Простейшие функции

Операция суперпозиции

Алгоритмический процесс можно рассматривать как процесс вычисления значений некоторой функции f

Такие функции называются **вычислимыми**

Интуитивное понятие **вычислимой функции** заменим на точное понятие **частично рекурсивной функции**

Простейшие функции

Рассмотрим некоторый набор простейших функций, вычислимость которых очевидна

Простейшими функциями называются следующие арифметические функции:

1) Нулевая функция

$$O^n(x_1, x_2, \ldots , x_n) = 0$$

$$O(x) = 0$$

2) Функция следования

$$S(x) = x + 1, x \in N$$

3) Функция проецирования (выбора)

$$I_m{}^n(x_1, x_2, \ldots , x_n) = x_m$$

Замечание

Вычислимость функции проецирования обеспечивается нашей способностью найти в строке

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

место с номером $\boldsymbol{m}$ и указать число на этом месте

Операция подстановки (суперпозиции)

Пусть заданы арифметические функции:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\phi(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Говорят, что функция $\boldsymbol{\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ получена из функций ϕ и $\boldsymbol{f_1, f_2, \dots, f_m}$ **операцией подстановки (суперпозиции)**, если:

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Обозначение:

$$\psi = Sub(\varphi; f_1, \dots, f_m)$$

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Пример 1

$$\varphi(x, y) = x - y$$
$$f_1(b) = b^2$$
$$f_2(a, c) = 4ac$$

$$\psi(a, b, c) =$$

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1,\dots,x_n)=\varphi(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$$

Пример 1

$$\varphi(x,y)=x-y$$
$$f_1(b)=b^2$$
$$f_2(a,c)=4ac$$

$$\begin{aligned}\psi(a,b,c)=Sub(\varphi;f_1,f_2)&=\\ &=\varphi\big(f_1(b),f_2(a,c)\big)=\\ &=\varphi(b^2,4ac)=\\ &=b^2-4ac\end{aligned}$$

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Правильное применение суперпозиции: необходимо соблюдать требования к набору аргументов каждой функции

$$\left.\begin{array}{l} \psi(x_1, \dots, x_n) \\ f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{array}\right\}$$

один и тот же набор аргументов $(x_1, \dots, x_n)$

$\varphi(y_1, \dots, y_m)$ другой набор **из *m*** аргументов

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$
$$\varphi(y_1, \dots, y_m)$$

Пример 1

$$\varphi(x, y) = x - y$$
$$f_1(b) = b^2$$
$$f_2(a, c) = 4ac$$

Преобразуем функции f_1 и f_2 так, чтобы они удовлетворяли требованиям к аргументам для применения суперпозиции

$$F_1(a, b, c) = Sub\left(f_1; I_2^3(a, b, c)\right) = f_1(I_2^3(a, b, c))$$

$$F_2(a, b, c) = Sub\left(f_2; I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c)\right) = $$
$$= f_2(I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c))$$

$$\boxed{\psi(a, b, c) = \varphi\left(F_1(a, b, c), F_2(a, b, c)\right)}$$

Корректно

Замечание

Такое применение функции проецирования предложил К.Гёдель (1934)

Все функции f_i, $i = 1,\ldots m$ зависят от n переменных, а функция **ф** имеет m переменных (по количеству функций f_i)

Результат подстановки, функция **ψ** зависит от n переменных

Добиться выполнение условия на количество аргументов у функций можно введением фиктивных переменных и применения функции проецирования

$$I_m^n$$

Пример 2

Записать корректно подстановку

$$\psi(x,y,z)=\varphi(f_1(x),f_2(x,y,z),y,z)$$

Решение

$$F_1(x,y,z)=f_1(I_1^3(x,y,z))$$

$$F_2(x,y,z)=f_2(x,y,z)$$

$$F_3(x,y,z)=I_2^3(x,y,z)$$

$$F_4(x,y,z)=I_3^3(x,y,z)$$