

# **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

## **Глава III**

### **Линейные пространства и линейные операторы**

#### **Лекция № 3**

**ИЯФиТ**

*доцент Волков Н.П.*

## § 4. Аксиоматика и примеры линейных пространств

### 4.1. Основные понятия и свойства.

Напомним определение линейного пространства.

**Определение 4.1.** Множество  $V$ , состоящее из некоторых элементов  $\{x_k\}$ , называется *линейным пространством над множеством  $K$*  ( $K = \mathbb{R}$  или  $K = \mathbb{C}$ ), если для элементов этого множества определены операции сложения этих элементов и умножения их на число из  $K$  такие, что

а)  $\forall x_1, x_2 \in V$  следует  $x_1 + x_2 \in V$ ,

б)  $\forall x_1 \in V$  и  $\forall \lambda \in K$  следует  $\lambda \cdot x_1 \in V$ ;

для которых выполняются следующие *аксиомы линейного пространства*:

1\*  $\forall x_1, x_2 \in V$  выполняется  $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$  (аксиома коммутативности),

2\*  $\forall x_1, x_2, x_3 \in V$  выполняется  $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$  (аксиома ассоциативности по сложению),

3\*  $\exists$  элемент  $\theta \in V$  такой, что  $\forall x_1 \in V$  выполняется  $x_1 + \theta = x_1$  (аксиома существования нулевого элемента  $\theta$ ),

4\*  $\forall x_1 \in V \exists$  элемент  $x'_1 \in V$  такой, что выполняется  $x_1 + x'_1 = \theta$  (аксиома существования противоположного элемента  $x'_1$ ),

- 5\*  $\forall x_1, x_2 \in V$  и  $\forall \lambda \in K$  выполняется  $\lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$  (аксиома дистрибутивности),
- 6\*  $\forall x_1 \in V$  и  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$  выполняется  $(\lambda_1 + \lambda_2)x_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1$  (аксиома дистрибутивности),
- 7\*  $\forall x_1 \in V$  и  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$  выполняется  $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)x_1 = \lambda_1(\lambda_2 x_1)$  (аксиома ассоциативности по умножению),
- 8\*  $\forall x_1 \in V$  выполняется  $1 \cdot x_1 = x_1$  (аксиома унитарности).

**Замечание 4.1.** Иногда это пространство называют *абстрактным линейным векторным пространством*, а его элементы – *векторами*.

**Определение 4.2.** Линейное пространство  $V$  называется *вещественным*, если  $K = \mathbb{R}$ , и *комплексным*, если  $K = \mathbb{C}$ .

**Теорема 4.1.** В каждом линейном пространстве  $V$  справедливы следующие свойства:

- 1° нулевой элемент  $\theta$  единственен;
- 2° для любого  $x \in V$  его противоположный элемент  $x'$  единственен;
- 3° для любого  $x \in V$  произведение  $\theta \cdot x = \theta$ ;
- 4° для любого  $x \in V$  произведение  $(-1) \cdot x = x'$ ;
- 5° для любого числа  $\forall \lambda \in K$  произведение  $\lambda \cdot \theta = \theta$ .

# 1°: Доказательство проведем от противного. Предположим, что в некотором линейном пространстве  $\tilde{V}$  существует два нулевых элемента  $\theta$  и  $\tilde{\theta}$  таких, что  $\forall x \in \tilde{V} \quad x + \theta = x$  и  $x + \tilde{\theta} = x$ . Тогда  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta} + \theta = \theta + \tilde{\theta} = \theta$ . Начало и конец цепочки равенств показывают, что, если есть два нулевых элемента, то они равны между собой.

2°: Доказательство проведем от противного. Предположим, что в линейном пространстве  $\tilde{V}$  существует элемент  $x_0$ , у которого два противоположных элемента  $x'_0$  и  $x''_0$  таких, что  $x_0 + x'_0 = \theta$  и  $x_0 + x''_0 = \theta$ .

Тогда  $x''_0 = x''_0 + \theta = x''_0 + (x_0 + x'_0) = (x''_0 + x_0) + x'_0 = (x_0 + x''_0) + x'_0 = \theta + x'_0 = x'_0$ .

Итак, начало и конец цепочки равенств доказывают, что в линейном пространстве у каждого элемента не может быть более одного противоположного элемента.

3°:  $\forall x \in V \quad \theta \cdot x = \theta \cdot x + \theta = \theta \cdot x + (x + x') = (\theta \cdot x + 1 \cdot x) + x' = (\theta + 1) \cdot x + x' = x + x' = \theta$ .

Начало и конец цепочки равенств доказывают свойство 3°.

4°:  $\forall x \in V \quad (-1) \cdot x = (-1) \cdot x + \theta = (-1) \cdot x + (x + x') = (-1 + 1) \cdot x + x' = \theta \cdot x + x' = \theta + x' = x' + \theta = x'$ . Итак, начало и конец цепочки равенств доказывают свойство 4°.

5°:  $\forall \lambda \in K \quad \lambda \cdot \theta = \lambda \cdot \theta + \theta = \lambda \cdot \theta + [(\lambda \cdot \theta) + (\lambda \cdot \theta)'] = \lambda \cdot (\theta + \theta) + (\lambda \cdot \theta)' = (\lambda \cdot \theta) + (\lambda \cdot \theta)' = \theta$ . Следовательно, начало и конец цепочки равенств доказывают

свойство 5°.

#

## 4.2. Примеры линейных пространств.

I) Множество всех свободных векторов образует линейное пространство.

а) Множество  $\{\vec{x} : \vec{x} \parallel l\}$  есть линейное пространство, где  $l$  – некоторая прямая.

б) Множество  $\{\vec{x} : \vec{x} \parallel \pi\}$  есть линейное пространство, где  $\pi$  – некоторая плоскость.

II) Множество  $K^n = \{x : x = (x_1, \dots, x_n) - \text{упорядоченный набор чисел из } K\}$ , для

элементов которого заданы операции:

а)  $\forall x, y \in K^n \quad x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$  и

б)  $\forall x \in K^n$  и  $\forall \lambda \in K \quad \lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$  ;

является линейным пространством.

III) Множество матриц  $M_{m \times n}$  размерности  $m \times n$  с элементами из  $K$  является линейным пространством. Этот факт был доказан ранее (см. п. 1.2).

IV) Обозначим множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений  $(I_0)$  через  $S_0 = \left\{ \underset{\downarrow}{\alpha}^k \right\}$ . Это множество является линейным пространством.

Действительно, поскольку  $\forall \underset{\downarrow}{\alpha}^1, \underset{\downarrow}{\alpha}^2 \in S_0 \quad \underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \underset{\downarrow}{\alpha}^2 \in S_0$  и

$\forall \underset{\downarrow}{\alpha}^1 \in S_0, \forall \lambda \in K \quad \lambda \cdot \underset{\downarrow}{\alpha}^1 \in S_0,$

а также справедливы аксиомы линейного пространства, т.е.

$$1^* : \forall \underset{\downarrow}{\alpha}^1, \underset{\downarrow}{\alpha}^2 \in S_0 \quad \underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \underset{\downarrow}{\alpha}^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 + \alpha_1^2 \\ \dots \\ \alpha_n^1 + \alpha_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_1^1 \\ \dots \\ \alpha_n^2 + \alpha_n^1 \end{pmatrix} = \underset{\downarrow}{\alpha}^2 + \underset{\downarrow}{\alpha}^1 ;$$

$$2^* : \forall \underset{\downarrow}{\alpha}^1, \underset{\downarrow}{\alpha}^2, \underset{\downarrow}{\alpha}^3 \in S_0 \quad (\underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \underset{\downarrow}{\alpha}^2) + \underset{\downarrow}{\alpha}^3 = \underset{\downarrow}{\alpha}^1 + (\underset{\downarrow}{\alpha}^2 + \underset{\downarrow}{\alpha}^3) ;$$

$$3^* : \exists \text{ нулевой элемент } \theta = \underset{\downarrow}{\theta} \in S_0 \text{ такой, что } \forall \underset{\downarrow}{\alpha} \in S_0 \quad \underset{\downarrow}{\alpha} + \underset{\downarrow}{\theta} = \underset{\downarrow}{\alpha} ;$$

$$4^* : \forall \underset{\downarrow}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in S_0 \text{ существует противоположный элемент } \underset{\downarrow}{\alpha}' = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ \dots \\ -\alpha_n \end{pmatrix} \in S_0 \text{ такой,}$$

$$\text{что } \underset{\downarrow}{\alpha} + \underset{\downarrow}{\alpha}' = \underset{\downarrow}{\theta} ;$$

$$5^* : \forall \underset{\downarrow}{\alpha}^1, \underset{\downarrow}{\alpha}^2 \in S_0 \text{ и } \forall \lambda \in K \quad \lambda \cdot (\underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \underset{\downarrow}{\alpha}^2) = \lambda \cdot \underset{\downarrow}{\alpha}^1 + \lambda \cdot \underset{\downarrow}{\alpha}^2 ;$$

$$6^* : \forall \underset{\downarrow}{\alpha} \in S_0 \text{ и } \forall \lambda, \mu \in K \quad (\lambda + \mu) \cdot \underset{\downarrow}{\alpha} = \lambda \cdot \underset{\downarrow}{\alpha} + \mu \cdot \underset{\downarrow}{\alpha} ;$$

$$7^* : \forall \underset{\downarrow}{\alpha} \in S_0 \text{ и } \forall \lambda, \mu \in K \quad (\lambda \mu) \cdot \underset{\downarrow}{\alpha} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underset{\downarrow}{\alpha}) ;$$

$$8^* : \forall \underset{\downarrow}{\alpha} \in S_0 \quad 1 \cdot \underset{\downarrow}{\alpha} = \underset{\downarrow}{\alpha} .$$

V) Еще одним линейным пространством является множество многочленов степени не выше  $m$ , обозначим его через  $P_m = \{P_m(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0\}$ .

Линейные операции в этом пространстве таковы: а) для любых многочленов

$$P_m(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0 \text{ и } Q_m(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \dots + b_1 t + b_0$$

$$\text{сумма: } P_m(t) + Q_m(t) = (a_m + b_m)t^m + (a_{m-1} + b_{m-1})t^{m-1} + \dots + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0);$$

$$\text{б) } \forall \lambda \in K \text{ произведение: } \lambda \cdot P_m(t) = (\lambda a_m)t^m + (\lambda a_{m-1})t^{m-1} + \dots + (\lambda a_1)t + (\lambda a_0).$$

Легко проверить, что все аксиомы линейного пространства в  $P_m$  выполняются.

VI) Линейным пространством будет и множество непрерывных на отрезке  $[a, b]$

функций, которое имеет обозначение

$$C([a, b]) = \{f(x) : f \text{ — непрерывная на } [a, b] \text{ функция, отображающая } [a, b] \text{ в } \mathbb{R}\}.$$

Это пространство линейно относительно операций:

$$\text{а) сложения: для любых } f(x), g(x) \in C([a, b]) \quad f(x) + g(x) \in C([a, b])$$

$$\text{и б) умножение на число: } \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot f(x) \in C([a, b]).$$

Очевидно, что все аксиомы линейного пространства в  $C([a, b])$  выполняются.

VII) Пусть  $V$  и  $W$  – два линейных пространства над множеством  $K$ .

Рассмотрим множество  $V \times W = \{(x, y): x \in V, y \in W\}$  с операциями

а)  $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \times W \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$  и

б)  $\forall (x, y) \in V \times W$  и  $\forall \lambda \in K \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$ .

С введенными таким образом операциями это множество становится линейным пространством над множеством  $K$  и называется *декартовым произведением линейных пространств  $V$  и  $W$* . В качестве примера можно привести геометрическое линейное пространство  $R^3 = R^2 \times R$ , где  $R^2$  – плоскость, а  $R$  – прямая.

Если  $W = V$ , то  $V \times V = V^2$  называют *декартовым квадратом*, в частности,

$R \times R = R^2 = \{(x, y): x, y \in R\}$ .

## § 5. Базис и размерность линейного пространства

### 5.1. Линейная зависимость и линейная независимость системы элементов линейного пространства.

**Определение 5.1.** Непустое упорядоченное множество элементов линейного пространства  $V$ , называется *системой (семейством) элементов из  $V$* . Любое непустое упорядоченное подмножество системы называется *подсистемой этой системы*.

**Определение 5.2.** Элемент  $x \in V$  называется *линейной комбинацией элементов  $x_1, \dots, x_m \in V$* , если существуют числа  $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$  такие, что  $x = \mu_1 \cdot x_1 + \dots + \mu_m \cdot x_m$ .

**Определение 5.3.** Система  $\{x_j\}_{j=1}^m$  называется *линейно зависимой в  $V$* , если существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  такие, что  $\sum_{j=1}^m |\lambda_j| \neq 0$  (т.е. хотя бы одно из этих чисел ненулевое) при этом  $\sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot x_j = \theta$  (\*).

Если же равенство (\*) выполняется тогда и только тогда, когда  $\lambda_j = 0 \quad \forall j = \overline{1, m}$ , то система  $\{x_j\}_{j=1}^m$  называется *линейно независимой в  $V$* .

### Теорема 5.1. (Критерий линейной зависимости)

Система  $\{x_j\}_{j=1}^m \subset V$  линейно зависима тогда и только тогда, когда один из элементов системы есть линейная комбинация остальных элементов.

# Необходимость. Пусть  $\{x_j\}_{j=1}^m \subset V$  линейно зависящая система, т.е. существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  такие, что  $\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j = \theta$  (например,  $\lambda_1 \neq 0$ ), при этом

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_m \cdot x_m = \theta \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{1}{-\lambda_1} (-\lambda_1 \cdot x_1 + \theta) = \\ = \frac{1}{-\lambda_1} (-\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_m \cdot x_m) = \mu_2 \cdot x_2 + \dots + \mu_m \cdot x_m,$$

где  $\mu_j = -\frac{\lambda_j}{\lambda_1}$ ,  $\forall j = \overline{2, m}$ . Итак, элемент  $x_1$  есть линейная комбинация остальных.

Не ограничивая общности, вместо  $x_1$  мог быть и другой элемент.

Достаточность. Не ограничивая общности, предположим, что существуют числа  $\mu_2, \dots, \mu_m \in K$  такие, что элемент  $x_1$  представим в виде  $x_1 = \mu_2 \cdot x_2 + \dots + \mu_m \cdot x_m$ , тогда справедливо равенство  $-1 \cdot x_1 + \mu_2 \cdot x_2 + \dots + \mu_m \cdot x_m = -x_1 + x_1 = \theta$ . Начало и конец этой цепочки равенств доказывают, что система  $\{x_j\}_{j=1}^m$  линейно зависима,

поскольку первый коэффициент отличен от нуля.

#

**Замечание 5.1.** Нумерация элементов системы не влияет на свойство системы быть линейно зависимой или линейно независимой.

**Теорема 5.2.** Если система содержит линейно зависимую подсистему, то она сама является линейно зависимой системой.

# Пусть система  $\{x_j\}_{j=1}^m$  содержит линейно зависимую подсистему, например,  $\{x_k\}_{k=1}^p$ ,  $p \leq m$ . В силу определения 5.2 существуют числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$  такие, что  $\sum_{k=1}^p |\lambda_k| \neq 0$ , при этом  $\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot x_k = \theta$ . Тогда составим линейную комбинацию  $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_p \cdot x_p + 0 \cdot x_{p+1} + \dots + 0 \cdot x_m = \theta + 0 \cdot x_{p+1} + \dots + 0 \cdot x_m = \theta$ , которая показывает, что система  $\{x_j\}_{j=1}^m$  линейно зависима. #

**Следствие 5.1.** Система, содержащая нулевой элемент  $\theta$ , является линейно зависимой.

# Поскольку  $\lambda \cdot \theta = \theta \quad \forall \lambda \neq 0$ , то система  $\{x_j\}_{j=1}^m$ , которая содержит множество  $\{\theta\}$ , являющееся линейно зависимой подсистемой этой системы, является линейно зависимой. #

**Следствие 5.2.** Любая подсистема линейно независимой системы является линейно независимой.

# Доказательство проведем от противного. Пусть в некоторой линейно независимой системе содержится линейно зависимая подсистема. Тогда по теореме 5.2 вся система должна быть линейно зависимой, что противоречит предположению. #

## 5.2. Базис и размерность линейного пространства.

Пусть  $V$  линейное пространство над множеством  $K$ .

**Определение 5.4.** Система  $\{e_j\}_{j=1}^n$  называется *базисом линейного пространства  $V$* , если

1)  $e_j \in V \quad \forall j = \overline{1, n}$ ;

2) система  $\{e_j\}_{j=1}^n$  является линейно независимой;

3) для любого элемента  $y \in V$  существуют числа  $y^1, \dots, y^n \in K$  такие, что  $y$  можно представить в виде  $y = y^1 \cdot e_1 + \dots + y^n \cdot e_n$ . (8)

Равенство (8) называется *разложением элемента  $y$  по базису  $[e] = \{e_j\}_{j=1}^n$* , а числа  $y^1, \dots, y^n$  – *координатами элемента  $y$  в базисе  $[e] = \{e_j\}_{j=1}^n$* .

Будем обозначать  $y = (y^1, \dots, y^n)$ .

**Лемма 5.1.** Для любого элемента  $y \in V$  разложение по базису  $[e]$  является *единственным*.

# Доказательство проведем от противного.

Пусть существует элемент  $y_0 \in V$ , который имеет два разложения по базису  $[e]$ ,

т.е.  $y_0 = y_0^1 \cdot e_1 + \dots + y_0^n \cdot e_n$  и  $y_0 = \tilde{y}_0^1 \cdot e_1 + \dots + \tilde{y}_0^n \cdot e_n$ .

Тогда, вычитая одно равенство из другого, получаем

$$\theta = y_\theta - y_\theta = (y_\theta^1 \cdot e_1 + \dots + y_\theta^n \cdot e_n) - (\tilde{y}_\theta^1 \cdot e_1 + \dots + \tilde{y}_\theta^n \cdot e_n) = (y_\theta^1 - \tilde{y}_\theta^1) e_1 + \dots + (y_\theta^n - \tilde{y}_\theta^n) e_n.$$

Начало и конец цепочки равенств позволяют утверждать, что  $y_\theta^j - \tilde{y}_\theta^j = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$ ,

поскольку система  $\{e_j\}_{j=1}^n$  линейно независимая, или  $y_\theta^j = \tilde{y}_\theta^j \quad \forall j = \overline{1, n}$ .

Итак, предположение о неединственности разложения неверно. #

**Теорема 5.3.** Для любых элементов,  $x, y \in V$  заданных своими координатами

$x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $y = (y^1, \dots, y^n)$  в базисе  $[e]$  справедливы следующие равенства:

а)  $x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$  в базисе  $[e]$ ; (9)

б)  $\forall \lambda \in K \quad \lambda \cdot x = (\lambda \cdot x^1, \dots, \lambda \cdot x^n)$  в базисе  $[e]$ . (10)

# Поскольку  $x$  и  $y$  заданы своими координатами в базисе  $[e]$ , это означает в силу

определения 5.4, что имеют место следующие разложения:

$$x = x^1 \cdot e_1 + \dots + x^n \cdot e_n \quad \text{и} \quad y = y^1 \cdot e_1 + \dots + y^n \cdot e_n.$$

Тогда а)  $x + y = (x^1 \cdot e_1 + \dots + x^n \cdot e_n) + (y^1 \cdot e_1 + \dots + y^n \cdot e_n) = (x^1 + y^1) \cdot e_1 + \dots + (x^n + y^n) \cdot e_n$

и б)  $\forall \lambda \in K \quad \lambda \cdot x = \lambda \cdot (x^1 \cdot e_1 + \dots + x^n \cdot e_n) = (\lambda \cdot x^1) \cdot e_1 + \dots + (\lambda \cdot x^n) \cdot e_n.$

Итак, в силу определения 5.4 справедливы формулы (9) и (10). #

**Определение 5.5.** Говорят, что *линейное пространство  $V$  имеет размерность  $n$*  ( $\dim V = n$ ), если

- 1) в  $V$  существует линейно независимая система из  $n$  элементов  $\{x_j\}_{j=1}^n$ ;
- 2) в  $V$  любая система из  $(n+1)$  элементов линейно зависима.

**Определение 5.6.** 1) Если  $\dim V = n < \infty$ , то линейное пространство  $V$  называется *конечномерным ( $n$ -мерным)*.

2) Если для любого  $N \in \mathbb{N}$  существует линейно независимая система  $\{x_j\}_{j=1}^N \subset V$ , то  $V$  называется *бесконечномерным*.

**Пример 5.1.** Линейное пространство  $C(a, b)$  является бесконечномерным.

**Теорема 5.4.** 1) Если  $\dim V = n < \infty$ , то любая линейно независимая система  $\{x_j\}_{j=1}^n \subset V$  является базисом.

2) Если система  $[e] = \{e_j\}_{j=1}^n$  есть базис линейного пространства  $V$ , то  $\dim V = n$ .

