

Скалярное произведение векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b}$$

Определение. Скалярное произведение двух векторов \vec{a} и \vec{b} вычисляется по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \varphi \text{ — угол между } \vec{a}, \vec{b}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Результатом **скалярного** произведения является **число**, т.е. **скалярная величина**.

Теорема. Свойства скалярного произведения. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$;

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$;

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

4. $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda \vec{b}$, λ — число;

5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} \cdot |\vec{b}| = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} \cdot |\vec{a}|$;

6. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;

7. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \{a_1; a_2; a_3\} \cdot \{b_1; b_2; b_3\} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;

вид скалярного произведения через координаты сомножителей;

8. $\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Доказательство.

1. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то по определению $\vec{a} \perp \vec{b}$

2.

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{a}}) = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \vec{a} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2$$

3.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos \varphi = \cos(-\varphi) = \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) \implies \vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$$

4. Самостоятельно – два случая: $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

5. По определению

$$\text{пр } \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| \cos \varphi,$$

поэтому

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}| \cos \varphi |\vec{b}| = \text{пр } \vec{a} \vec{b} |\vec{b}|$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \text{pr}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) |\vec{c}| = \\
 &= \left(\text{pr}_{\vec{c}} \vec{a} + \text{pr}_{\vec{c}} \vec{b} \right) |\vec{c}| = \\
 &= \text{pr}_{\vec{c}} \vec{a} |\vec{c}| + \text{pr}_{\vec{c}} \vec{b} |\vec{c}| = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= \{a_1; a_2; a_3\} \cdot \{b_1; b_2; b_3\} = \\
 &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = \\
 &= a_1 b_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + a_1 b_3 \vec{i} \cdot \vec{k} + \\
 &\quad + a_2 b_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + a_2 b_3 \vec{j} \cdot \vec{k} + \\
 &\quad + a_3 b_1 \vec{k} \cdot \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + a_3 b_3 \vec{k} \cdot \vec{k} = \\
 &= \begin{bmatrix} \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \end{bmatrix} = \\
 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \vec{a} \cdot \vec{b}
 \end{aligned}$$

$$8. \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \implies \cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

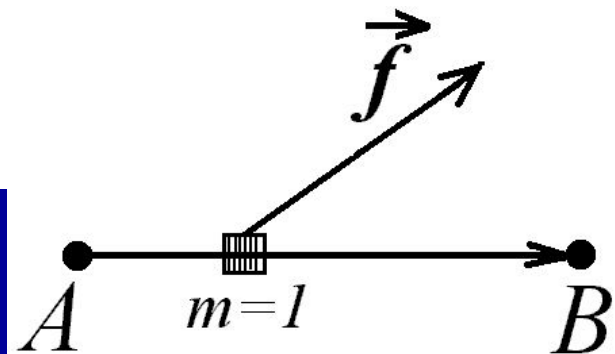
$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Механический смысл скалярного произведения. Если тело единичной массы под действием постоянной силы \vec{f} перемещается из точки A в точку B вдоль прямой, то совершаемая при этом работа W есть скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения:

$$W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{f}$$

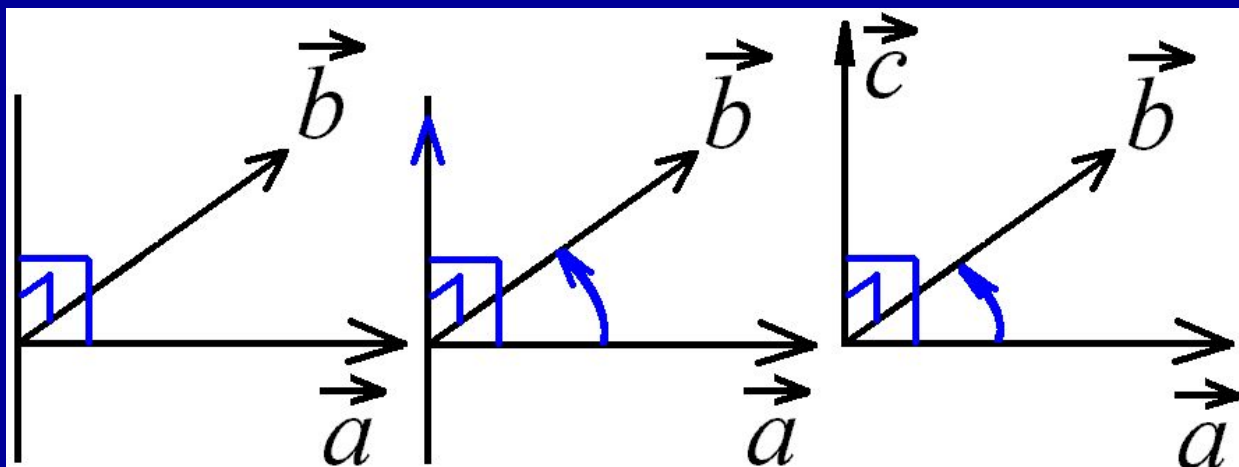


Векторное произведение векторов

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

Определение. Результат векторного произведения двух векторов \vec{a} и \vec{b} есть третий **вектор** \vec{c} : $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ — однозначно определяемый следующими тремя условиями:

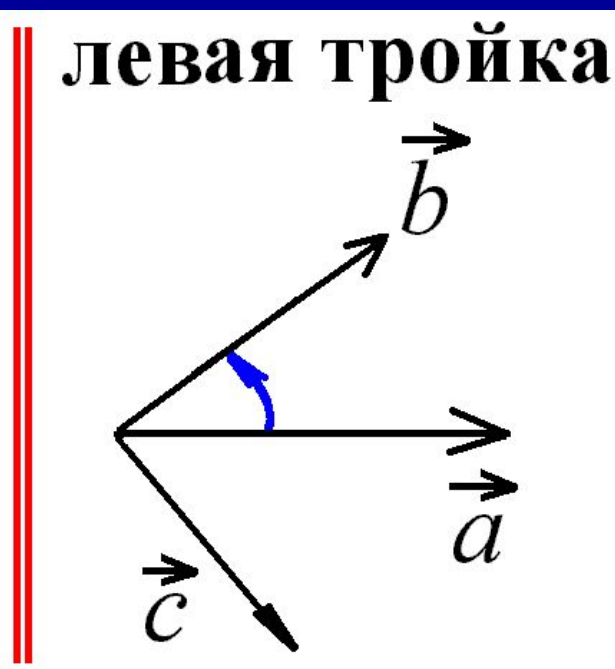
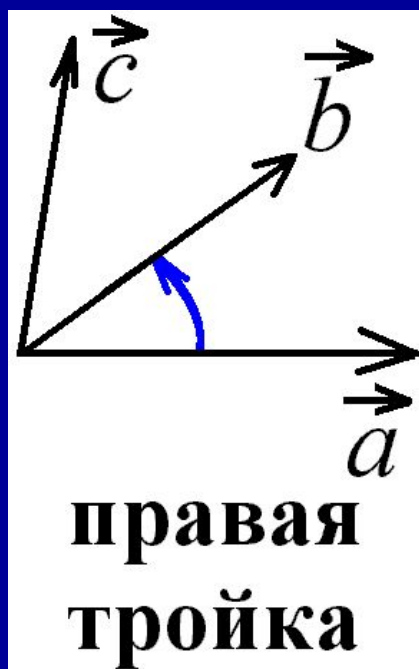
1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2. \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} — правая тройка векторов;
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$



Определение.

Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **против** хода часовой стрелки.

Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **по** ходу часовой стрелки.



Теорема. Свойства векторного произведения. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
3. $\lambda[\vec{a}, \vec{b}] = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$, λ — число;
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
5. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\diamond ABCD}$;
6. $\{a_1; a_2; a_3\} \times \{b_1; b_2; b_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Доказательство.

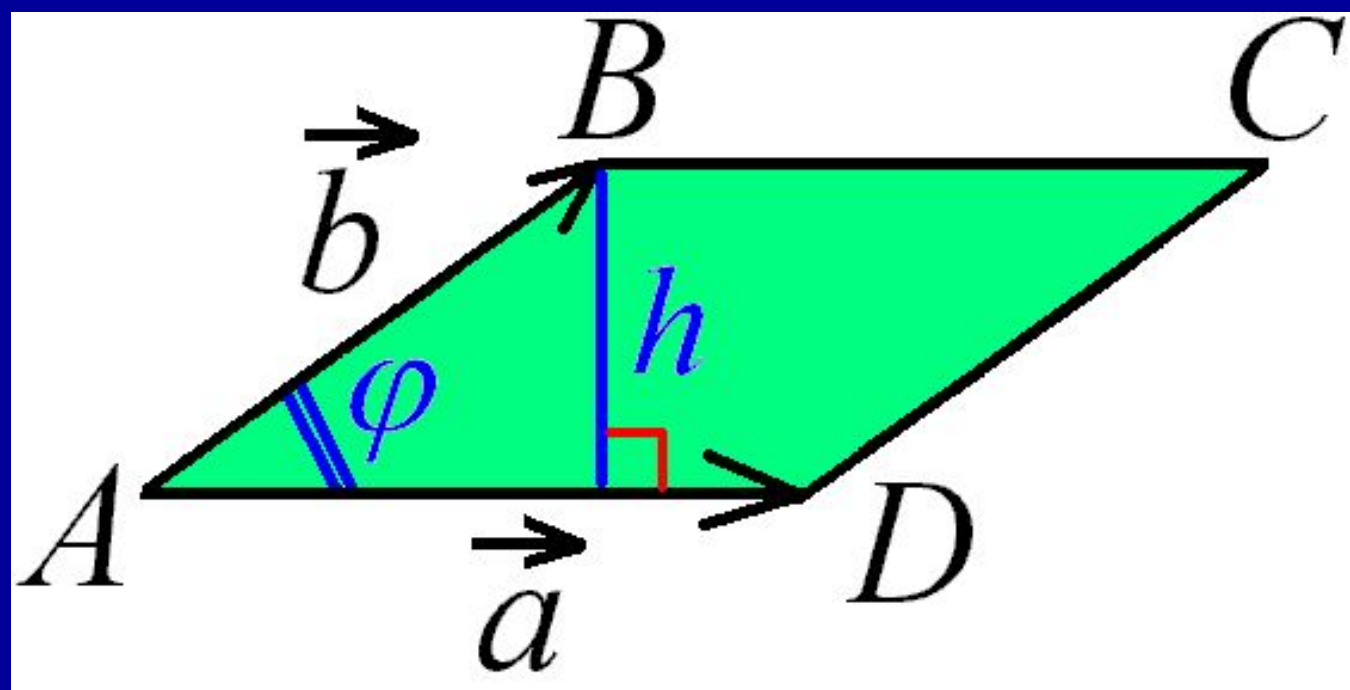
1. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\varphi = 0$, $\sin 0 = 0$.

2.

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) \implies \vec{b}, \vec{a}, -\vec{c} \text{ правая}$$

3,4 – без доказательства.

5. $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a}| \cdot h = S_{\diamond ABCD}$



6. Вид векторного произведения через координаты сомножителей – **правило для запоминания**

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

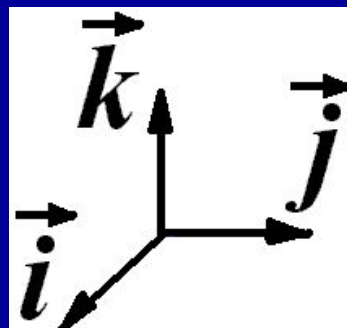
определитель нужно раскрыть по первой строке

$$\begin{aligned} &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1) \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2) \vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3) \vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1) \vec{k} = \\ &= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} = \{c_1; c_2; c_3\} = \vec{c} \end{aligned}$$

Доказательство формулы:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = \\ &= a_1 b_1 \vec{i} \times \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \times \vec{j} + a_1 b_3 \vec{i} \times \vec{k} + \\ &+ a_2 b_1 \vec{j} \times \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j} \times \vec{j} + a_2 b_3 \vec{j} \times \vec{k} + \\ &+ a_3 b_1 \vec{k} \times \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \times \vec{j} + a_3 b_3 \vec{k} \times \vec{k} =\end{aligned}$$

\times	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	$\vec{0}$	\vec{k}	$-\vec{j}$
\vec{j}	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	\vec{i}
\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	$\vec{0}$



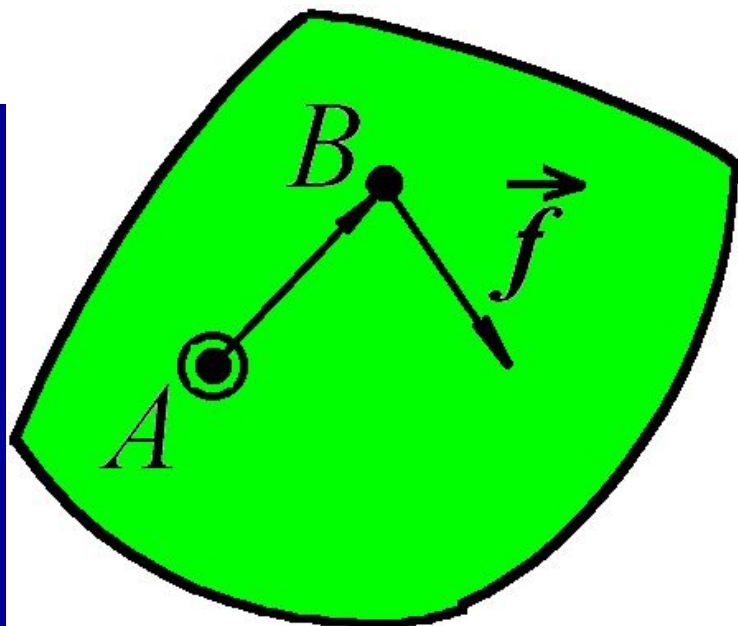
$$\begin{aligned}&= a_1 b_1 \vec{0} + a_1 b_2 \vec{k} + a_1 b_3 (-\vec{j}) + \\ &+ a_2 b_1 (-\vec{k}) + a_2 b_2 \vec{0} + a_2 b_3 \vec{i} + \\ &+ a_3 b_1 \vec{j} + a_3 b_2 (-\vec{i}) + a_3 b_3 \vec{0} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \\
 &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Механический смысл векторного произведения.
 Тело закреплено в точке A , в точке B приложена сила \vec{f} ,
 поэтому тело крутится.

$$M_A \vec{f} = \overrightarrow{AB} \times \vec{f}$$

\overrightarrow{AB} – вектор-плечо



Смешанное произведение

Определение. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ – вектор; $\vec{d} \cdot \vec{c}$ – число;

результат смешанного произведения – **число, скаляр**

Вид через координаты сомножителей

Пусть $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \boxed{c_1} & \boxed{c_2} & \boxed{c_3} \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = \vec{d} \cdot \vec{c};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d} = \{d_1, d_2, d_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения:

1.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Если определитель раскрыть по первой строке, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{f} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

2.

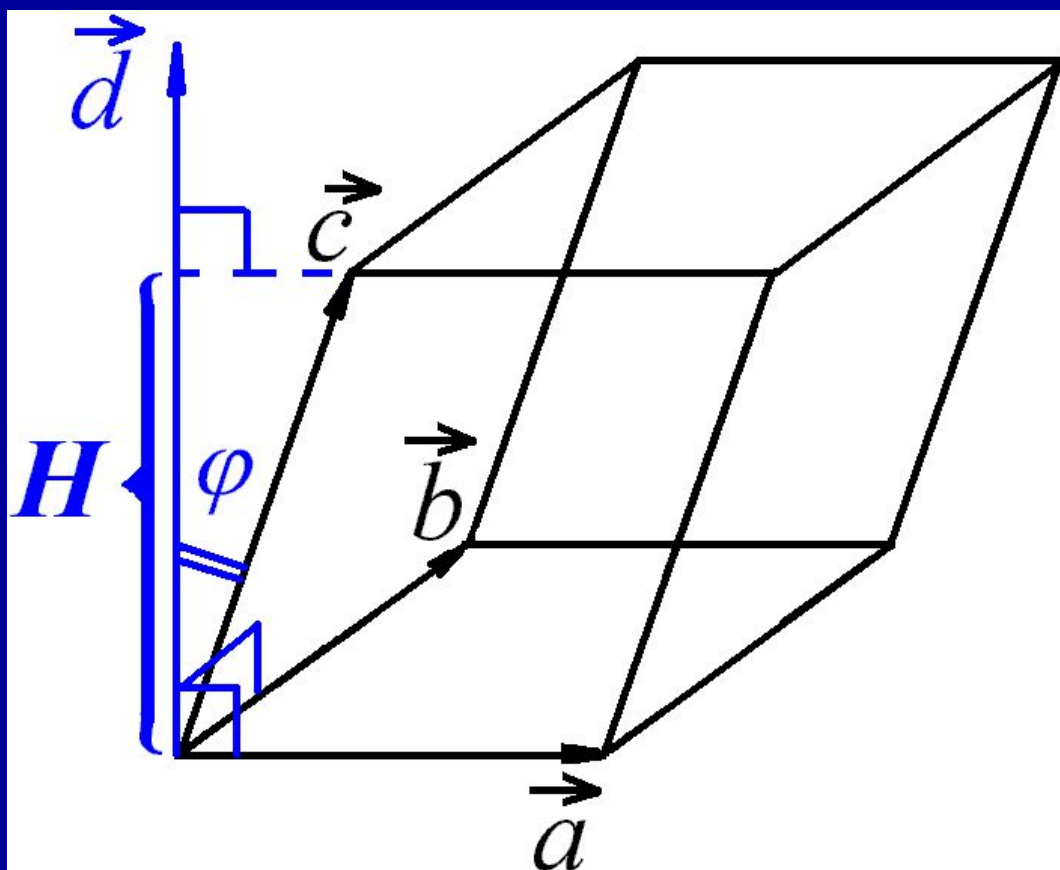
$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a}$$

по свойству определителей.

$$3. \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \pm V_{\text{пар}} = \pm 6V_{\text{пир}}$$

$V_{\text{пар}}$ – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{a} \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \varphi = S_{\diamond ABCD} \cdot (\pm H) = \pm V_{\text{пар}}$$



$V_{\text{пир}}$ – объем пирамиды, построенной на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c}

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{\diamond ABCD} \cdot H = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{пар}}$$

4. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$ тогда и только тогда, когда все три вектора лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.

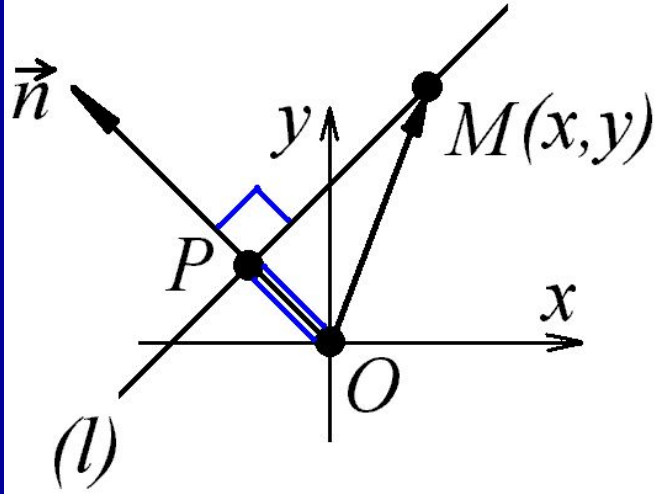
Механического смысла у смешанного произведения **нет**.

Прямая на плоскости

Теорема. Любая прямая на плоскости задается линейным уравнением:

$$(\ell) : Ax + By + D = 0; \quad A, B, D - \text{const}; \quad A^2 + B^2 \neq 0 \quad (*)$$

и наоборот, т.е. любое уравнение () задает прямую.*



Доказательство. Для заданной на плоскости прямой (ℓ) построим ненулевой **нормальный** вектор $\vec{n} = \{A, B\}$

$$\vec{n} \perp (\ell); \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

Пусть точка $M(x, y)$ – произвольная точка прямой. Радиус-вектор \overrightarrow{OM} при проектировании на вектор \vec{n} даст число $p = \pm |OP|$, т.е.

$$p = \text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{OM}; \quad p = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}; \quad p = \frac{Ax + By}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

$$Ax + By = p\sqrt{A^2 + B^2}; \quad Ax + By + D = 0, \quad \text{где } D = -p\sqrt{A^2 + B^2}$$

Первая часть теоремы доказана, вторую – самостоятельно!!

1. Прямая, проходящая через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющая заданный нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B\}$:

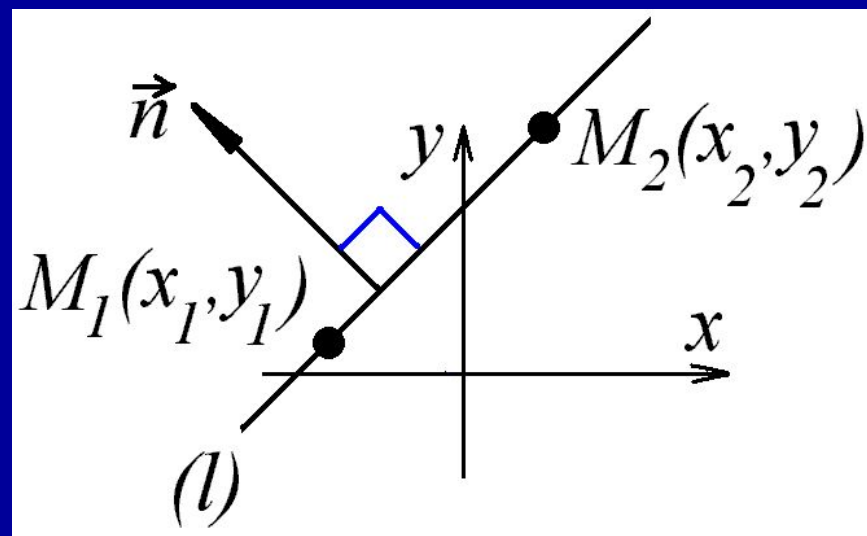
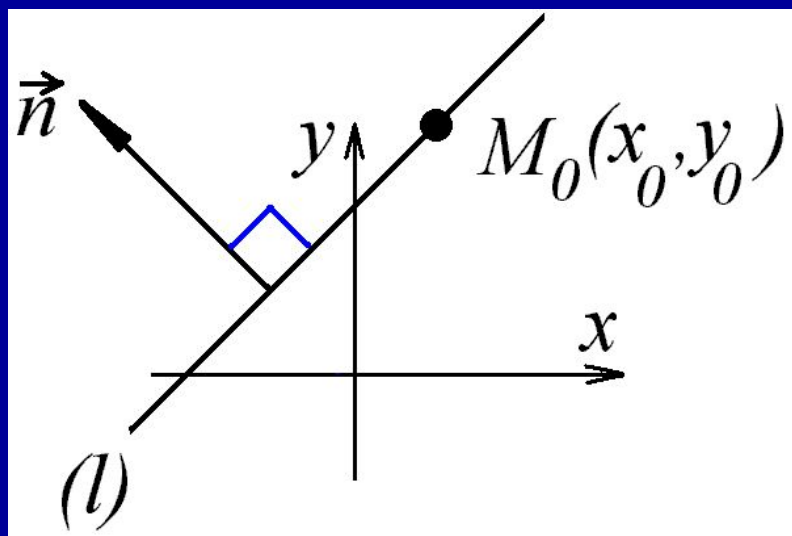
$$(\ell) : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

2. Прямая, проходящая через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$(\ell) : (y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

т.к.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\} \parallel (\ell); \quad \overrightarrow{M_1M_2} \perp \{(y_2 - y_1), -(x_2 - x_1)\} = \vec{n}$$



3. Случай $B \neq 0$ из уравнения (6.2):

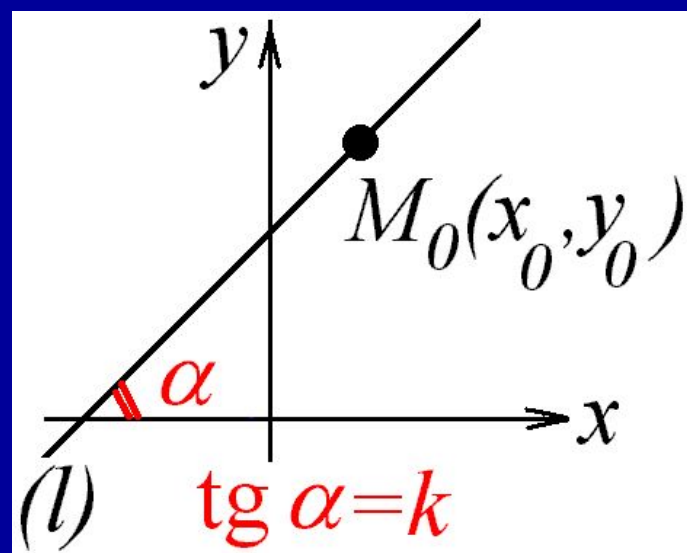
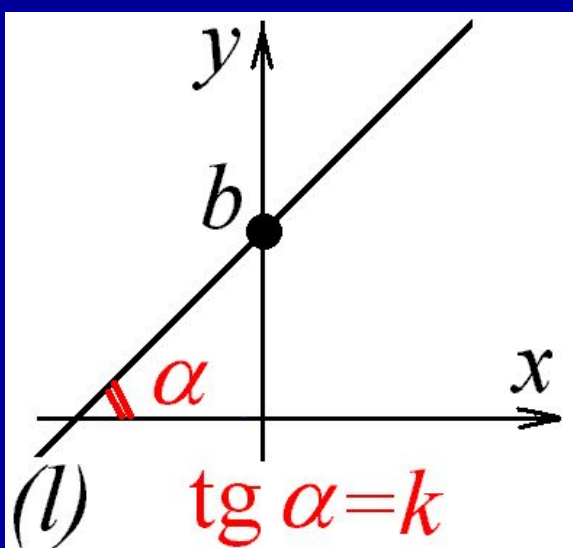
$$(\ell) : \frac{A}{B}x + y + \frac{D}{B} = 0; \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}$$

т.е.

$$(\ell) : y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B} = \operatorname{tg} \alpha, \quad b = -\frac{D}{B}$$

4. Прямая, проходящая через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющая заданный наклон k :

$$(\ell) : (y - y_0) = k(x - x_0)$$



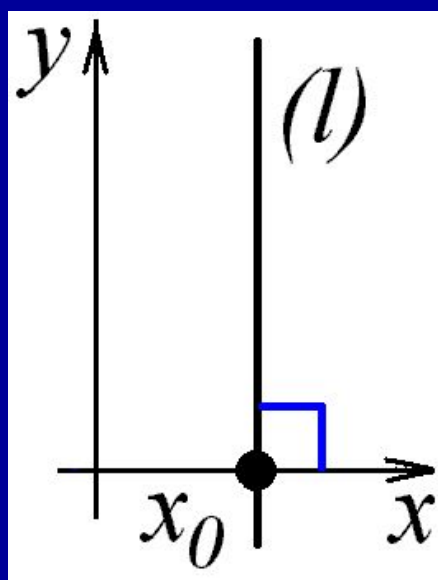
5. Прямая, проходящая через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

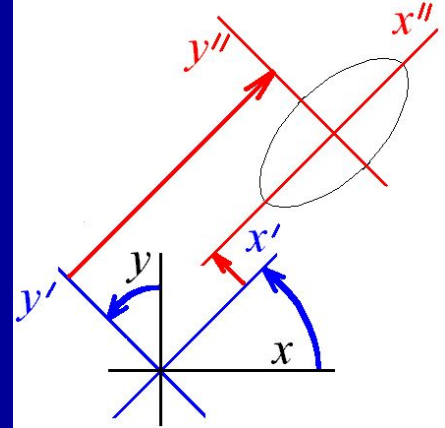
$$(\ell) : \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)}; \quad (y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

6. Случай $B = 0$, $A \neq 0$:

$$(\ell) : Ax + D = 0, \quad x = x_0, \quad \text{где } x_0 = -\frac{D}{A}$$

вертикальная прямая, проходящая через точку $x = x_0$





Кривые второго порядка

Линейные уравнения $Ax + By + D = 0$

задают прямые на плоскости

Уравнения второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad A, B, C, D, E, F - \text{const}$$

задают на плоскости **кривые второго порядка**

С помощью **поворота координатных осей** и

параллельного переноса системы координат можно

оси симметрии кривой сделать новыми осями координат, а

новое начало координат поместить центр симметрии кривой

второго порядка

Переход от старой системы к новой осуществляется с помощью **линейных функций**

В новой системе координат уравнение будет иметь **канонический вид**

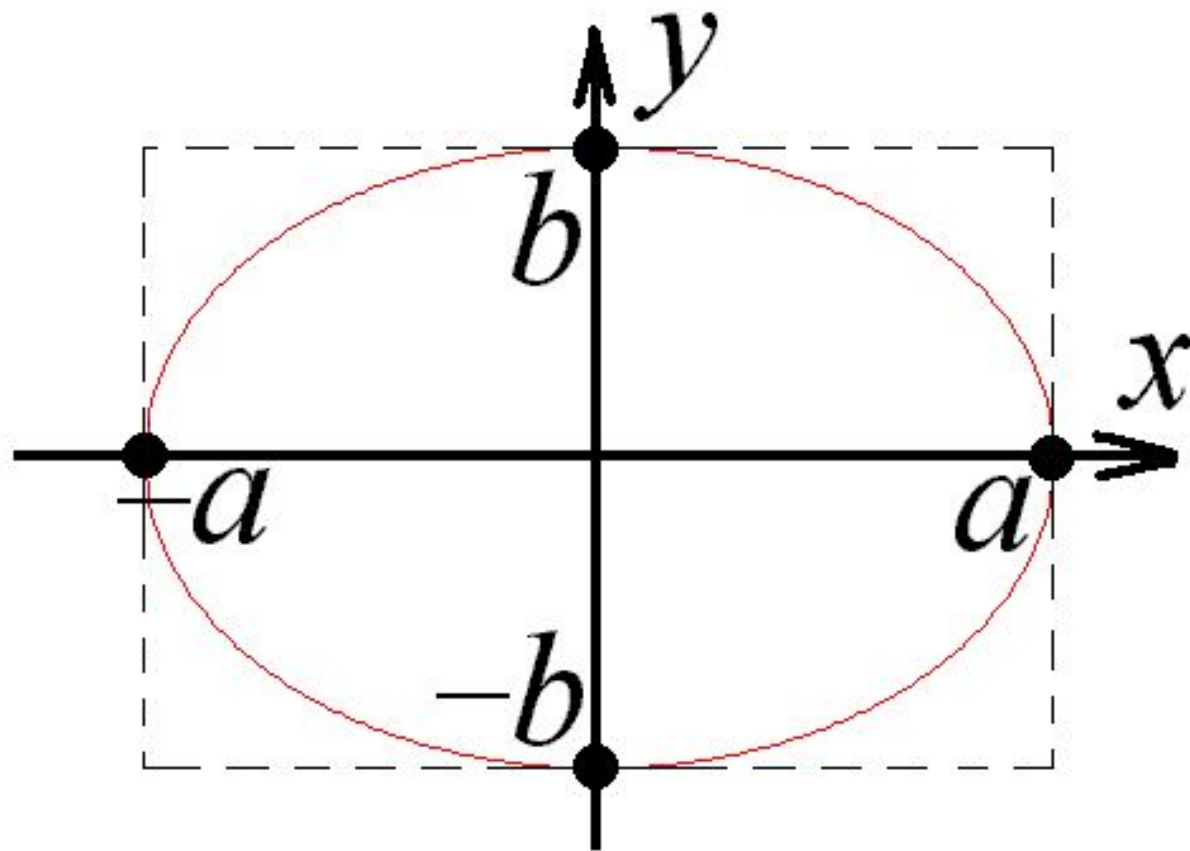
Если не вырожденный случай, то кривых второго порядка всего три:

эллипс : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a, b = \text{const} > 0, \quad a > b$

гипербола : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b = \text{const} > 0$

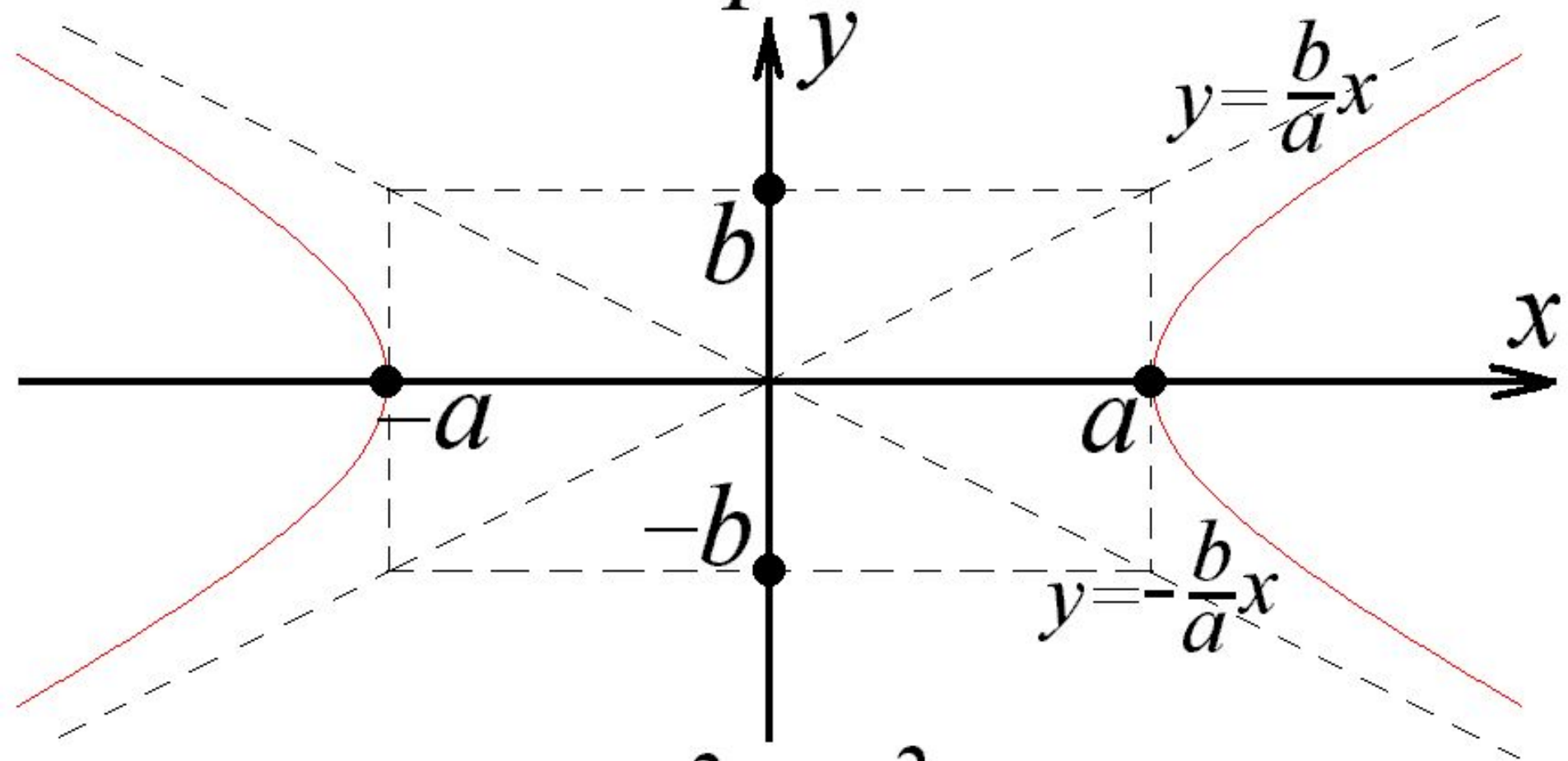
парабола : $y^2 = 2px, \quad p = \text{const} > 0$

Эллипс

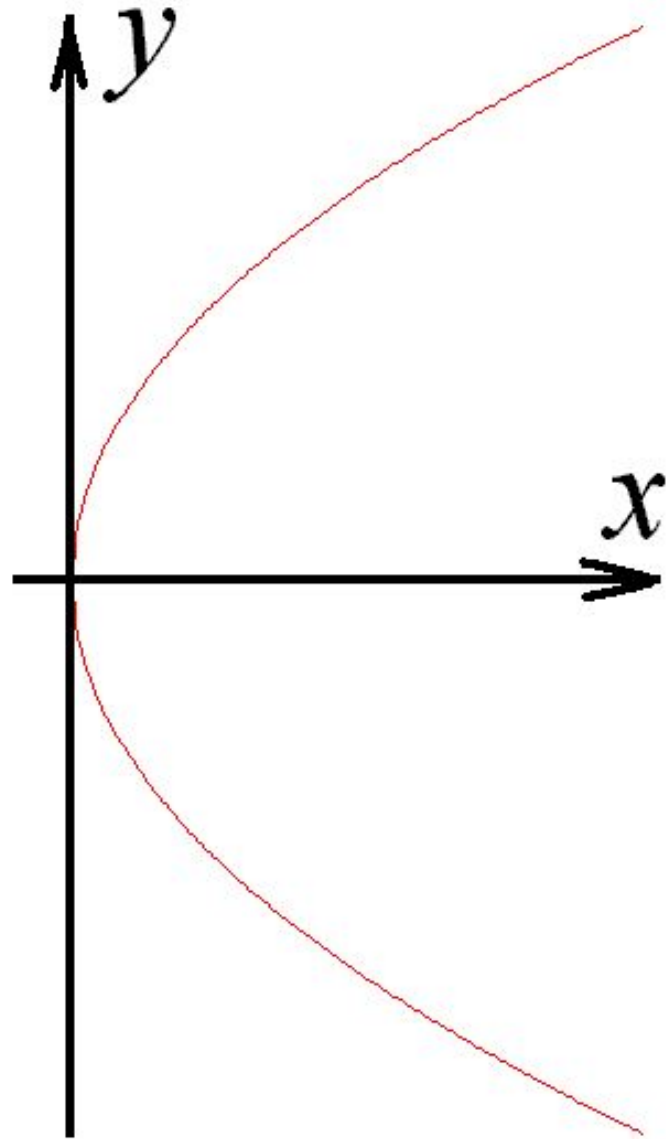


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гипербола



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



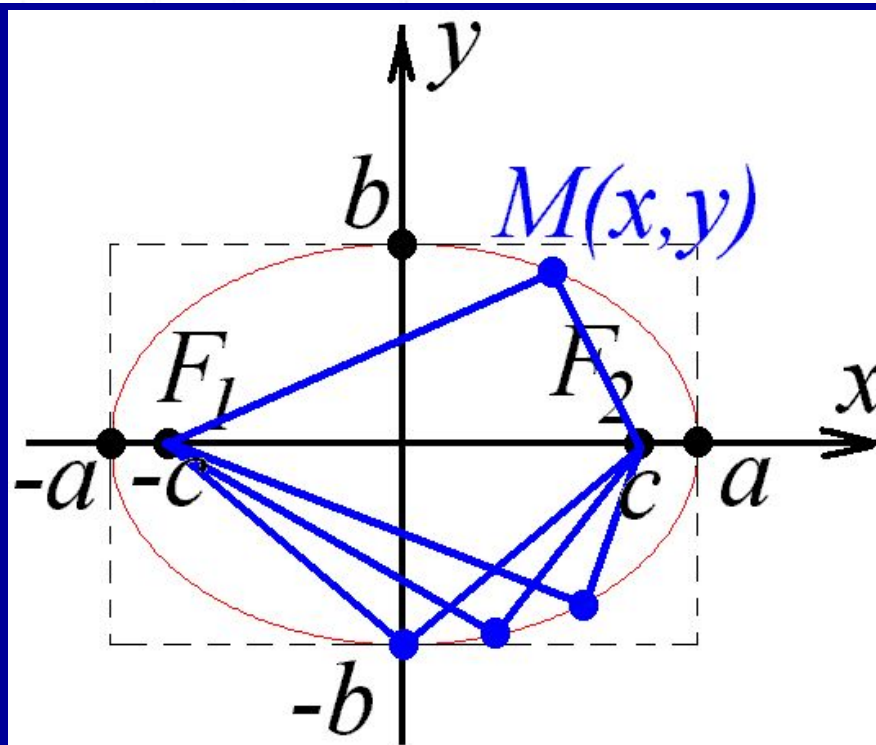
парабола

$$y^2 = 2px$$

Геометрические свойства кривых второго порядка

Сумма расстояний от произвольной точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы; Ox , Oy – оси симметрии
 $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ – вершины



$$b^2 = a^2 - c^2$$

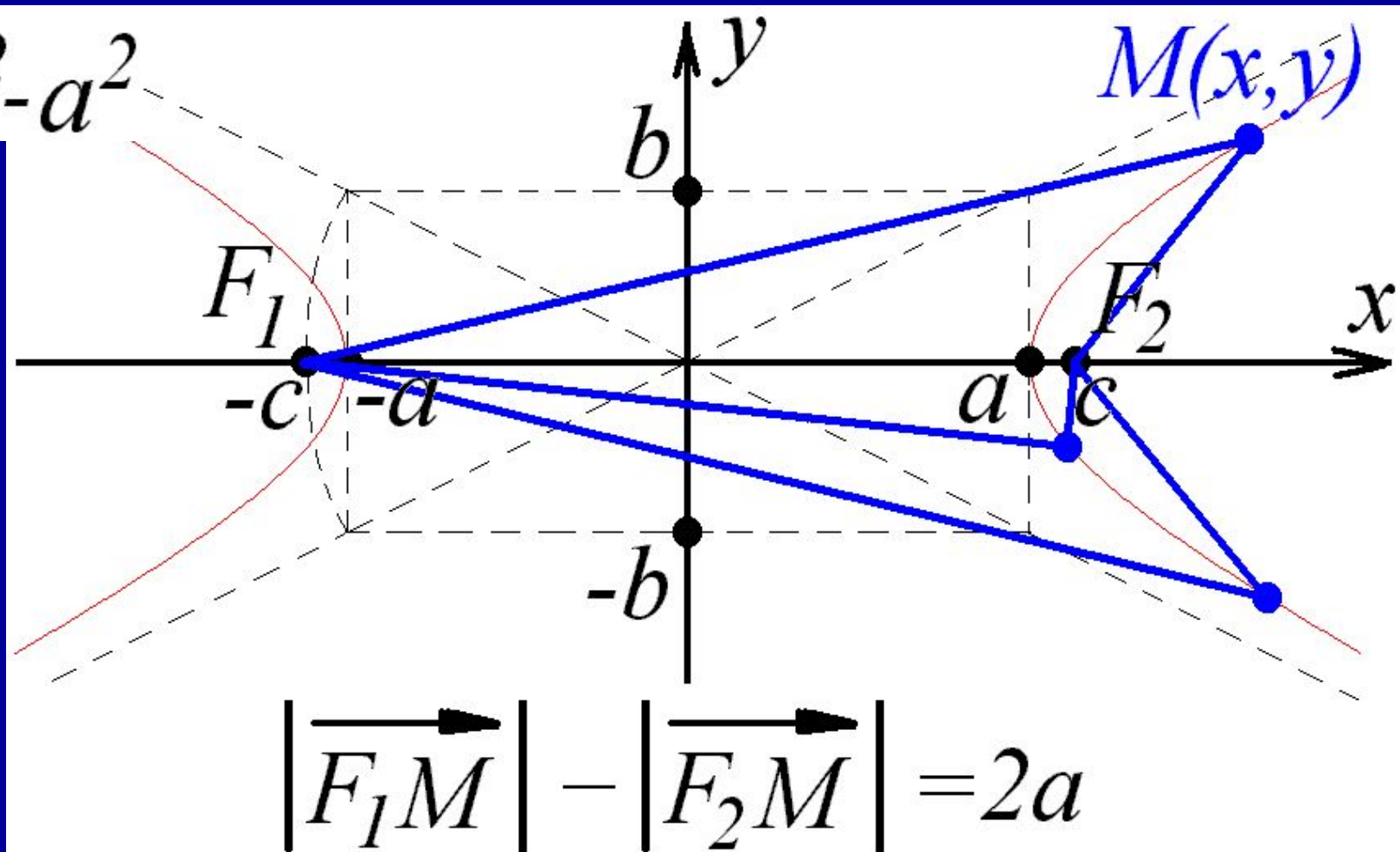
$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$$

Разность расстояний от произвольной точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

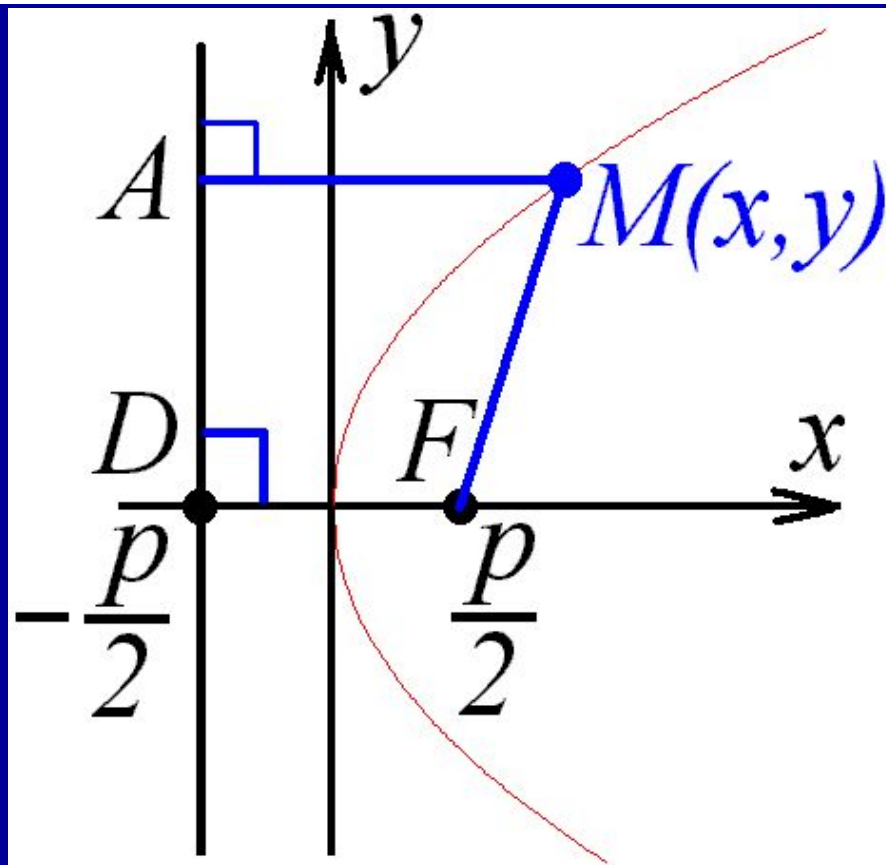
$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы; Ox , Oy – оси симметрии;

$(a, 0)$, $(-a, 0)$ – вершины

$$b^2 = c^2 - a^2$$



Расстояние от произвольной точки параболы до ее фокуса равно расстоянию от этой точки до директрисы параболы. $F(p/2, 0)$ – фокус, $x = -p/2$ – директриса, Ox – ось симметрии, $(0, 0)$ – вершина.



$$|\vec{FM}| = |\vec{AM}|$$

Оптические свойства кривых второго порядка

