Простейшие функции

Операция суперпозиции

Алгоритмический процесс можно рассматривать как процесс вычисления значений некоторой функции $\boldsymbol{f}$

Такие функции называются **вычислимыми**

Интуитивное понятие **вычислимой функции** заменим на точное понятие **частично рекурсивной функции**

Простейшие функции

Рассмотрим некоторый набор простейших функций, вычислимость которых очевидна

Простейшими функциями называются следующие арифметические функции:

1) Нулевая функция

$$\mathrm{O}^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\mathrm{O}(x) = 0$$

2) Функция следования

$$\mathrm{S}(x) = x + 1, x \in N$$

3) Функция проецирования (выбора)

$$I_m{}^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$$

Замечание

Вычислимость функции проецирования обеспечивается нашей способностью найти в строке

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

место с номером $\boldsymbol{m}$ и указать число на этом месте

Операция подстановки (суперпозиции)

Пусть заданы арифметические функции:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$\phi(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

Говорят, что функция $\boldsymbol{\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ получена из функций ϕ и $\boldsymbol{f_1, f_2, \dots, f_m}$ **операцией подстановки (суперпозиции)**, если:

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Обозначение:

$$\psi = Sub(\varphi; f_1, \dots, f_m)$$

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Пример 1

$$\varphi(x, y) = x - y$$
$$f_1(b) = b^2$$
$$f_2(a, c) = 4ac$$

$$\psi(a, b, c) =$$

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Пример 1

$$\varphi(x, y) = x - y$$
$$f_1(b) = b^2$$
$$f_2(a, c) = 4ac$$

$$\begin{aligned}\psi(a, b, c) = Sub(\varphi; f_1, f_2) &= \\ &= \varphi\big(f_1(b), f_2(a, c)\big) = \\ &= \varphi(b^2, 4ac) = \\ &= b^2 - 4ac\end{aligned}$$

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Правильное применение суперпозиции: необходимо соблюдать требования к набору аргументов каждой функции

$$\left.\begin{array}{l} \psi(x_1, \ldots, x_n) \\ f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{array}\right\}$$

один и тот же набор аргументов $(x_1, \ldots, x_n)$

$\varphi(y_1, \ldots, y_m)$

другой набор **из m** аргументов

Операция подстановки (суперпозиции)

$$\psi(x_1,\dots,x_n) = \varphi(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$$
$$\varphi(y_1,\dots,y_m)$$

Пример 1

$$\varphi(x,y) = x - y$$
$$f_1(b) = b^2$$
$$f_2(a,c) = 4ac$$

Преобразуем функции f_1 и f_2 так, чтобы они удовлетворяли требованиям к аргументам для применения суперпозиции

$$F_1(a,b,c) = Sub\left(f_1; I_2^3(a,b,c)\right) = f_1(I_2^3(a,b,c))$$

$$F_2(a,b,c) = Sub\left(f_2; I_1^3(a,b,c), I_3^3(a,b,c)\right) = \\ = f_2(I_1^3(a,b,c), I_3^3(a,b,c))$$

$$\boxed{\psi(a,b,c) = \varphi\left(F_1(a,b,c), F_2(a,b,c)\right)}$$

Корректно

Замечание

Такое применение функции проецирования предложил К.Гёдель (1934)

Все функции f_i, $i = 1,\ldots m$ зависят от n переменных, а функция **ф** имеет m переменных (по количеству функций f_i)

Результат подстановки, функция **ψ** зависит от n переменных

Добиться выполнение условия на количество аргументов у функций можно введением фиктивных переменных и применения функции проецирования

$$I_m^{\,n}$$

Пример 2

Записать корректно подстановку

$$\psi(x,y,z) = \varphi(f_1(x), f_2(x,y,z), y, z)$$

Решение

$$F_1(x,y,z) = f_1(I_1^3(x,y,z))$$

$$F_2(x,y,z) = f_2(x,y,z)$$

$$F_3(x,y,z) = I_2^3(x,y,z)$$

$$F_4(x,y,z) = I_3^3(x,y,z)$$