 1 - \cos\varphi$

Ответ 3

Укажите уравнение изображенной кривой:



○ $\rho = \sqrt{3} + 2\sin\varphi$

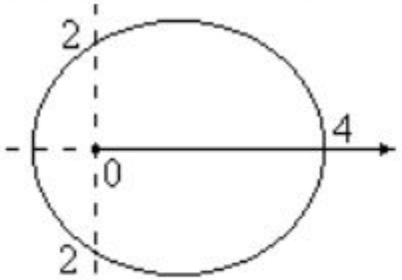
○ $\rho = \sqrt{3} + 2\cos\varphi$

○ $\rho = \sqrt{3} - 2\sin\varphi$

○ $\rho = \sqrt{3} - 2\cos\varphi$

Ответ 3

Укажите уравнение изображенной кривой:



○ $\rho = 4 + 2\sin\varphi$

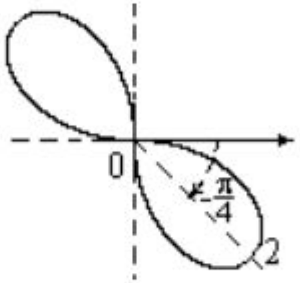
○ $\rho = \frac{4}{2-\cos\varphi}$

○ $\rho = 2 + \cos\varphi$

○ $\rho = \frac{2}{1-\cos\varphi}$

Ответ 4

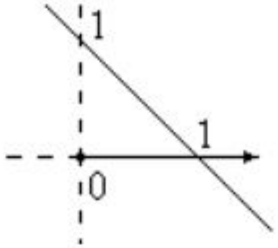
Укажите уравнение изображенной кривой:



- $\rho = -2\sin 2\varphi$
- $\rho = -2\cos 2\varphi$
- $\rho = 2\cos 2\varphi$
- $\rho = 2\sin 2\varphi$

Ответ 1

Укажите уравнение изображенной кривой:



- $\rho = \sin\varphi - \cos\varphi$
- $\rho = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}$
- $\rho = 1 - \varphi$
- $\rho = \sin\varphi + \cos\varphi$

Ответ 2

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Если кривая задана с помощью уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $t \in [a;b]$ - параметр, то говорят, что кривая задана параметрически.

Построение эскиза такой кривой удобно производить в следующей последовательности:

1. Найти области определения функций $x(t)$ и $y(t)$ и построить эскизы их графиков. Определить нули и точки экстремумов.

2. Составить таблицу значений x и y, взяв в качестве контрольных значений параметра t те, в которых $x(t) = 0,\ y(t) = 0$ - нули, и $x'(t) = 0,\ y'(t) = 0$ - экстремумы.
Указать характер монотонности функций x и y на промежутках между выбранными точками.

3. Построить кривую в декартовых координатах (x, y), последовательно соединяя точки в соответствии с возрастанием параметра t.

Иногда построение упрощается с помощью исключения параметра t из уравнений и получения прямой зависимости между x и y.

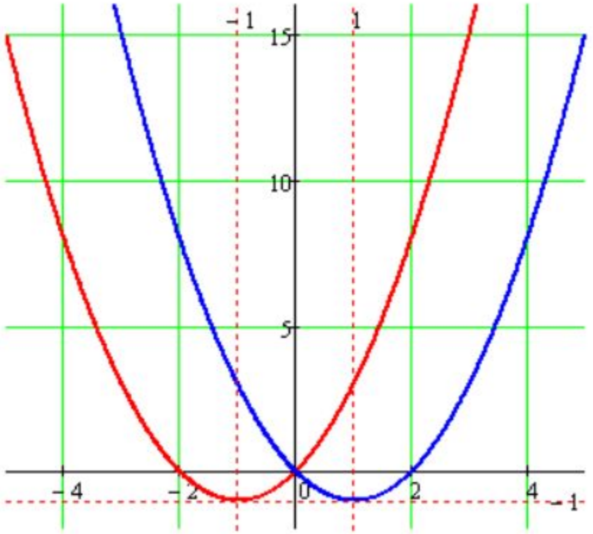
ПРИМЕР

Построим кривую, заданную уравнениями $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$.

1. Построим графики кривых $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Графиком функций $x = t^2 - 2t$ является парабола, проходящая через точки $(0;0)$ и $(2;0)$, с вершиной точке $(1;-1)$ (синий контур).

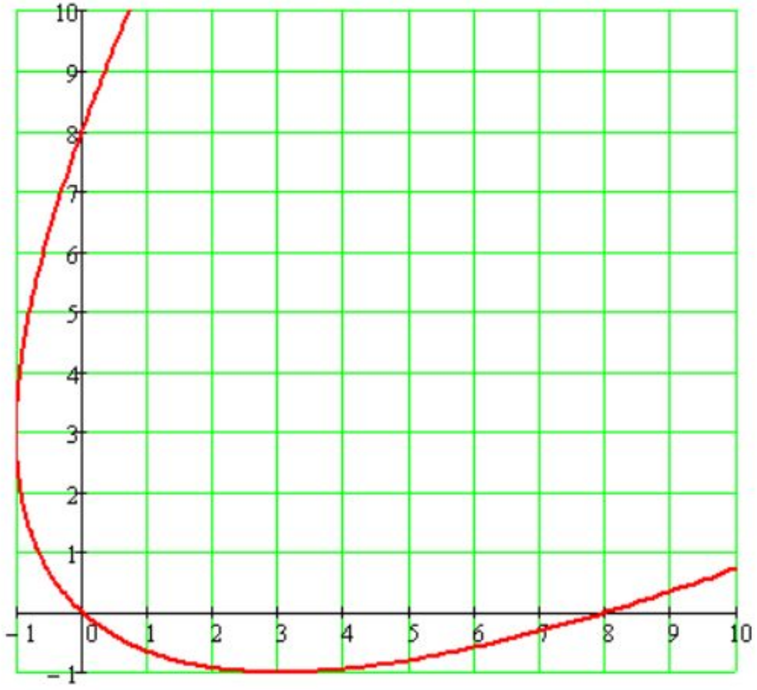
Графиком функций $y = t^2 + 2t$ является парабола, проходящая через точки $(0;0)$ и $(-2;0)$, с вершиной точке $(-1;-1)$ (красный контур).



2. Составим таблицу значений, взяв в качестве характерных значений параметра t, значения, соответствующие нулям и точкам экстремумов графиков $x(t)$ и $y(t)$, укажем характер монотонности функций:

t	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x	$+\infty$	$\searrow$	8	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$
направление кривой		$\swarrow$		$\swarrow$		$\nwarrow$		$\nwarrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

3. Отметим точки на графике и соединим их с учетом направления хода кривой



КРИВЫЕ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ С ПОМОЩЬЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим построение кривых, заданных уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos^\alpha t \\ y = \sin^\alpha t \end{cases}.$$

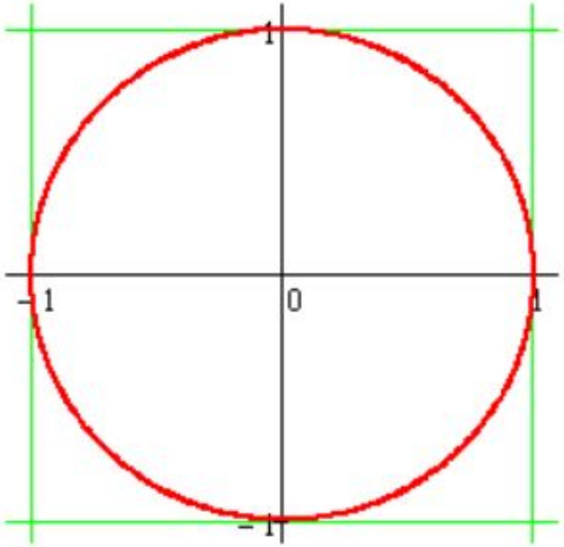
Функции $x(t)$ и $y(t)$ определены для любых значений параметра t и являются периодическими с периодом 2π, поэтому достаточно построить кривую на интервале $[0; 2\pi]$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
x	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
направление кривой		$\nwarrow$		$\swarrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Пусть $\alpha = 1$:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}.$$

Последовательно соединяя точки (x, y), найденные в таблице, построим кривую:



Заметим, что $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ – уравнение единичной окружности с центром в нуле в декартовых координатах.

Для $\alpha = 2$ уравнения для координат точек кривой следующие:

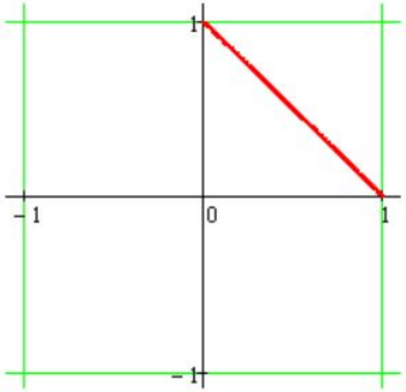
$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}.$$

Заметим, что $x + y = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Уравнение $x + y = 1$ определяет прямую, проходящую через точки $(1;0)$ и $(0;1)$, а так как для любых значений параметра t

$$x = \cos^2 t \geq 0 \text{ и } y = \sin^2 t \geq 0,$$

то искомая кривая будет являться отрезком прямой $x + y = 1$, заключенной между точками $(1;0)$ и $(0;1)$.



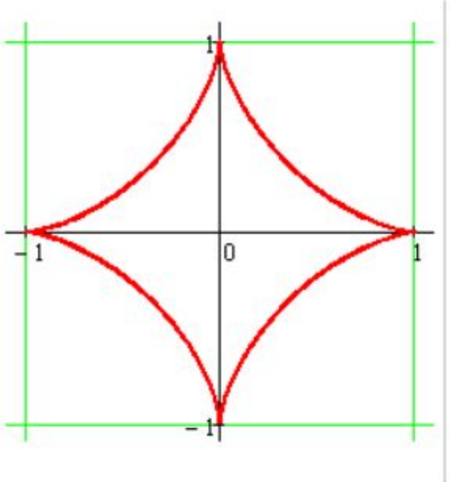
Для $\alpha = 3$:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}.$$

Переменные x и y принимают значения разных знаков, следовательно кривая будет лежать во всех координатных четвертях. Так как для $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos^3 t \leq \cos^2 t \text{ и } \sin^3 t \leq \sin^2 t,$$

то искомая кривая в первой координатной четверти будет лежать ближе к началу координат, чем прямая $x + y = 1$. В остальных четвертях кривая является симметричным отображением дуги в первой четверти относительно координатных осей и начала координат.



Для $\alpha = \frac{1}{3}$ уравнения для координат точек кривой следующие

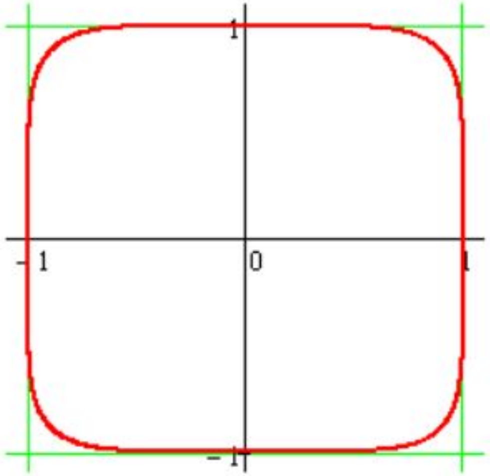
$$\begin{cases} x = \cos^{\frac{1}{3}} t \\ y = \sin^{\frac{1}{3}} t \end{cases}.$$

Переменные x и y принимают значения разных знаков, следовательно кривая будет лежать во всех координатных четвертях. Так как для $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos^{\frac{1}{3}} t \geq \cos^2 t \text{ и } \sin^{\frac{1}{3}} t \geq \sin^2 t,$$

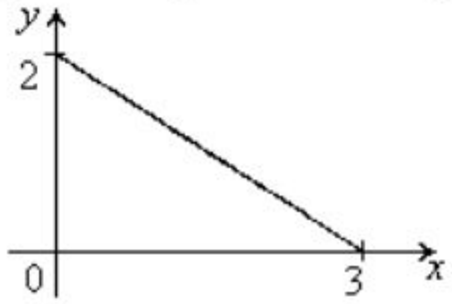
то искомая кривая в первой координатной четверти будет лежать дальше от начала координат, чем прямая $x + y = 1$.

В остальных четвертях кривая является симметричным отображением дуги в первой четверти относительно координатных осей и начала координат.



ЗАДАЧИ

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



○ $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$

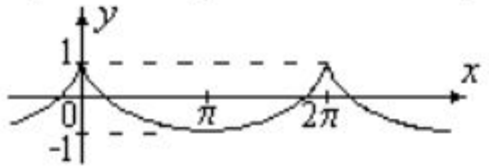
○ $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

○ $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\cos t \end{cases}$

○ $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$

ЗАДАЧИ

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



- $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

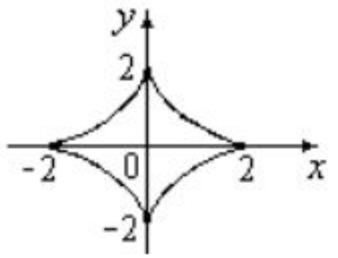
- $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$

- $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$

- $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = \cos t \end{cases}$

ЗАДАЧИ

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



- $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$

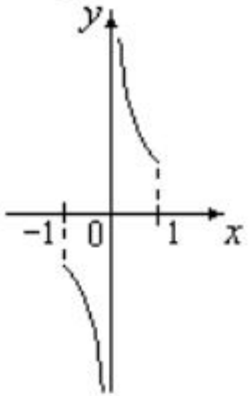
- $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$

- $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

- $\begin{cases} x = 2\sin^3 t, \\ y = 2\cos^3 t \end{cases}$

ЗАДАЧИ

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



○ $\begin{cases} x = \frac{1}{\sin t}, \\ y = \sin t \end{cases}$

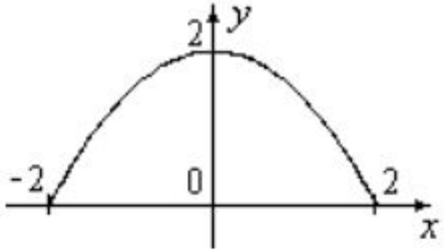
○ $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$

○ $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \frac{1}{\sin t} \end{cases}$

○ $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -\ln|\sin t| \end{cases}$

ЗАДАЧИ

Укажите параметрические уравнения изображенной кривой.



- $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2|\sin t| \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$
- $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$