ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава III
Линейные пространства и линейные операторы

Лекция № 3

ИЯФиТ

доцент ***Волков Н.П.***

§ 4. Аксиоматика и примеры линейных пространств

4.1. Основные понятия и свойства.

Напомним определение линейного пространства.

Определение 4.1. Множество V, состоящее из некоторых элементов $\{x_k\}$, называется *линейным пространством над множеством* K ($\mathrm{K}=\mathrm{R}$ или $\mathrm{K}=\mathrm{C}$), если для элементов этого множества определены операции сложения этих элементов и умножения их на число из K такие, что

а) $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{V}$ следует $x_1 + x_2 \in \mathrm{V}$,

б) $\forall x_1 \in \mathrm{V}$ и $\forall \lambda \in \mathrm{K}$ следует $\lambda \cdot x_1 \in \mathrm{V}$;

для которых выполняются следующие *аксиомы линейного пространства*:

1* $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{V}$ выполняется $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ (аксиома коммутативности),

2* $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{V}$ выполняется $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ (аксиома ассоциативности по сложению),

3* $\exists$ элемент $\theta \in \mathrm{V}$ такой, что $\forall x_1 \in \mathrm{V}$ выполняется $x_1 + \theta = x_1$ (аксиома существования нулевого элемента θ),

4* $\forall x_1 \in \mathrm{V}$ $\exists$ элемент $x_1' \in \mathrm{V}$ такой, что выполняется $x_1 + x_1' = \theta$ (аксиома существования противоположного элемента x_1', 5* $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{V}$ и $\forall \lambda \in \mathrm{K}$ выполняется $\lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$ (аксиома дистрибутивности),

6* $\forall x_1 \in \mathrm{V}$ и $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{K}$ выполняется $(\lambda_1 + \lambda_2)x_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1$ (аксиома дистрибутивности),

7* $\forall x_1 \in \mathrm{V}$ и $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{K}$ выполняется $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)x_1 = \lambda_1(\lambda_2 x_1)$ (аксиома ассоциативности по умножению),

8* $\forall x_1 \in \mathrm{V}$ выполняется $1 \cdot x_1 = x_1$ (аксиома унитарности) .

Замечание 4.1. Иногда это пространство называют *абстрактным линейным векторным пространством,* а его элементы – *векторами.*

Определение 4.2. Линейное пространство $\mathbf{V}$ называется *вещественным*, если $\mathrm{K} = \mathrm{R}$, и *комплексным*, если $\mathrm{K} = \mathrm{C}$.

Теорема 4.1. *В каждом линейном пространстве* $\mathbf{V}$ *справедливы следующие свойства:*

1^o нулевой элемент θ единственен;

2^o для любого $x \in \mathrm{V}$ его противоположный элемент x' единственен;

3^o для любого $x \in \mathrm{V}$ произведение $\theta \cdot x = \theta$;

4^o для любого $x \in \mathrm{V}$ произведение $(-1) \cdot x = x'$;

5^o для любого числа $\forall \lambda \in \mathrm{K}$ произведение $\lambda \cdot \theta = \theta$.

1^o: Доказательство проведем от противного. Предположим, что в некотором линейном пространстве $\tilde{\mathbf{V}}$ существует два нулевых элемента θ и $\tilde{\theta}$ таких, что $\forall x \in \tilde{\mathbf{V}}$ $x+\theta=x$ и $x+\tilde{\theta}=x$. Тогда $\tilde{\theta}=\tilde{\theta}+\theta=\theta+\tilde{\theta}=\theta$. Начало и конец цепочки равенств показывают, что, если есть два нулевых элемента, то они равны между собой.

2^o: Доказательство проведем от противного. Предположим, что в линейном пространстве $\tilde{\mathbf{V}}$ существует элемент x_0, у которого два противоположных элемента x_0' и x_0'' таких, что $x_0+x_0'=\theta$ и $x_0+x_0''=\theta$.

Тогда $x_0''=x_0''+\theta=x_0''+(x_0+x_0')=(x_0''+x_0)+x_0'=(x_0+x_0'')+x_0'=\theta+x_0'=x_0'$.

Итак, начало и конец цепочки равенств доказывают, что в линейном пространстве у каждого элемента не может быть более одного противоположного элемента.

3^o: $\forall x \in \mathrm{V}$ $\quad 0\cdot x=0\cdot x+\theta=0\cdot x+(x+x')=(0\cdot x+1\cdot x)+x'=(0+1)\cdot x+x'=x+x'=\theta$.

Начало и конец цепочки равенств доказывают свойство 3^o.

4^o: $\forall x \in \mathrm{V}$ $\quad (-1)\cdot x=(-1)\cdot x+\theta=(-1)\cdot x+(x+x')=(-1+1)\cdot x+x'=0\cdot x+x'=$

$=\theta+x'=x'+\theta=x'$. Итак, начало и конец цепочки равенств доказывают свойство 4^o.

5^o: $\forall \lambda \in \mathrm{K}$ $\quad \lambda\cdot\theta=\lambda\cdot\theta+\theta=\lambda\cdot\theta+[(\lambda\cdot\theta)+(\lambda\cdot\theta)']=\lambda\cdot(\theta+\theta)+(\lambda\cdot\theta)'=$

$=(\lambda\cdot\theta)+(\lambda\cdot\theta)'=\theta$. Следовательно, начало и конец цепочки равенств доказывают свойство 5^o. #

4.2. Примеры линейных пространств.

I) Множество всех свободных векторов образует линейное пространство.

а) Множество $\{\vec{x}:\ \vec{x} \parallel l\}$ есть линейное пространство, где l – некоторая прямая.

б) Множество $\{\vec{x}:\ \vec{x} \parallel \pi\}$ есть линейное пространство, где π – некоторая плоскость.

II) Множество $\mathrm{K}^n = \{x : x = (x_1, \cdots, x_n)$ - упорядоченный набор чисел из $\mathrm{K}\}$, для элементов которого заданы операции:

а) $\forall\, x, y \in \mathrm{K}^n \quad x + y = (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$ и

б) $\forall\, x \in \mathrm{K}^n$ и $\forall\, \lambda \in \mathrm{K} \quad \lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \cdots, \lambda \cdot x_n)$;

является линейным пространством.

III) Множество матриц $\mathrm{M}_{m \times n}$ размерности $m \times n$ с элементами из K является линейным пространством. Этот факт был доказан ранее (см. п. 1.2).

IV) Обозначим множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений (1_0) через $\mathbf{S_o} = \{\underset{\downarrow}{\alpha}^k\}$. Это множество является линейным пространством.

Действительно, поскольку $\forall\ \underset{\downarrow}{\alpha}^1, \underset{\downarrow}{\alpha}^2 \in \mathbf{S_o} \quad \underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \underset{\downarrow}{\alpha}^2 \in \mathbf{S_o}$ и

$\forall\, \underset{\downarrow}{\alpha}^1 \in \mathbf{S_o},\ \forall\, \lambda \in \mathrm{K} \quad \lambda \cdot \underset{\downarrow}{\alpha}^1 \in \mathbf{S_o}$,

а также справедливы аксиомы линейного пространства, т.е.

1^*: $\forall\ \underset{\downarrow}{\alpha}^1, \underset{\downarrow}{\alpha}^2 \in \mathrm{S_o}\quad \underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \underset{\downarrow}{\alpha}^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 + \alpha_1^2 \\ \cdots \\ \alpha_n^1 + \alpha_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_1^1 \\ \cdots \\ \alpha_n^2 + \alpha_n^1 \end{pmatrix} = \underset{\downarrow}{\alpha}^2 + \underset{\downarrow}{\alpha}^1$;

2^*: $\forall\ \underset{\downarrow}{\alpha}^1, \underset{\downarrow}{\alpha}^2, \underset{\downarrow}{\alpha}^3 \in \mathrm{S_o}\quad \left(\underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \underset{\downarrow}{\alpha}^2\right) + \underset{\downarrow}{\alpha}^3 = \underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \left(\underset{\downarrow}{\alpha}^2 + \underset{\downarrow}{\alpha}^3\right)$;

3^*: $\exists$ нулевой элемент $\theta = \underset{\downarrow}{0} \in \mathrm{S_o}$ такой, что $\forall\, \underset{\downarrow}{\alpha} \in \mathrm{S_o}\quad \underset{\downarrow}{\alpha} + \underset{\downarrow}{0} = \underset{\downarrow}{\alpha}$;

4^*: $\forall\, \underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathrm{S_o}$ существует противоположный элемент $\underset{\downarrow}{\alpha}' = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ \cdots \\ -\alpha_n \end{pmatrix} \in \mathrm{S_o}$ такой,

что $\underset{\downarrow}{\alpha} + \underset{\downarrow}{\alpha}' = \underset{\downarrow}{0}$;

5^*: $\forall\ \underset{\downarrow}{\alpha}^1, \underset{\downarrow}{\alpha}^2 \in \mathrm{S_o}$ и $\forall\, \lambda \in \mathrm{K}\quad \lambda \cdot (\underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \underset{\downarrow}{\alpha}^2) = \lambda \cdot \underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \lambda \cdot \underset{\downarrow}{\alpha}^2$;

6^*: $\forall\, \underset{\downarrow}{\alpha} \in \mathrm{S_o}$ и $\forall\, \lambda, \mu \in \mathrm{K}\quad (\lambda + \mu) \cdot \underset{\downarrow}{\alpha} = \lambda \cdot \underset{\downarrow}{\alpha} + \mu \cdot \underset{\downarrow}{\alpha}$;

7^*: $\forall\, \underset{\downarrow}{\alpha} \in \mathrm{S_o}$ и $\forall\, \lambda, \mu \in \mathrm{K}\quad (\lambda\mu) \cdot \underset{\downarrow}{\alpha} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underset{\downarrow}{\alpha})$;

8^*: $\forall\, \underset{\downarrow}{\alpha} \in \mathrm{S_o}\quad 1 \cdot \underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{\alpha}$.

V) Еще одним линейным пространством является множество многочленов степени не выше m, обозначим его через $\mathbf{P}_m = \{P_m(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0\}$.

Линейные операции в этом пространстве таковы: а) для любых многочленов $P_m(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ и $Q_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0$

сумма: $P_m(t) + Q_m(t) = (a_m + b_m) t^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) t^{m-1} + \cdots + (a_1 + b_1) t + (a_0 + b_0)$;

б) $\forall \lambda \in \mathrm{K}$ произведение: $\lambda \cdot P_m(t) = (\lambda a_m) t^m + (\lambda a_{m-1}) t^{m-1} + \cdots + (\lambda a_1) t + (\lambda a_0)$.

Легко проверить, что все аксиомы линейного пространства в $\mathbf{P}_m$ выполняются.

VI) Линейным пространством будет и множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, которое имеет обозначение

$C([a,b]) = \{f(x):\ f$ — непрерывная на $[a,b]$ функция, отображающая $[a,b]$ в $\mathrm{R}\}$.

Это пространство линейно относительно операций:

а) сложения: для любых $f(x), g(x) \in C([a,b])$ $\quad f(x) + g(x) \in C([a,b])$

и б) умножение на число: $\forall \lambda \in \mathrm{R}$ $\lambda \cdot f(x) \in C([a,b])$.

Очевидно, что все аксиомы линейного пространства в $C([a,b])$ выполняются.

VII) Пусть $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ – два линейных пространства над множеством K.

Рассмотрим множество $\mathbf{V}\times\mathbf{W}=\{(x,y):\ x\in\mathbf{V},\ y\in\mathbf{W}\}$ с операциями

а) $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbf{V}\times\mathbf{W}\quad (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ и

б) $\forall (x,y)\in\mathbf{V}\times\mathbf{W}$ и $\forall\lambda\in\mathrm{K}\quad \lambda\cdot(x,y)=(\lambda\cdot x,\ \lambda\cdot y)$.

С введенными таким образом операциями это множество становится линейным пространством над множеством K и называется *декартовым произведением линейных пространств* $\mathbf{V}$ *и* $\mathbf{W}$. В качестве примера можно привести геометрическое линейное пространство $\mathrm{R}^3=\mathrm{R}^2\times\mathrm{R}$, где R^2 – плоскость, а R – прямая.

Если $\mathbf{W}=\mathbf{V}$, то $\mathbf{V}\times\mathbf{V}=\mathbf{V}^2$ называют *декартовым квадратом*, в частности,

$\mathrm{R}\times\mathrm{R}=\mathrm{R}^2=\{(x,y):\ x,y\in\mathrm{R}\}$.

§ 5. Базис и размерность линейного пространства

5.1. Линейная зависимость и линейная независимость системы элементов линейного пространства.

Определение 5.1. Непустое упорядоченное множество элементов линейного пространства $\mathbf{V}$, называется *системой* (*семейством*) *элементов из* $\mathbf{V}$. Любое непустое упорядоченное подмножество системы называется *подсистемой этой системы*.

Определение 5.2. Элемент $x \in \mathbf{V}$ называется *линейной комбинацией элементов* $x_1, \cdots, x_m \in \mathbf{V}$, если существуют числа $\mu_1, \cdots, \mu_m \in \mathrm{K}$ такие, что $x = \mu_1 \cdot x_1 + \cdots + \mu_m \cdot x_m$.

Определение 5.3. Система $\{x_j\}_{j=1}^{m}$ называется *линейно зависимой в* $\mathbf{V}$, если существуют числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathrm{K}$ такие, что $\sum\limits_{j=1}^{m} |\lambda_j| \neq 0$ (т.е. хотя бы одно из этих чисел ненулевое) при этом $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot x_j = \theta \qquad (*)$.

Если же равенство $(*)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_j = 0 \ \forall \ j = \overline{1, m}$, то система $\{x_j\}_{j=1}^{m}$ называется *линейно независимой в* $\mathbf{V}$.

Теорема 5.1. (Критерий линейной зависимости)

Система $\{x_j\}_{j=1}^m \subset V$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из элементов системы есть линейная комбинация остальных элементов.

\# Необходимость. Пусть $\{x_j\}_{j=1}^m \subset V$ линейно зависимая система, т.е. существуют числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in K$ такие, что $\sum_{j=1}^m |\lambda_j| \neq 0$ (например, $\lambda_1 \neq 0$), при этом $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_m \cdot x_m = \theta$ или $x_1 = \frac{1}{-\lambda_1}(-\lambda_1 \cdot x_1 + \theta) =$

$$= \frac{1}{-\lambda_1}(-\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_m \cdot x_m) = \mu_2 \cdot x_2 + \cdots + \mu_m \cdot x_m \,,$$

где $\mu_j = -\frac{\lambda_j}{\lambda_1}$, $\forall\ j = \overline{2, m}$. Итак, элемент x_1 есть линейная комбинация остальных.

Не ограничивая общности, вместо x_1 мог быть и другой элемент.

Достаточность. Не ограничивая общности, предположим, что существуют числа $\mu_2, \cdots, \mu_m \in K$ такие, что элемент x_1 представим в виде $x_1 = \mu_2 \cdot x_2 + \cdots + \mu_m \cdot x_m$, тогда справедливо равенство $-1 \cdot x_1 + \mu_2 \cdot x_2 + \cdots + \mu_m \cdot x_m = -x_1 + x_1 = \theta$. Начало и конец этой цепочки равенств доказывают, что система $\{x_j\}_{j=1}^m$ линейно зависима, поскольку первый коэффициент отличен от нуля. #

Замечание 5.1. Нумерация элементов системы не влияет на свойство системы быть линейно зависимой или линейно независимой.

Теорема 5.2. *Если система содержит линейно зависимую подсистему, то она сама является линейно зависимой системой.*

\# Пусть система $\{x_j\}_{j=1}^m$ содержит линейно зависнмую подсистему, например, $\{x_k\}_{k=1}^p$, $p \le m$. В силу определения 5.2 существуют числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathrm{K}$ такие, что $\sum_{k=1}^p |\lambda_k| \ne 0$, при этом $\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot x_k = \theta$. Тогда составим линейную комбинацию $\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_p \cdot x_p + 0 \cdot x_{p+1} \cdots + 0 \cdot x_m = \theta + 0 \cdot x_{p+1} \cdots + 0 \cdot x_m = \theta$, которая показывает, что система $\{x_j\}_{j=1}^m$ линейно зависима. #

Следствие 5.1. *Система, содержащая нулевой элемент* θ, *является линейно зависимой.*

\# Поскольку $\lambda \cdot \theta = \theta \;\; \forall \; \lambda \ne 0$, то система $\{x_j\}_{j=1}^m$, которая содержит множество $\{\theta\}$, являющееся линейно зависимой подсистемой этой системы, является линейно зависнмой. #

Следствие 5.2. *Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.*

\# Доказательство проведем от противного. Пусть в некоторой линейно независимой системе содержится линейно зависимая подсистема. Тогда по теореме 5.2 вся система должна быть линейно зависимой, что противоречит предположению. #

5.2. Базис и размерность линейного пространства.

Пусть $\mathbf{V}$ линейное пространство над множеством K.

Определение 5.4. Система $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ называется *базисом линейного пространства* $\mathbf{V}$,

если 1) $e_j \in \mathrm{V} \quad \forall\ j=\overline{1,n}$;

2) система $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ является линейно независимой;

3) для любого элемента $y \in \mathbf{V}$ существуют числа $y^1,\cdots,y^n \in \mathrm{K}$ такие, что y можно представить в виде $y = y^1 \cdot e_1 + \cdots + y^n \cdot e_n$. (8)

Равенство (8) называется *разложением элемента* y *по базису* $[e]=\{e_j\}_{j=1}^{n}$, а числа $y^1,\cdots,y^n$ – *координатами элемента* y *в базисе* $[e]=\{e_j\}_{j=1}^{n}$.

Будем обозначать $y=(y^1,\cdots,y^n)$.

Лемма 5.1. *Для любого элемента* $y \in \mathbf{V}$ *разложение по базису* $[e]$ *является единственным*.

\# Доказательство проведем от противного.

Пусть существует элемент $y_0 \in \mathbf{V}$, который имеет два разложения по базису $[e]$,

т.е. $y_0 = y_0^1 \cdot e_1 + \cdots + y_0^n \cdot e_n$ и $y_0 = \tilde{y}_0^1 \cdot e_1 + \cdots + \tilde{y}_0^n \cdot e_n$.

Тогда, вычитая одно равенство из другого, получаем

$\theta = y_0 - y_0 = (y_0^1 \cdot e_1 + \cdots + y_0^n \cdot e_n) - (\tilde{y}_0^1 \cdot e_1 + \cdots + \tilde{y}_0^n \cdot e_n) = (y_0^1 - \tilde{y}_0^1)e_1 + \cdots + (y_0^n - \tilde{y}_0^n)e_n$.

Начало и конец цепочки равенств позволяют утверждать, что $y_0^j - \tilde{y}_0^j = 0 \ \ \forall \ j = \overline{1,n}$, поскольку система $\{e_j\}_{j=1}^n$ линейно независимая, или $y_0^j = \tilde{y}_0^j \ \ \forall \ j = \overline{1,n}$.

Итак, предположение о неединственности разложения неверно. #

Теорема 5.3. *Для любых элементов,* $x, y \in \mathbf{V}$ *заданных своими координатами* $x = (x^1, \cdots, x^n)$, $y = (y^1, \cdots, y^n)$ *в базисе* $[e]$ *справедливы следующие равенства:*

а) $x + y = (x^1 + y^1, \cdots, x^n + y^n)$ *в базисе* $[e]$; (9)

б) $\forall \ \lambda \in \mathrm{K} \quad \lambda \cdot x = (\lambda \cdot x^1, \cdots, \lambda \cdot x^n)$ *в базисе* $[e]$. (10)

\# Поскольку x и y заданы своими координатами в базисе $[e]$, это означает в силу определения 5.4, что имеют место следующие разложения:

$x = x^1 \cdot e_1 + \cdots + x^n \cdot e_n$ и $y = y^1 \cdot e_1 + \cdots + y^n \cdot e_n$.

Тогда а) $x + y = (x^1 \cdot e_1 + \cdots + x^n \cdot e_n) + (y^1 \cdot e_1 + \cdots + y^n \cdot e_n) = (x^1 + y^1) \cdot e_1 + \cdots + (x^n + y^n) \cdot e_n$

и б) $\forall \ \lambda \in \mathrm{K} \quad \lambda \cdot x = \lambda \cdot (x^1 \cdot e_1 + \cdots + x^n \cdot e_n) = (\lambda \cdot x^1) \cdot e_1 + \cdots + (\lambda \cdot x^n) \cdot e_n$.

Итак, в силу определения 5.4 справедливы формулы (9) и (10). #

Определение 5.5. Говорят, что *линейное пространство* $\mathbf{V}$ *имеет размерность* n ($\dim \mathbf{V} = n$), если

1) в $\mathbf{V}$ существует линейно независимая система из n элементов $\{x_j\}_{j=1}^{n}$;

2) в $\mathbf{V}$ любая система из $(n+1)$ элемента линейно зависима .

Определение 5.6. 1) Если $\dim \mathbf{V} = n < \infty$, то линейное пространство $\mathbf{V}$ называется *конечномерным* (*n-мерным*).

2) Если для любого $N \in \mathbb{N}$ существует линейно независимая система $\{x_j\}_{j=1}^{N} \subset \mathbf{V}$, то $\mathbf{V}$ называется *бесконечномерным*.

Пример 5.1. Линейное пространство $C([a,b])$ является бесконечномерным.

Теорема 5.4. 1) *Если* $\dim \mathbf{V} = n < \infty$, *то любая линейно независимая система* $\{x_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathbf{V}$ *является базисом.*

2) *Если система* $[e] = \{e_j\}_{j=1}^{n}$ *есть базис линейного пространства* $\mathbf{V}$, *то* $\dim \mathbf{V} = n$.