Приложения криволинейных интегралов в геометрии и механике

1) Длина кривой.

Если подынтегральная функция f(x, y, z) ≡ 1, то из определения КРИ-1 следует, что он равен длине кривой, по которой ведется интегрирование:

$$l = \int_l ds.$$

2) Масса кривой.

Если подынтегральная функция $\gamma(x, y, z)$ определяет плотность в каждой точке кривой, то массу кривой можно найти по формуле

$$M = \int_l \gamma(x, y, z)\,ds.$$

- 3) Моменты кривой l:

статические моменты плоской кривой l относительно осей Ox и Oy:

$$M_x = \int_l y\gamma(x, y)ds, M_y = \int_l x\gamma(x, y, z)ds$$

момент инерции пространственной кривой относительно начала координат:

$$I_0 = \int_l (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

моменты инерции кривой относительно координатных осей:

$$I_x = \int_l (y^2 + z^2) ds, I_y = \int_l (x^2 + z^2) ds, I_z = \int_l (x^2 + y^2) ds$$

4) Координаты центра масс кривой вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\int\limits_l x\gamma(x, y, z)ds}{M}, y_c = \frac{\int\limits_l y\gamma(x, y, z)ds}{M},$$

$$z_c = \frac{\int\limits_l z\gamma(x, y, z)ds}{M}$$

- 5) Работа силы $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, действующей на точку, движущуюся по кривой (AB):

$$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Пример. Найти массу кривой с линейной плотностью $\gamma = \dfrac{\rho}{2}$, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = 4\varphi$, где

$$-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

- Решение.

$$M=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\gamma\left(\rho(\varphi),\varphi\right)\sqrt{\rho^2+\left(\rho'\right)^2}d\varphi=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{4\varphi}{2}\cdot 4\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{\varphi^2+1}d(\varphi^2+1)=\frac{8}{3}\left(\varphi^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{8}{81}\left(\left(4\pi^2+9\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\pi^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

- **Пример.** Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \left\{ x^2y^3, y^2z^3, xyz \right\}$ вдоль отрезка прямой от точки A (-2;-3;1) до точки B(1;4;2).

- Решение. Найдем канонические и параметрические уравнения прямой АВ:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t\Rightarrow\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-1}{1}=t,$$

$$\begin{cases} x=3t-2, \quad dx=3dt; \\ y=7t-3, \quad dy=7dt; \\ z=t+1, \quad dz=dt. \end{cases} \qquad \left(t(A)=0, \quad t(B)=1\right)$$

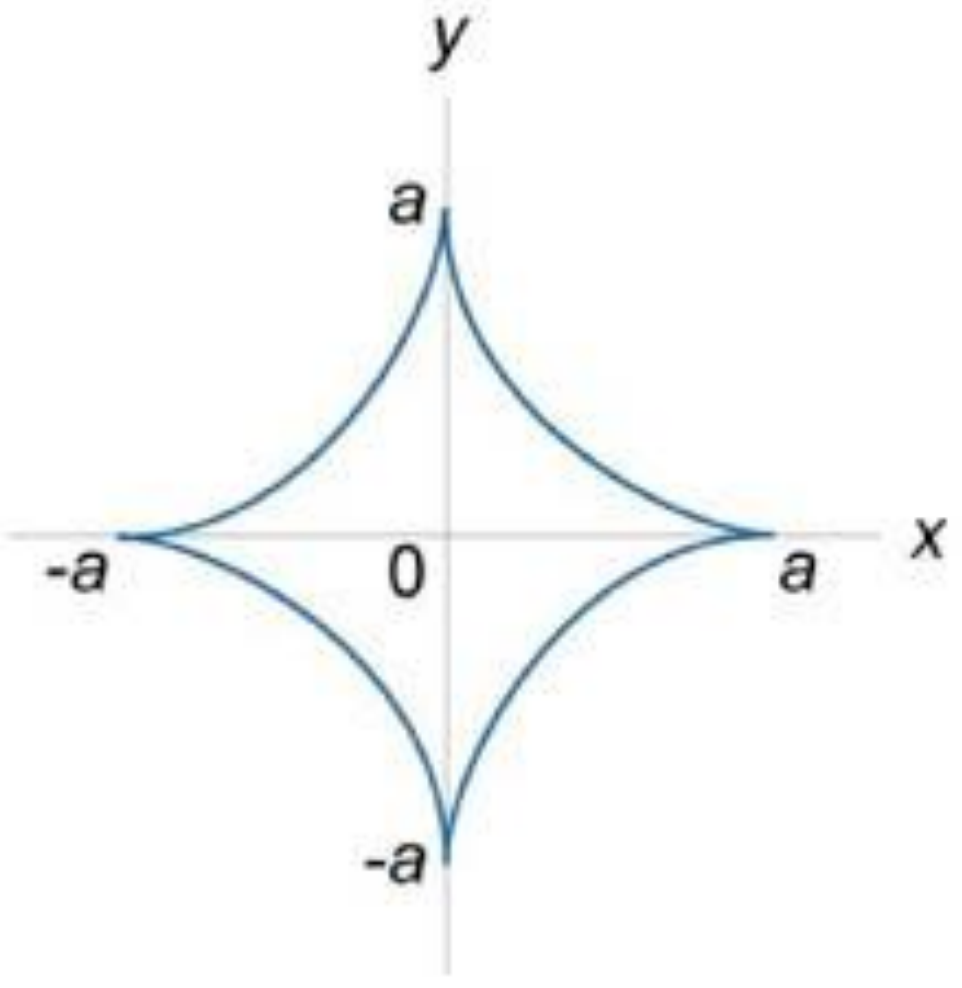
$$A=\int\limits_{(AB)}F_x dx+F_y dy+F_z dz=\int\limits_{(AB)}x^2y^3dx+y^2z^3dy+xyzdz=$$

$$=\int\limits_0^1\left(3(3t-2)^2(7t-3)^3+7(7t-3)^2(t+1)^3+(3t-2)(7t-3)(t+1)\right)dt=$$

$$\int\limits_0^1\left(9604t^5-6056t^4+25305t^3-8177t^2+993t-261\right)dt=$$

$$=\left(\frac{9604t^6}{6}-\frac{6056t^5}{5}+\frac{25305t^4}{4}-\frac{8177t^3}{3}+\frac{993t^2}{2}-261t\right)\Bigg|_0^1=4225,55.$$

Пример. Вычислить длину астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$



- *Решение.* В силу симметрии, достаточно вычислить длину кривой, лежащей в первом квадранте, и затем умножить результат на 4. Уравнение астроиды в первом квадранте имеет вид

$$y = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}, \text{ где } x \in [0, a].$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)=-\frac{\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{1/2}}{x^{1/3}},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left[-\frac{\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{1/2}}{x^{1/3}}\right]^2=\frac{\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)}{x^{2/3}}=\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}-1.$$

$$L=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}-1}\,dx=4\int_0^a\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx=4a^{1/3}\int_0^a x^{-1/3}dx=4a^{1/3}\left(\frac{x^{2/3}}{2/3}\right)\Bigg|_0^a=4a^{1/3}\cdot\frac{3}{2}\cdot a^{2/3}=6a.$$

Пример. Найти длину астроиды

$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

- **Решение.** Воспользуемся формулой $l = \int\limits_L dl.$

В нашем случае $x_t' = -3a\cos^2 t\sin t,$

$$y_t' = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$dl = 3a\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3a \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \frac{3}{2} a \sin 2t\,dt.$$

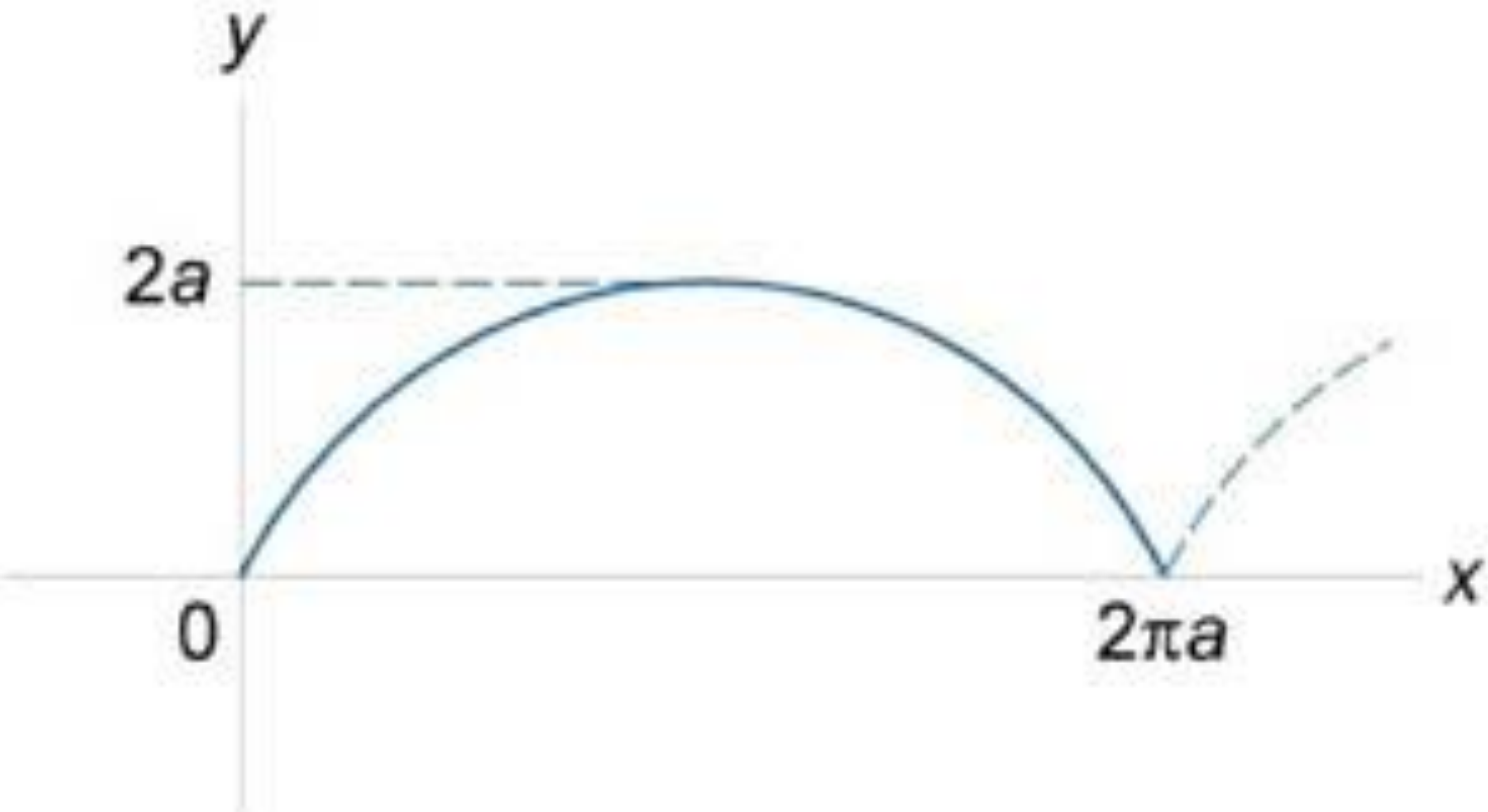
Поскольку кривая симметрична относительно осей координат, то

$$l = 4\int_{0}^{\pi/2} \frac{3}{2} a \sin 2t\,dt = 6a\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_{0}^{\pi/2} = 6a.$$

- **Пример.** Найти длину циклоиды, заданной в параметрическом виде вектором

$$\vec{r}(t) = \left(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\right)$$

в интервале $0 \le t \le 2\pi$



y
2a
x
0
2πa

Решение. Воспользуемся формулой

$$L = \int_C ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

- Производные:

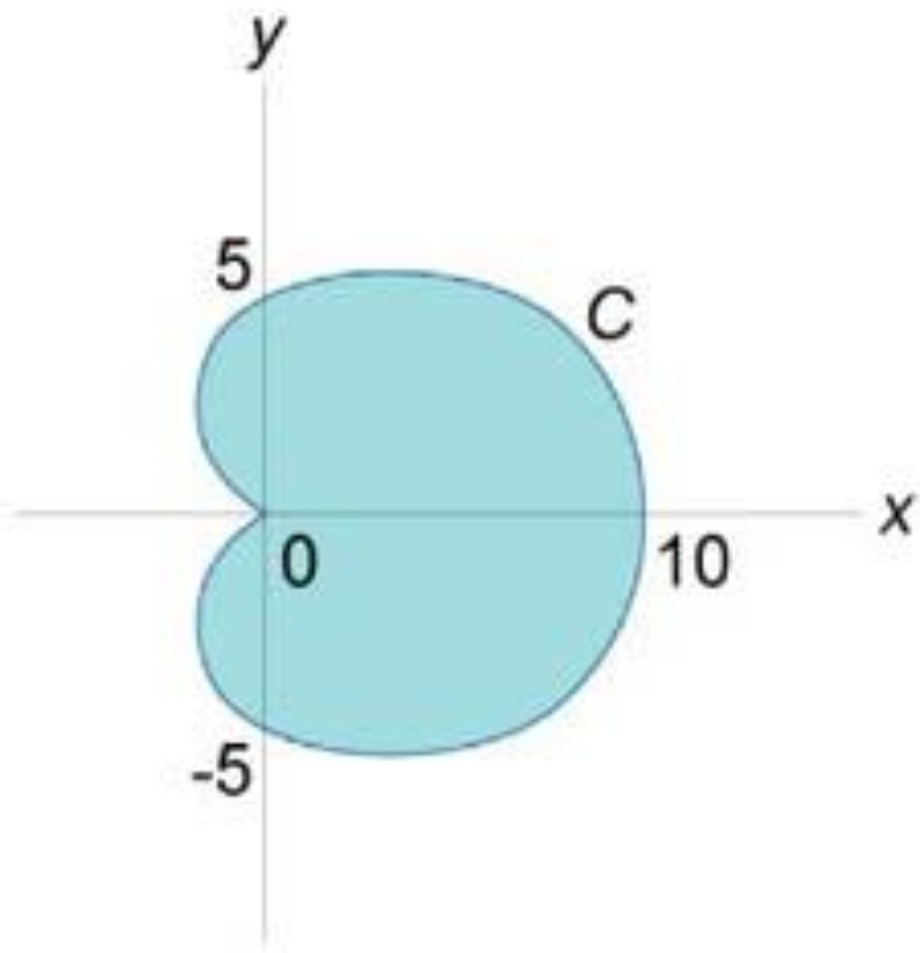
$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\left(a\left(t - \sin t\right)\right)}{dt} = a\left(1 - \cos t\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\left(a\left(1 - \cos t\right)\right)}{dt} = a \sin t.$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{\left(a\left(1-\cos t\right)\right)^2 + \left(a\sin t\right)^2}\,dt = a\int_0^2 \sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = a\int_0^2 \sqrt{2-2\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{1-\cos t}\,dt =$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = 2a\int_0^2 \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left(-\frac{\cos\frac{t}{2}}{1/2}\right)\Bigg|_{t=0}^{2\pi} = 4a\left(-\cos\pi+\cos 0\right) = 8a.$$

- **Пример.** Найти длину кардиоиды, заданной в полярных координатах уравнением $r = 5(1+\cos\theta)$



y
5
C
x
0
10
-5

- *Решение.* Используем соотношение $$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

  В силу симметрии кардиоиды достаточно найти половину ее длины, а затем удвоить полученный результат.

$$r'_\theta = \frac{dr}{d\theta} = (5(1+\cos\theta))'_\theta = -5\sin\theta$$

Длина кардиоиды выражается в виде

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(5(1+\cos\theta))^2 + (-5\sin\theta)^2}\, d\theta =$$

$$= 5\int_0^{\pi} \sqrt{1+2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta =$$

$$= 5\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta = 5\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta =$$

$$= 5\int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2\cos^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta = 10\int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

Так как $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$ при $0 \leq \theta \leq \pi$, то

$$\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \cos\frac{\theta}{2}$$

Окончательно находим длину:

$$L = 10\int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta = 10\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

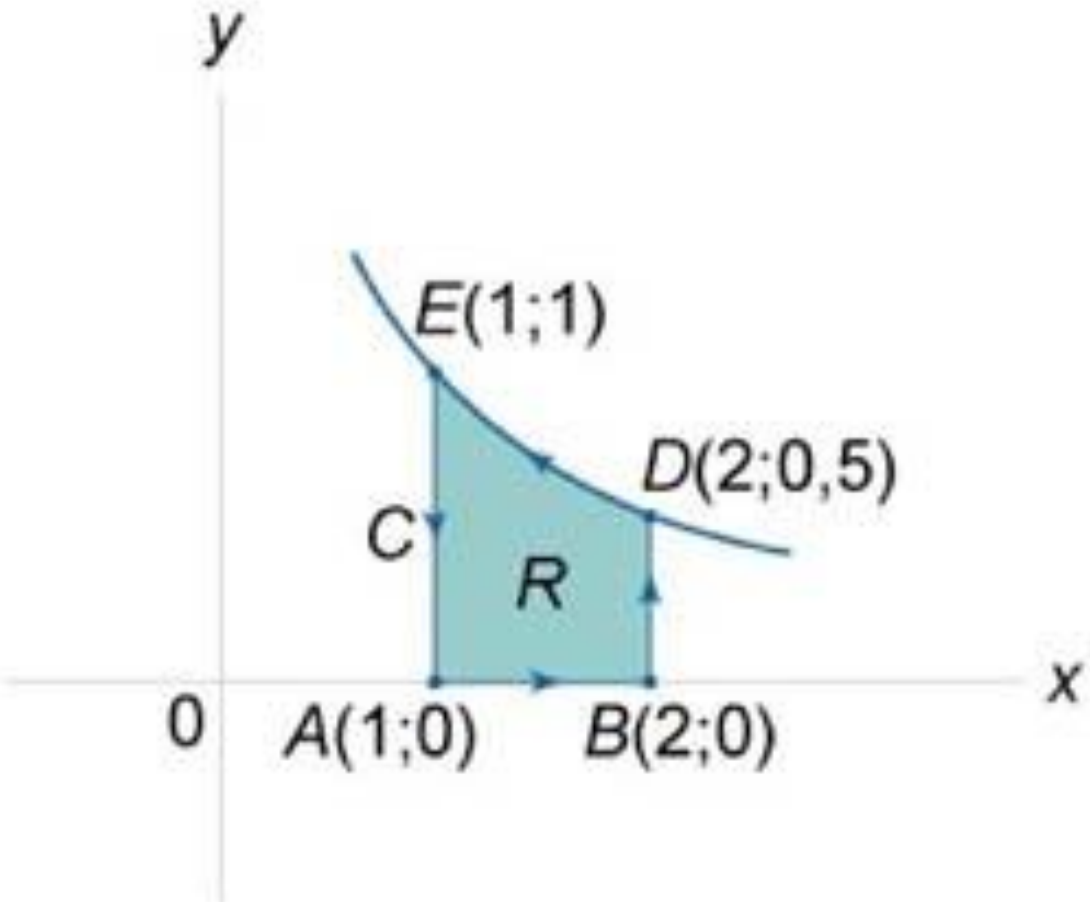
$$= 20\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\frac{\theta}{2} = 20\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= 20\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 20(1-0) = 20$$

- Длина всей кардиоиды равна

$$2L = 2 \cdot 20 = 40$$

- **Пример.** Найти площадь области, ограниченной гиперболой $y = 1/x$, осью Оx и вертикальными прямыми $x = 1$, $x = 2$.


y
E(1;1)
D(2;0,5)
C
R
0
A(1;0)
B(2;0)
x

- *Решение.* Вычислим площадь с помощью криволинейного интеграла.

$$S = -\oint\limits_{C} y dx = -\int\limits_{AB} y dx - \int\limits_{BD} y dx - \int\limits_{DE} y dx - \int\limits_{EA} y dx.$$

Найдем отдельно каждый из интегралов.

$$-\int_{AB} y\,dx = -\int_1^2 0\cdot dx = 0,$$

$$-\int_{BD} y\,dx = -\int_0^0 y\,dx = 0,$$

$$-\int_{DE} y\,dx = -\int_2^1 \frac{dx}{x} = \left(-\ln x\right)\Big|_2^1 = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2,$$

$$-\int_{EA} y\,dx = -\int_0^0 y\,dx = 0.$$

- Следовательно, площадь заданной области равна

$$S = \ln 2.$$

- **Пример.** Найти статические моменты дуги однородной астроиды

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \left(x \geq 0,\ \ y \geq 0\right)$$

относительно осей координат.

- **Решение.** Дуга астроиды однородна, следовательно, плотность в каждой точке постоянна. Пусть $\mu = \mu_0$. Запишем уравнение астроиды в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$$

- где $x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$x_t' = -3a\cos^2 t\sin t, y_t' = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt,$$

$$dl = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\left|\sin t\cos t\right|\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = 3a\left|\sin t\cos t\right|dt.$$

- По условию

$$0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \sin t \ge 0, \ \cos t \ge 0,$$

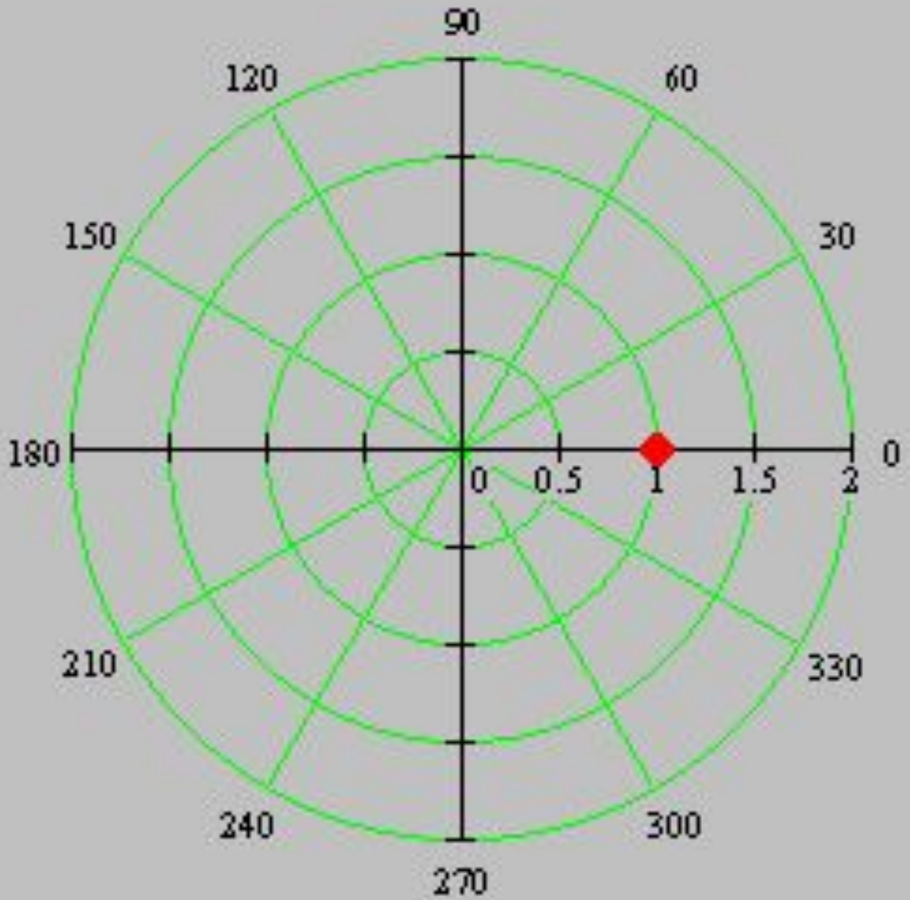
следовательно,

$dl = 3a \sin t \cos t \, dt$

$$M_x = 3a^2\mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\, dt = 3a^2\mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, d\sin t = 3a^2\mu_0 \left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}a^2\mu_0;$$

$$M_y = 3a^2\mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t\, dt = -3a^2\mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, d\cos t = -3a^2\mu_0 \left.\frac{\cos^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}a^2\mu_0.$$

$r(\theta) := \sin(\theta) + 1$



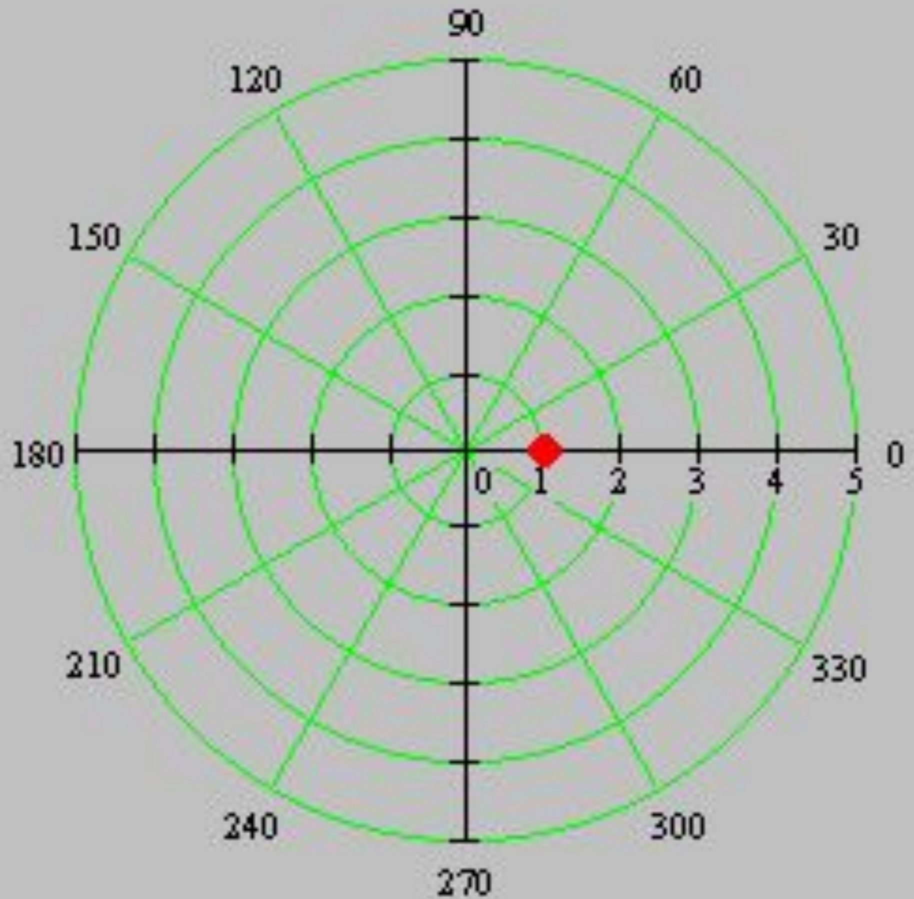
Radians **Degrees**

$\theta = 0$ $\theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0$ $r(\theta) = 1$

- Построим кривую

$$r(\theta) = 3 - 2\cos\theta$$

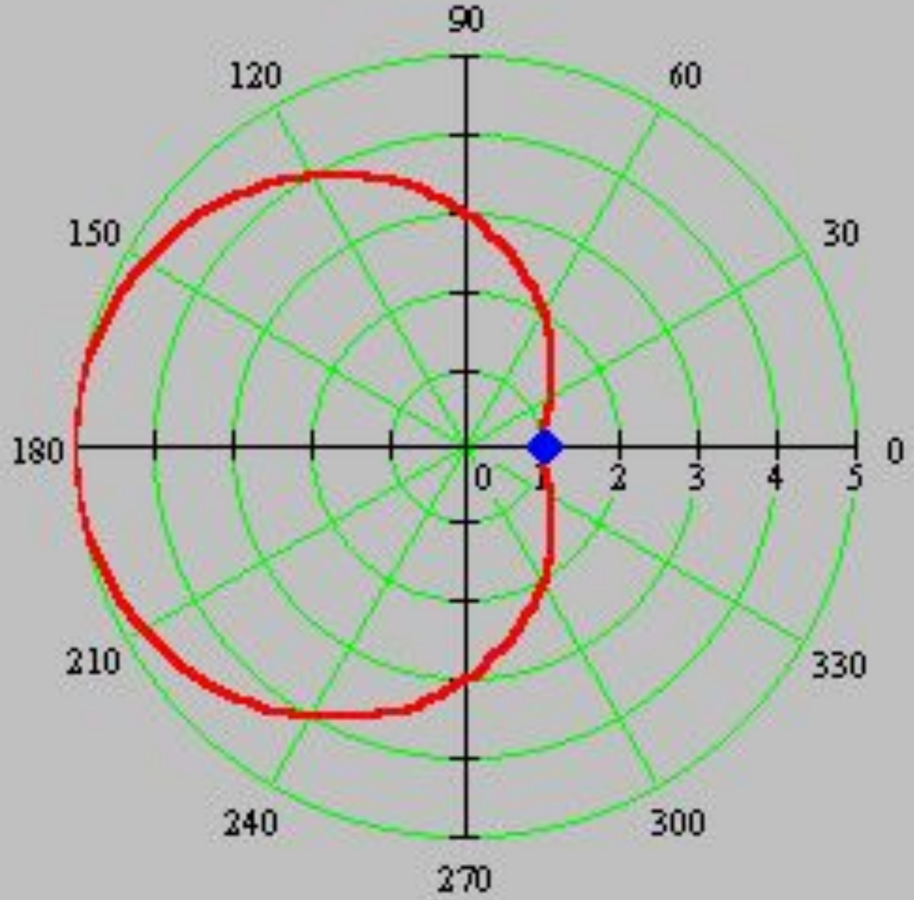
$r(\theta) := 3 - 2 \cdot \cos(\theta)$



Radians **Degrees**

$\theta = 0$ $\theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0$ $r(\theta) = 1$

$r(\theta) := 3 - 2 \cdot \cos(\theta)$

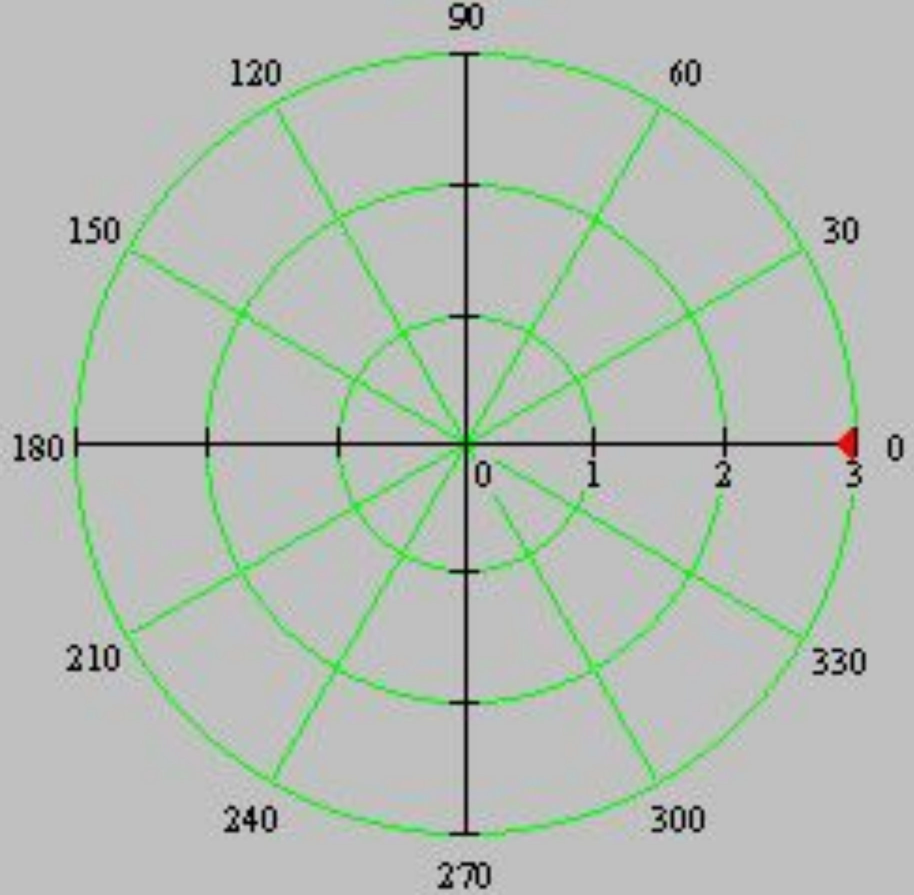


Radians	Degrees	
θ	$\theta \cdot \frac{180}{\pi}$	$r(\theta)$
0	0	1
0.524	30	1.268
1.047	60	2
1.571	90	3
2.094	120	4
2.618	150	4.732
3.142	180	5
3.665	210	4.732
4.189	240	4
4.712	270	3
5.236	300	2
5.76	330	1.268
6.283	360	1

- Построим кривую

$$r(\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

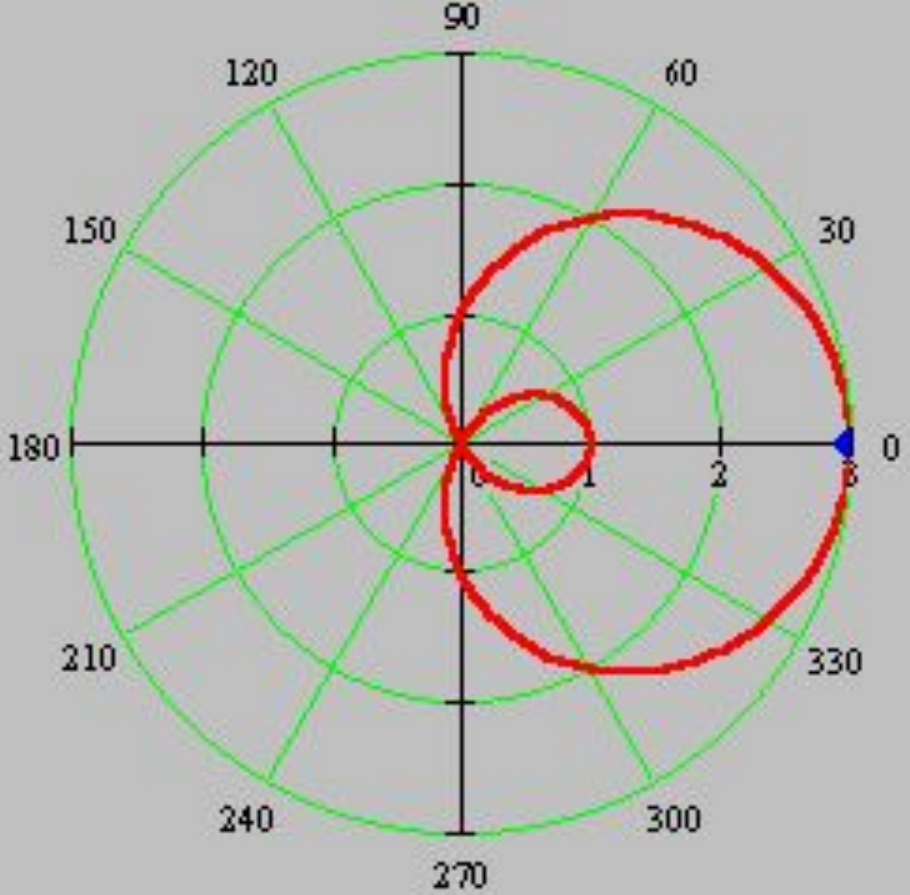
$r(\theta) := 1 + 2\cdot\cos(\theta)$



Radians **Degrees**

$\theta = 0$ $\theta\cdot\frac{180}{\pi} = 0$ $r(\theta) = 3$

$r(\theta) := 1 + 2\cdot\cos(\theta)$



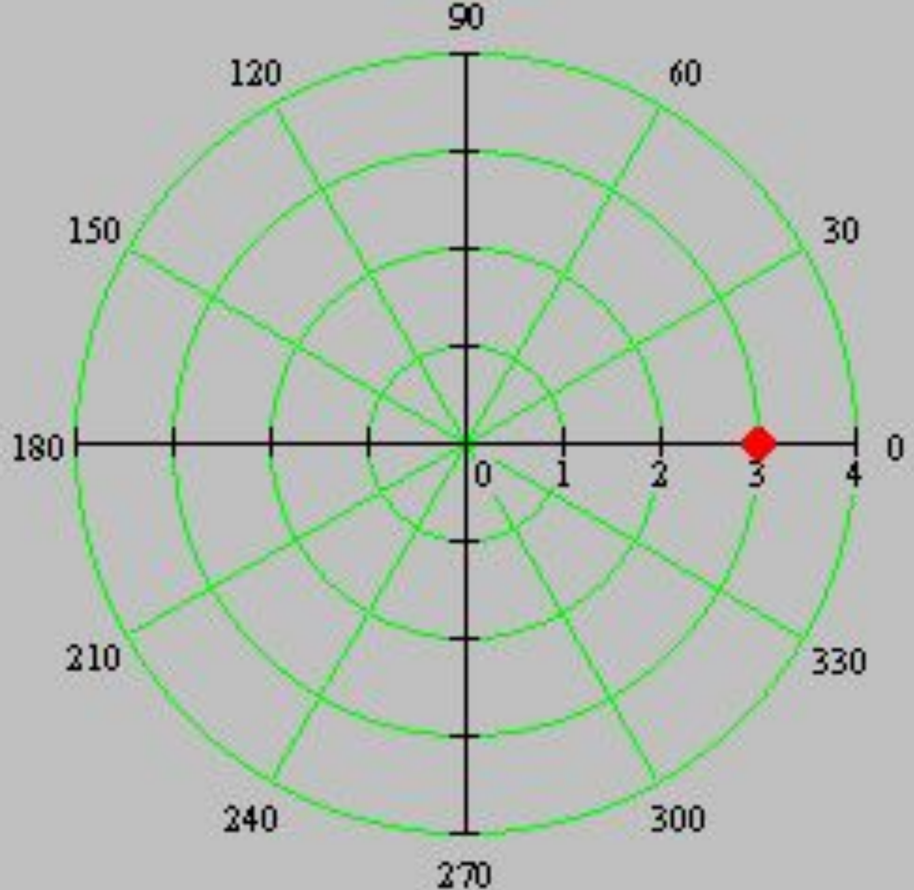
Radians **Degrees**

θ	$\theta\cdot\frac{180}{\pi}$	$r(\theta)$
0	0	3
0.524	30	2.732
1.047	60	2
1.571	90	1
2.094	120	0
2.618	150	-0.732
3.142	180	-1
3.665	210	-0.732
4.189	240	0
4.712	270	1
5.236	300	2
5.76	330	2.732
6.283	360	3

- Построим кривую

$$r(\theta) = 3 - \sin\theta$$

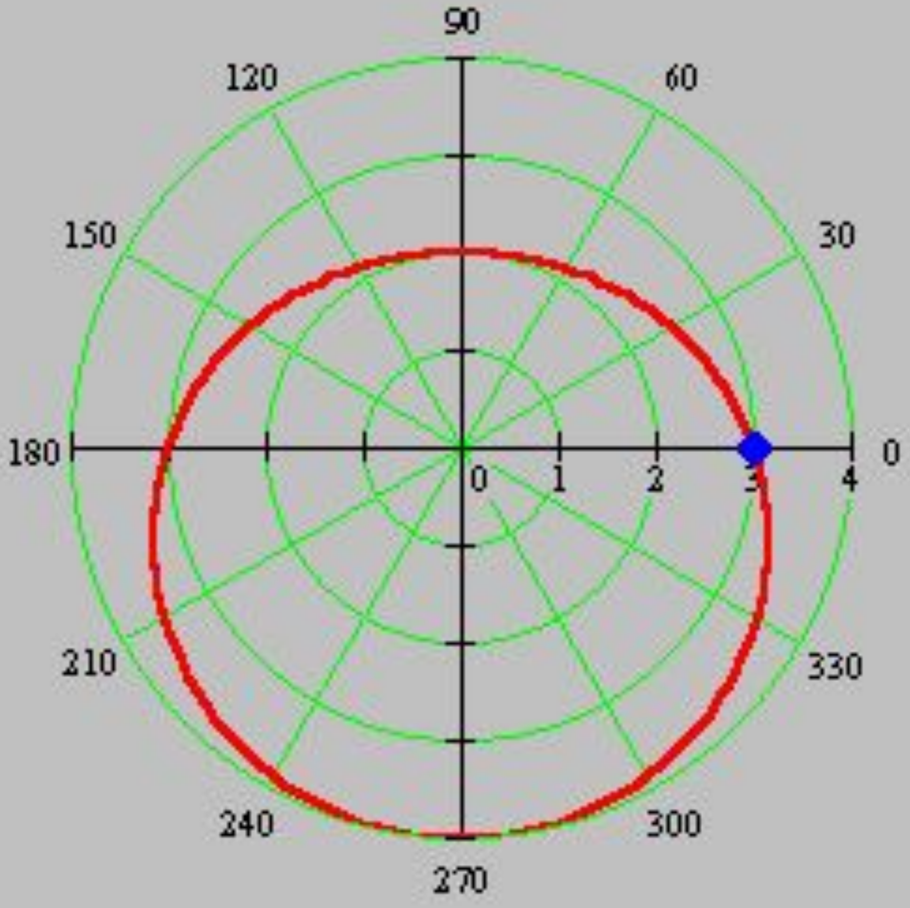
$r(\theta) := 3 - \sin(\theta)$



Radians **Degrees**

$\theta = 0$ $\theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0$ $r(\theta) = 3$

$r(\theta) := 3 - \sin(\theta)$



Radians **Degrees**

θ	$\theta \cdot \frac{180}{\pi}$	$r(\theta)$
0	0	3
0.524	30	2.5
1.047	60	2.134
1.571	90	2
2.094	120	2.134
2.618	150	2.5
3.142	180	3
3.665	210	3.5
4.189	240	3.866
4.712	270	4
5.236	300	3.866
5.76	330	3.5
6.283	360	3

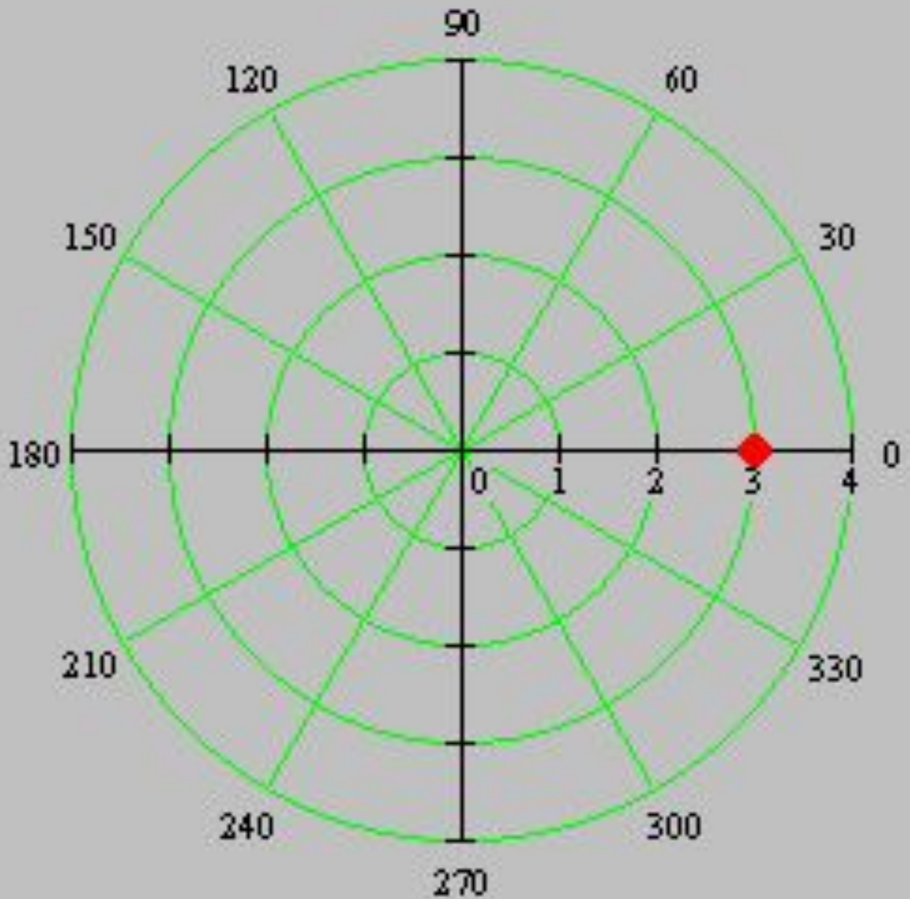
- Построим кривую

$$r(\theta) = 3\cos(3\theta)$$

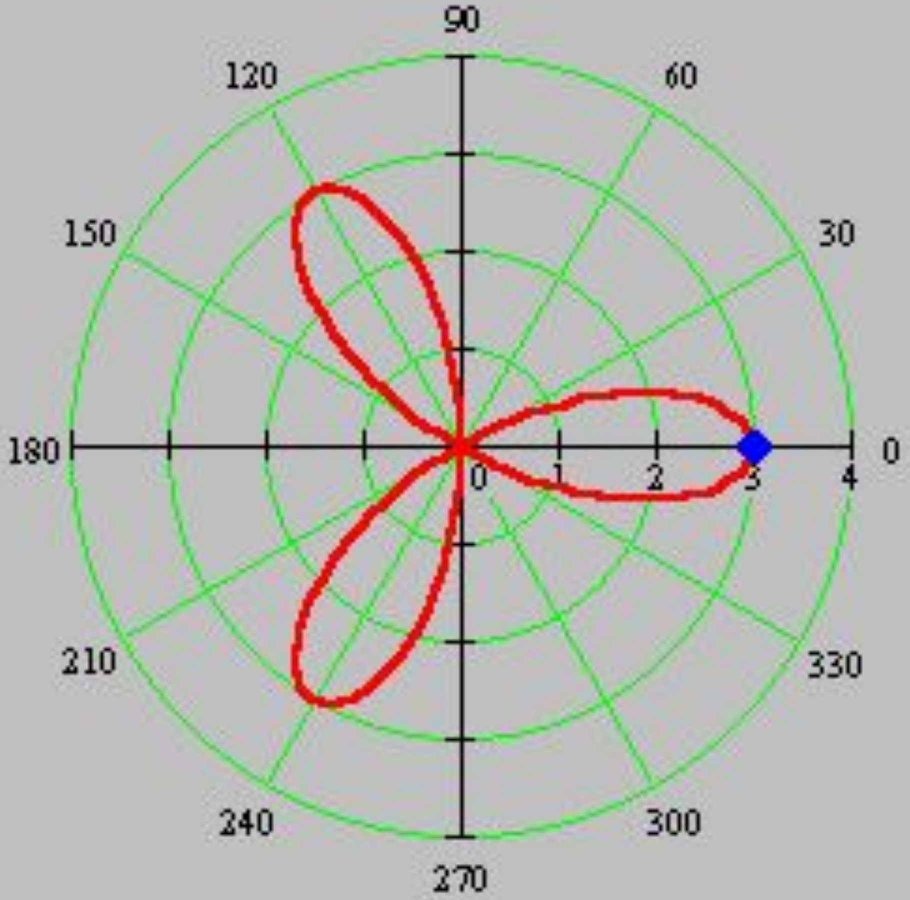
$r(\theta) := 3\cdot\cos(3\cdot\theta)$

Radians **Degrees**

$\theta = 0$ $\theta\cdot\frac{180}{\pi} = 0$ $r(\theta) = 3$



$r(\theta) := 3 \cdot \cos(3 \cdot \theta)$



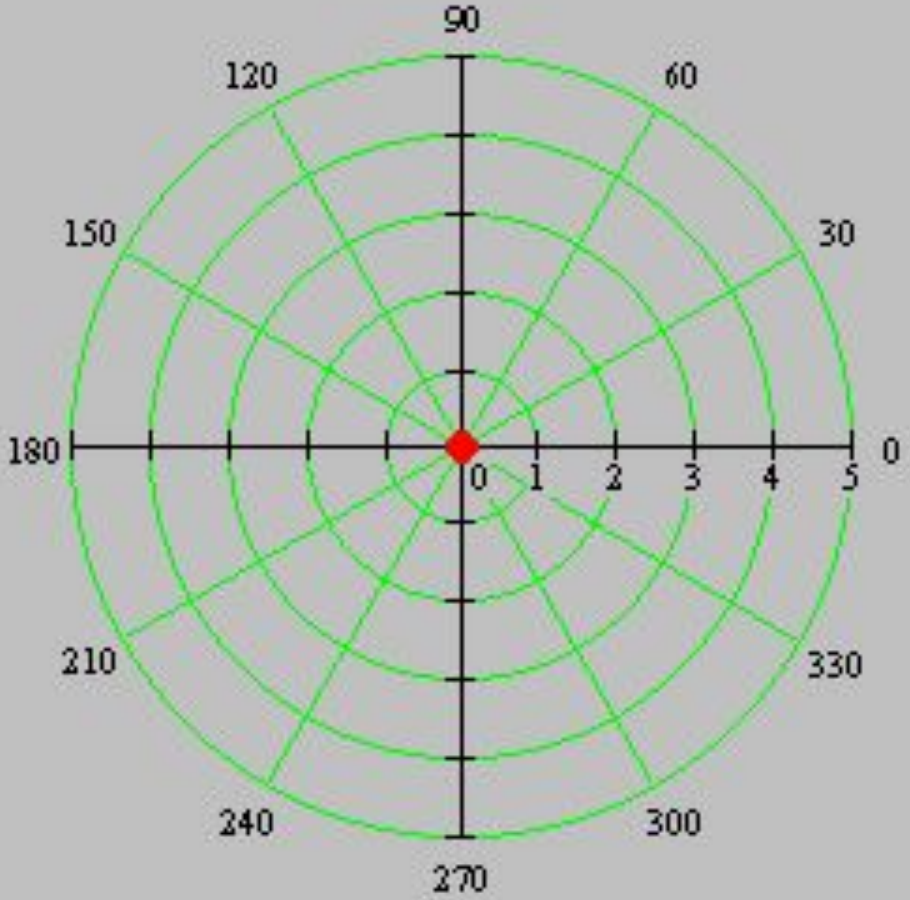
Radians **Degrees**

θ	$\theta \cdot \frac{180}{\pi}$	$r(\theta)$
0	0	3
0.262	15	2.121
0.524	30	0
0.785	45	-2.121
1.047	60	-3
1.309	75	-2.121
1.571	90	0
1.833	105	2.121
2.094	120	3
2.356	135	2.121
2.618	150	0
2.88	165	-2.121
3.142	180	-3

- Построим кривую

$$r(\theta) = 5 \sin (2\theta)$$

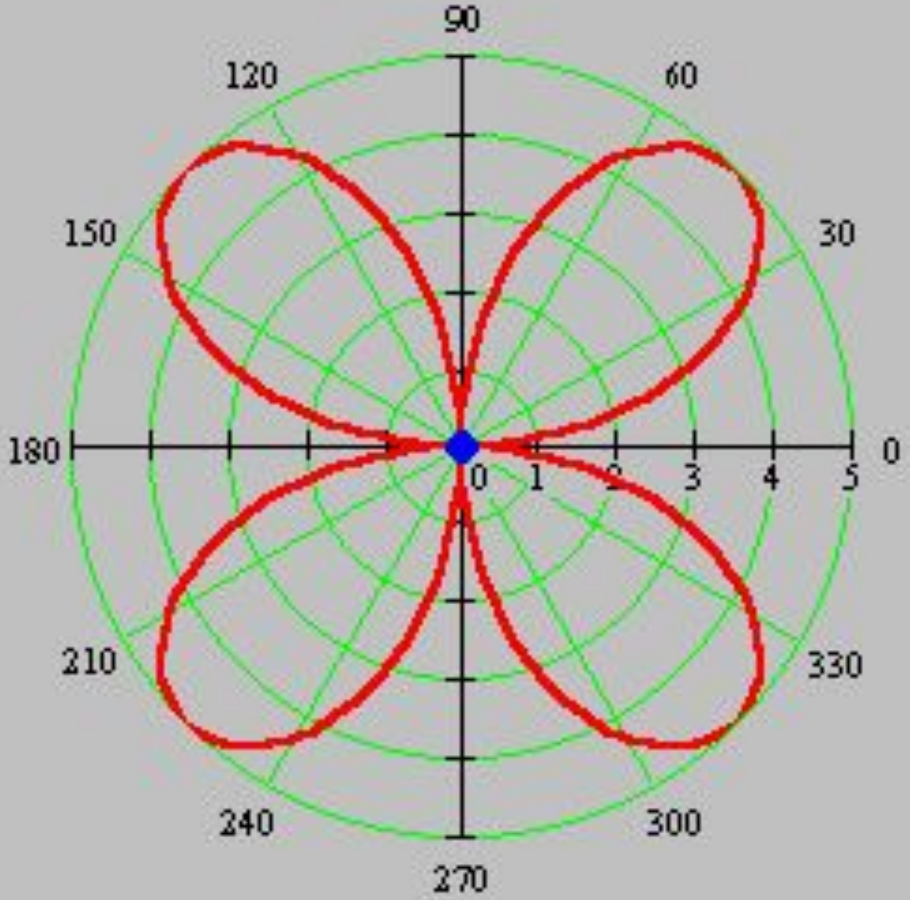
$r(\theta) := 5 \cdot \sin(2 \cdot \theta)$



Radians **Degrees**

$\theta = 0$ $\theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0$ $r(\theta) = 0$

$r(\theta) := 5 \cdot \sin(2 \cdot \theta)$

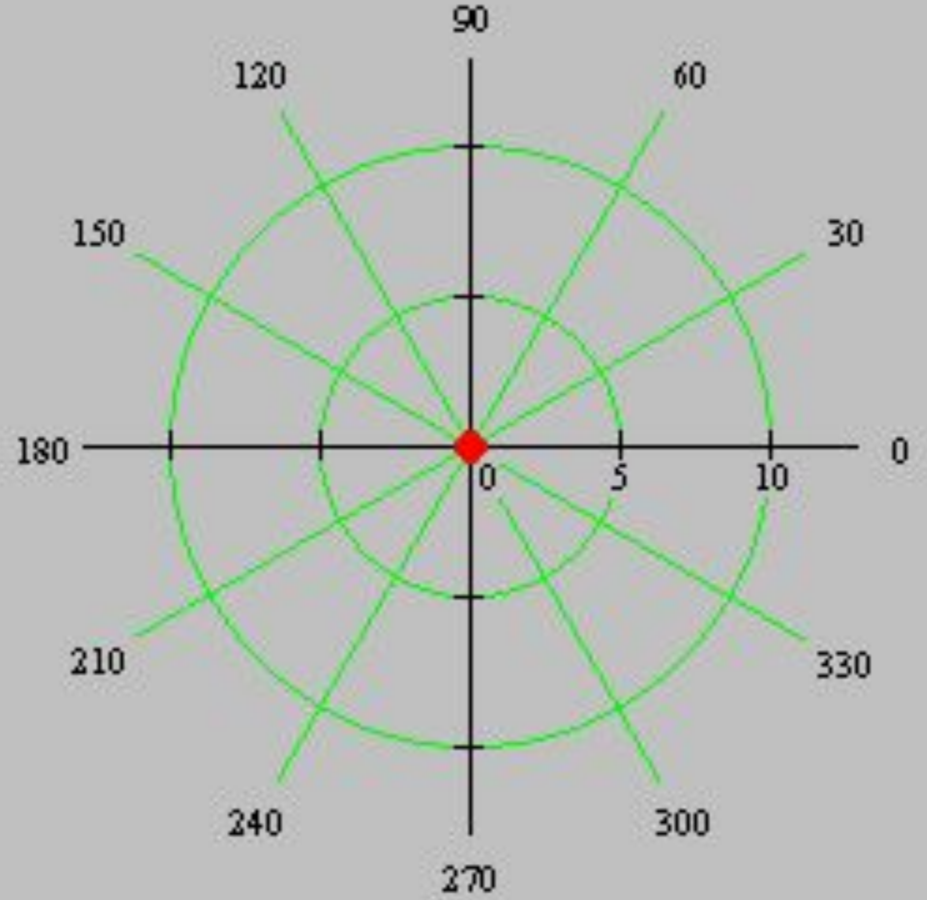


Radians	Degrees	
θ	$\theta \cdot \frac{180}{\pi}$	$r(\theta)$
0	0	0
0.785	45	5
1.571	90	0
2.356	135	-5
3.142	180	0
3.927	225	5
4.712	270	0
5.498	315	-5
6.283	360	0

- Построим кривую

$$r(\theta) = \theta$$

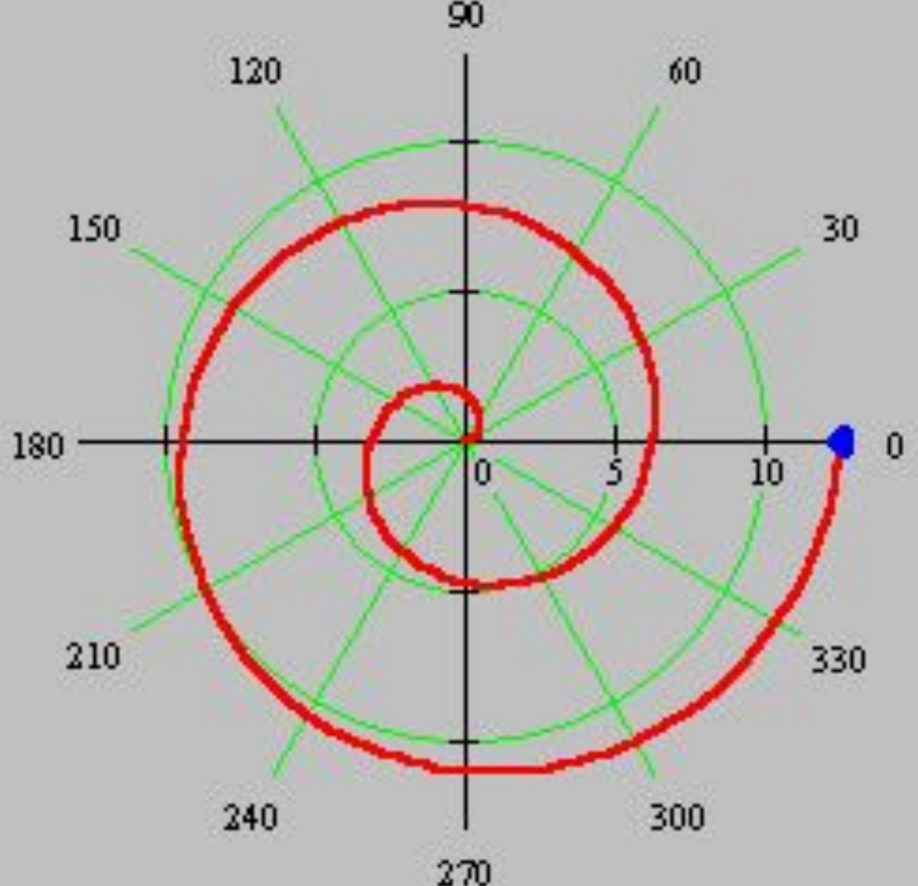
$r(\theta) := \theta$



Radians **Degrees**

$\theta = 0$ $\theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0$ $r(\theta) = 0$

$r(\theta) := \theta$



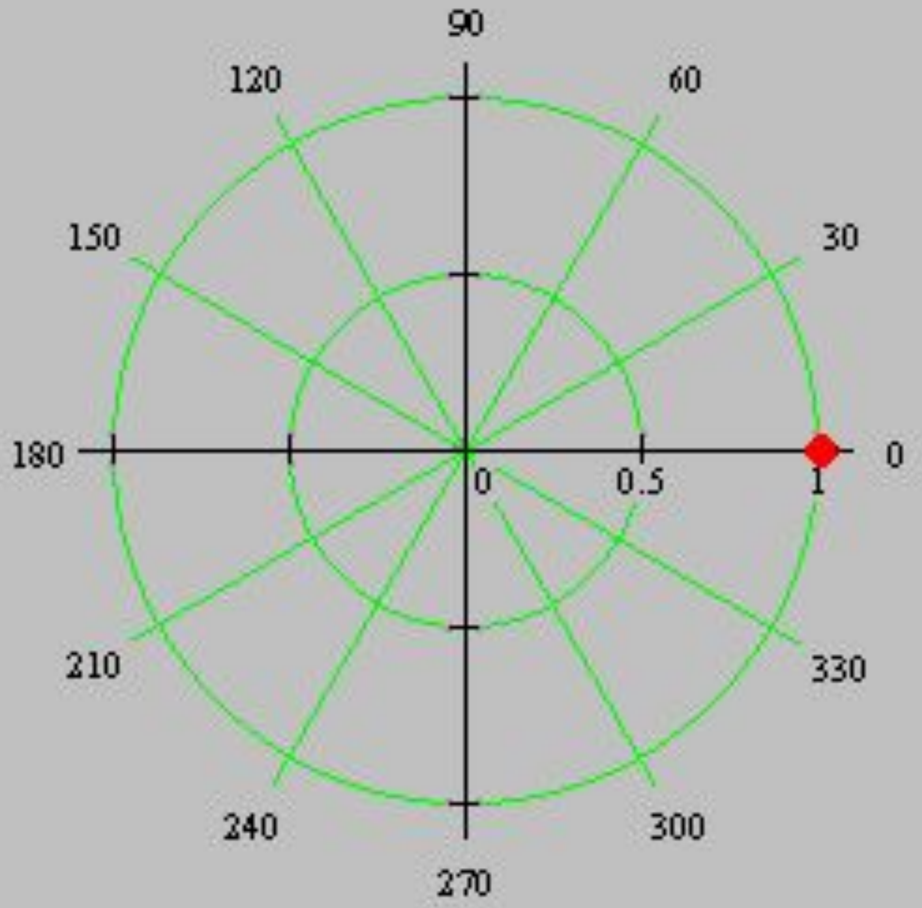
Radians **Degrees**

θ	$\theta \cdot \frac{180}{\pi}$	$r(\theta)$
0	0	0
1.571	90	1.571
3.142	180	3.142
4.712	270	4.712
6.283	360	6.283
7.854	450	7.854
9.425	540	9.425
10.996	630	10.996
12.566	720	12.566

- Построим кривую

$$r(\theta) = \cos \theta$$

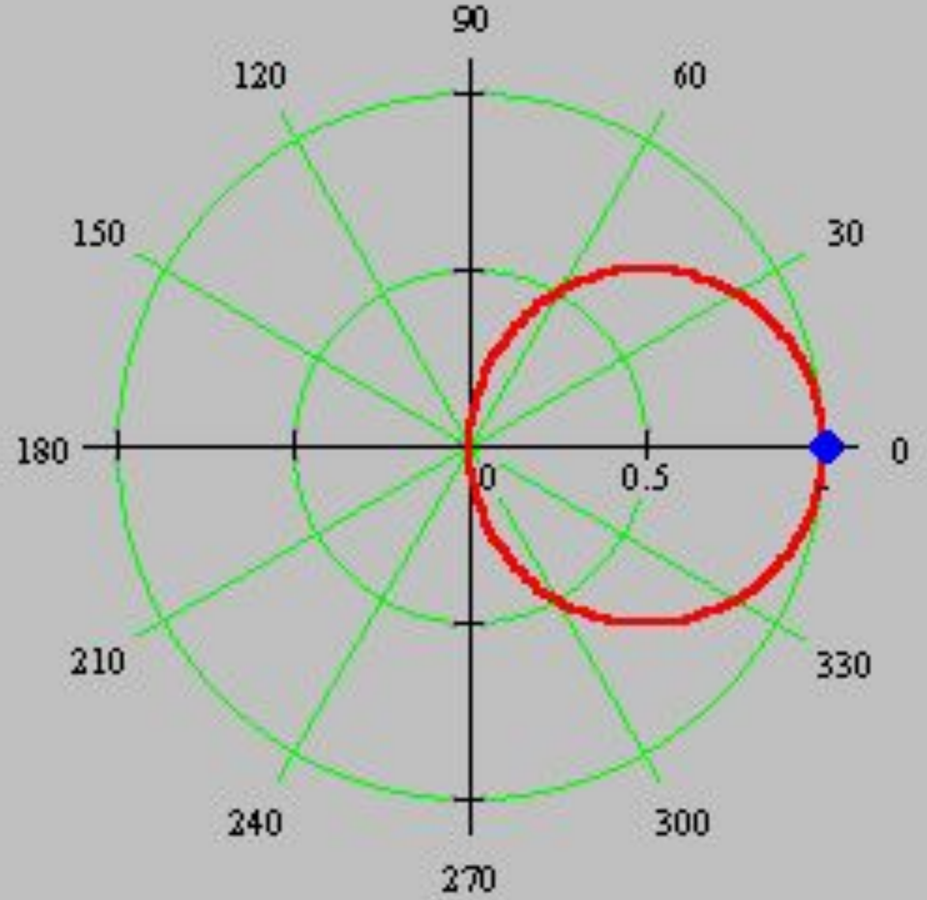
$r(\theta) := \cos(\theta)$



Radians **Degrees**

$\theta = 0$ $\theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0$ $r(\theta) = 1$

$r(\theta) := \cos(\theta)$



Radians Degrees

θ	$\theta \cdot \frac{180}{\pi}$	$r(\theta)$
0	0	1
0.262	15	0.966
0.524	30	0.866
0.785	45	0.707
1.047	60	0.5
1.309	75	0.259
1.571	90	0
1.833	105	-0.259
2.094	120	-0.5
2.356	135	-0.707
2.618	150	-0.866
2.88	165	-0.966
3.142	180	-1