

Приложения криволинейных
интегралов в геометрии и
механике

1) Длина кривой.

Если подынтегральная функция $f(x, y, z) \equiv 1$, то из определения КРИ-1 следует, что он равен длине кривой, по которой ведется интегрирование:

$$l = \int_l ds.$$

2) Масса кривой.

Если подынтегральная функция $\gamma(x, y, z)$ определяет плотность в каждой точке кривой, то массу кривой можно найти по формуле

$$M = \int_l \gamma(x, y, z) ds.$$

- 3) Моменты кривой Γ :

статические моменты плоской кривой Γ относительно осей Ox и Oy :

$$M_x = \int_l y \gamma(x, y) ds, M_y = \int_l x \gamma(x, y, z) ds$$

момент инерции
пространственной кривой
относительно начала координат:

$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

моменты инерции кривой
относительно координатных
осей:

$$I_x = \int_l (y^2 + z^2) ds, I_y = \int_l (x^2 + z^2) ds, I_z = \int_l (x^2 + y^2) ds$$

4) Координаты центра масс кривой вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\int x \gamma(x, y, z) ds}{M}, y_c = \frac{\int y \gamma(x, y, z) ds}{M},$$

$$z_c = \frac{\int z \gamma(x, y, z) ds}{M}$$

- 5) Работа силы $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, действующей на точку, движущуюся по кривой (AB):

$$\int_{(AB)} P dx + Q dy + R dz = \int_{(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Пример. Найти массу кривой с линейной плотностью $\gamma = \frac{\rho}{2}$, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = 4\varphi$, где

$$-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

• Решение.

$$M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \gamma(\rho(\varphi), \varphi) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{4\varphi}{2} \cdot 4\sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi =$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{\varphi^2 + 1} d(\varphi^2 + 1) = \frac{8}{3} (\varphi^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{8}{81} \left((4\pi^2 + 9)^{\frac{3}{2}} - (\pi^2 + 9)^{\frac{3}{2}} \right).$$

- **Пример.** Вычислить работу векторного поля $\vec{F} = \{x^2y^3, y^2z^3, xyz\}$ вдоль отрезка прямой от точки A (-2;-3;1) до точки B(1;4;2).

- Решение. Найдем канонические и параметрические уравнения прямой АВ:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = t \Rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-1}{1} = t,$$

$$\begin{cases} x = 3t - 2, & dx = 3dt; \\ y = 7t - 3, & dy = 7dt; \\ z = t + 1, & dz = dt. \end{cases} \quad (t(A) = 0, \quad t(B) = 1)$$

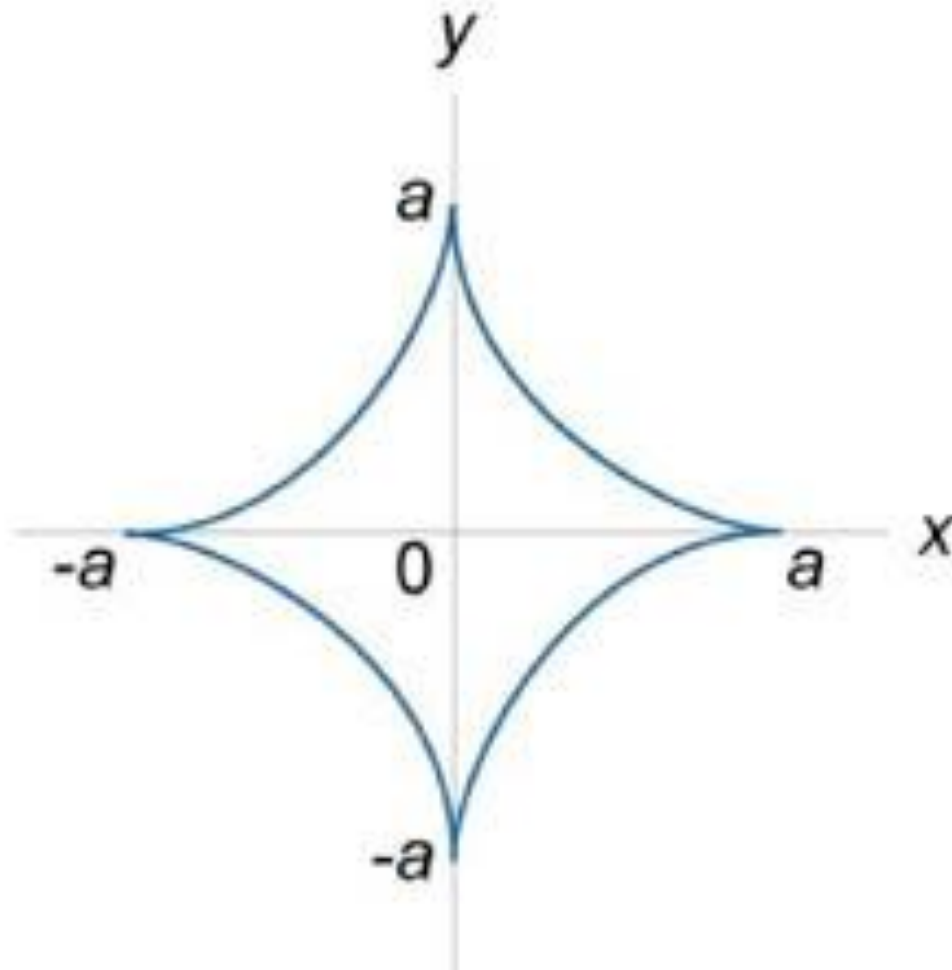
$$A = \int_{(AB)} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{(AB)} x^2 y^3 dx + y^2 z^3 dy + xyz dz =$$

$$= \int_0^1 \left(3(3t-2)^2 (7t-3)^3 + 7(7t-3)^2 (t+1)^3 + (3t-2)(7t-3)(t+1) \right) dt =$$

$$\int_0^1 (9604t^5 - 6056t^4 + 25305t^3 - 8177t^2 + 993t - 261) dt =$$

$$= \left(\frac{9604t^6}{6} - \frac{6056t^5}{5} + \frac{25305t^4}{4} - \frac{8177t^3}{3} + \frac{993t^2}{2} - 261t \right) \Big|_0^1 = 4225,55.$$

Пример. Вычислить длину
астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$



- *Решение.* В силу симметрии, достаточно вычислить длину кривой, лежащей в первом квадранте, и затем умножить результат на 4. Уравнение астроида в первом квадранте имеет вид

$$y = \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^{3/2}, \text{ где } x \in [0, a].$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^{1/2} \left(-\frac{2}{3} x^{-1/3} \right) = -\frac{\left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^{1/2}}{x^{1/3}},$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \left[-\frac{\left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^{1/2}}{x^{1/3}} \right]^2 = \frac{\left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)}{x^{2/3}} = \frac{a^{2/3}}{x^{2/3}} - 1.$$

$$L = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{a^{2/3}}{x^{2/3}} - 1} dx = 4 \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = 4a^{1/3} \int_0^a x^{-1/3} dx = 4a^{1/3} \left(\frac{x^{2/3}}{2/3} \right) \Big|_0^a = 4a^{1/3} \cdot \frac{3}{2} \cdot a^{2/3} = 6a.$$

Пример. Найти длину астроида

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$$

• **Решение.** Воспользуемся формулой $l = \int_L dl$.

В нашем случае $x'_t = -3a \cos^2 t \sin t$,

$$y'_t = 3a \sin^2 t \cos t,$$

$$\begin{aligned} dl &= 3a \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 3a \cos t \sin t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \frac{3}{2} a \sin 2t dt. \end{aligned}$$

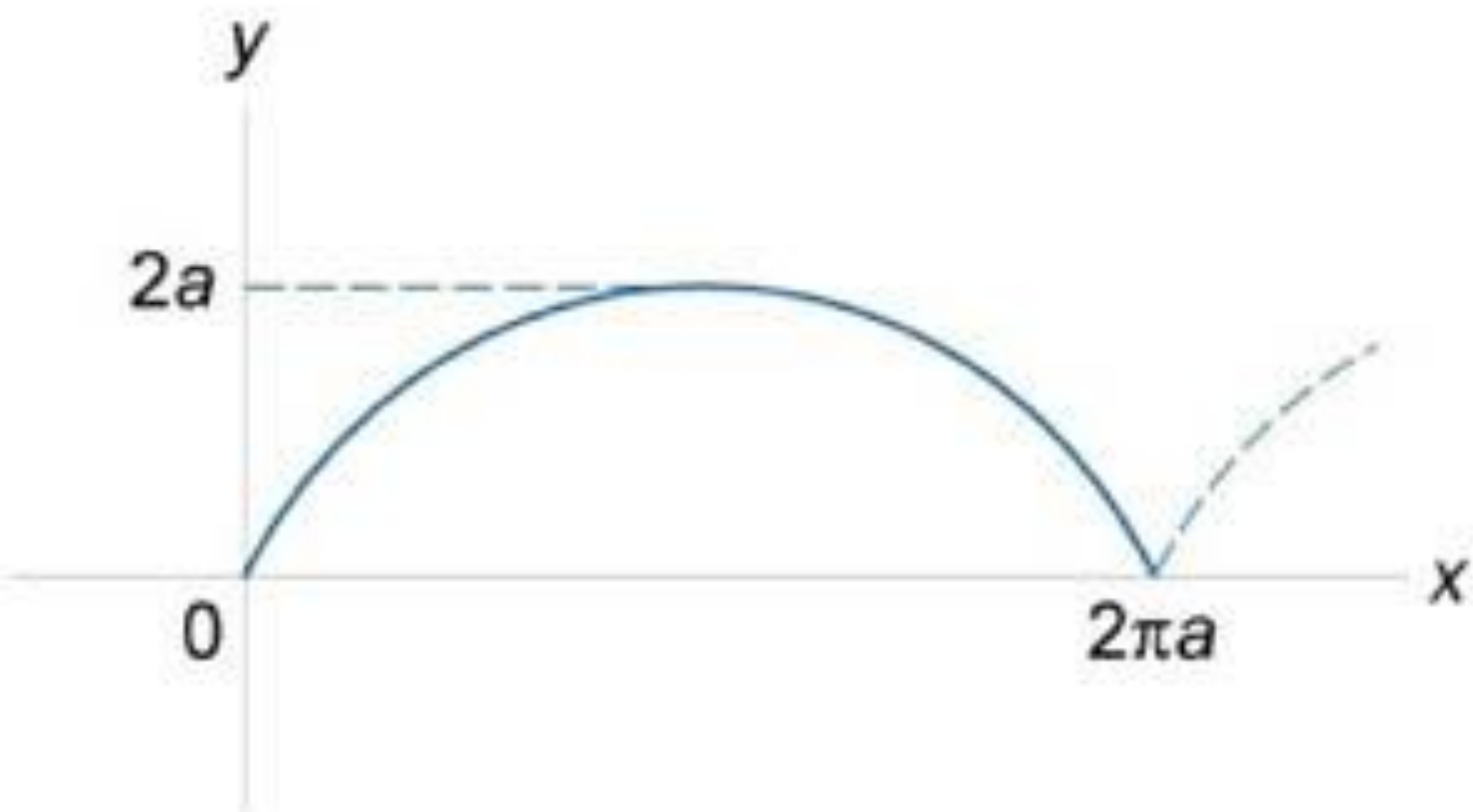
Поскольку кривая симметрична относительно осей координат, то

$$l = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} a \sin 2t dt = 6a \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6a.$$

- **Пример.** Найти длину циклоиды, заданной в параметрическом виде вектором

$$\vec{r}(t) = (\alpha(t - \sin t), \alpha(1 - \cos t))$$

в интервале $0 \leq t \leq 2\pi$



Решение. Воспользуемся формулой

$$L = \int_C ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

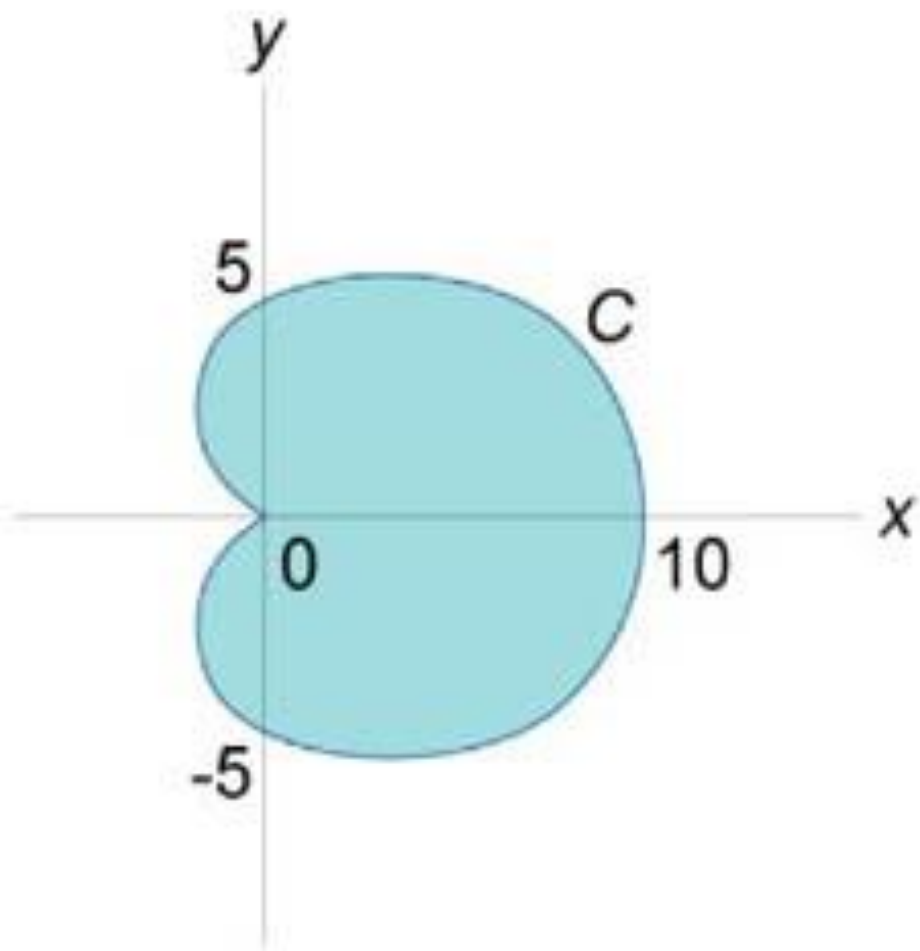
- Производные:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(a(t - \sin t))}{dt} = a(1 - \cos t),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(a(1 - \cos t))}{dt} = a \sin t.$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1-\cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \left(\frac{t}{2}\right)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left(-\frac{\cos \frac{t}{2}}{1/2} \right) \Bigg|_{t=0}^{2\pi} = 4a(-\cos \pi + \cos 0) = 8a. \end{aligned}$$

- **Пример.** Найти длину кардиоиды, заданной в полярных координатах уравнением $r = 5(1 + \cos \theta)$



- *Решение.* Используем соотношение

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

В силу симметрии кардиоиды достаточно найти половину ее длины, а затем удвоить полученный результат.

$$r'_\theta = \frac{dr}{d\theta} = (5(1 + \cos \theta))'_\theta = -5 \sin \theta$$

Длина кардиоиды выражается в виде

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi} \sqrt{(5(1 + \cos \theta))^2 + (-5 \sin \theta)^2} d\theta = \\ &= 5 \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta = \\ &= 5 \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta = 5 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = \end{aligned}$$

$$= 5 \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 10 \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

Так как $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ при $0 \leq \theta \leq \pi$, то

$$\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \cos \frac{\theta}{2}$$

Окончательно находим длину:

$$L = 10 \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 10 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta =$$

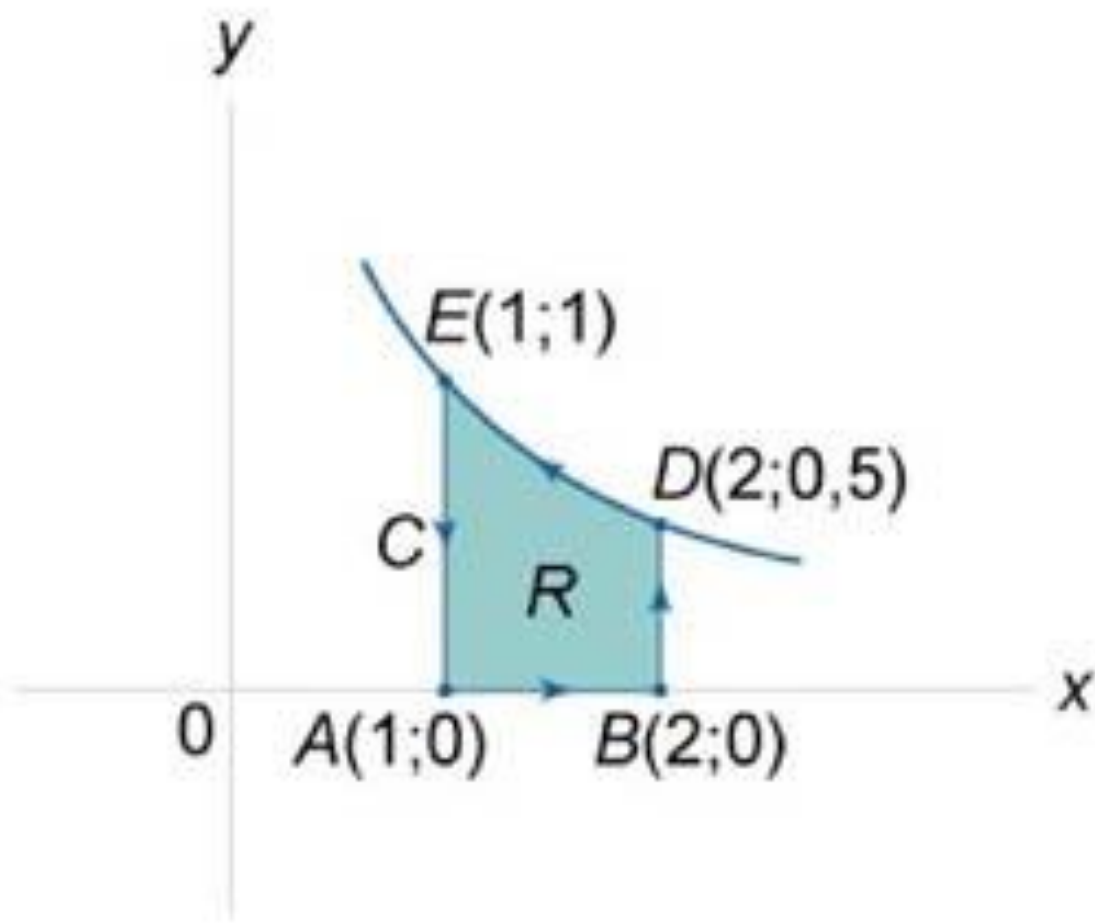
$$= 20 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d \frac{\theta}{2} = 20 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= 20 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 20(1 - 0) = 20$$

- Длина всей кардиоиды равна

$$2L = 2 \cdot 20 = 40$$

- **Пример.** Найти площадь области, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью Ox и вертикальными прямыми $x = 1, x = 2$.



- *Решение.* Вычислим площадь с помощью криволинейного интеграла.

$$S = -\oint_C y dx = -\int_{AB} y dx - \int_{BD} y dx - \int_{DE} y dx - \int_{EA} y dx.$$

Найдем отдельно каждый из интегралов.

$$-\int_{AB} y dx = -\int_1^2 0 \cdot dx = 0,$$

$$-\int_{BD} y dx = -\int_0^0 y dx = 0,$$

$$-\int_{DE} y dx = -\int_2^1 \frac{dx}{x} = (-\ln x) \Big|_2^1 = -\ln 1 + \ln 2 = \ln 2,$$

$$-\int_{EA} y dx = -\int_0^0 y dx = 0.$$

- Следовательно, площадь заданной области равна

$$S = \ln 2.$$

- **Пример.** Найти статические моменты дуги однородной астроиды

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

относительно осей координат.

- **Решение.** Дуга астроида однородна, следовательно, плотность в каждой точке постоянна. Пусть $\mu = \mu_0$. Запишем уравнение астроида в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases}$$

- где $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$x'_t = -3a \cos^2 t \sin t, y'_t = 3a \sin^2 t \cos t,$$

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 3a |\sin t \cos t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 3a |\sin t \cos t| dt. \end{aligned}$$

- По условию

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \sin t \geq 0, \cos t \geq 0,$$

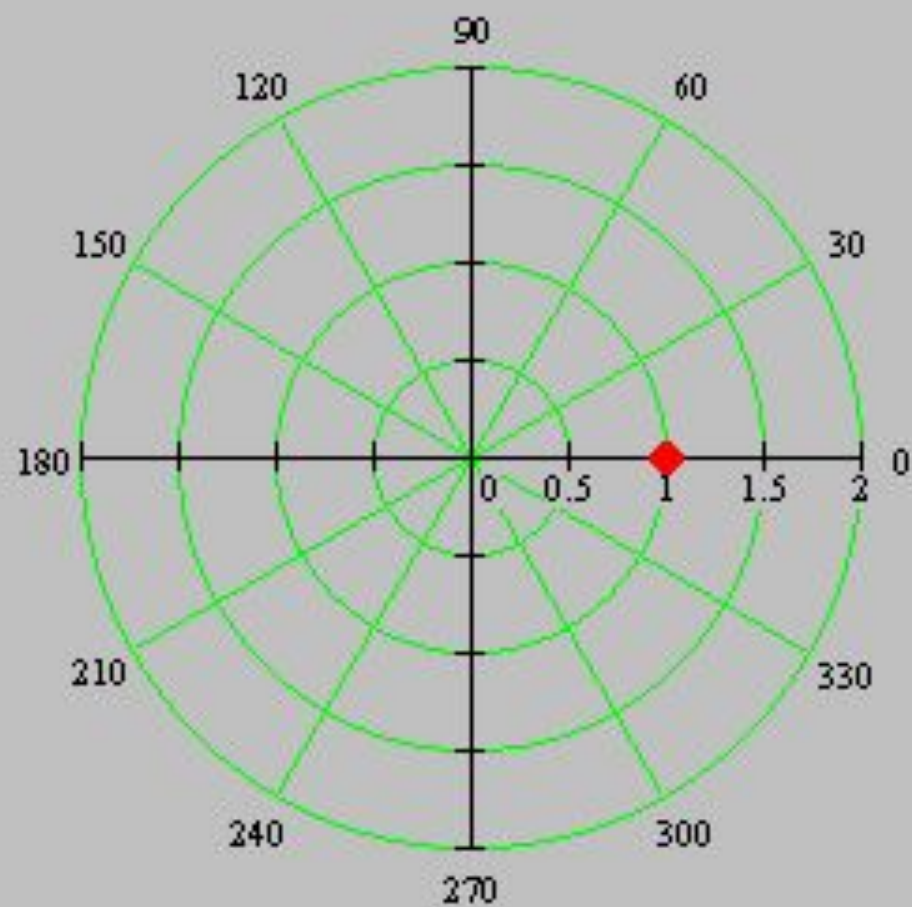
следовательно,

$$dl = 3a \sin t \cos t dt$$

$$M_x = 3a^2 \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = 3a^2 \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d' \sin t = 3a^2 \mu_0 \left. \frac{\sin^5 t}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5} a^2 \mu_0;$$

$$M_y = 3a^2 \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt = -3a^2 \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t d' \cos t = -3a^2 \mu_0 \left. \frac{\cos^5 t}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5} a^2 \mu_0.$$

$$r(\theta) := \sin(\theta) + 1$$



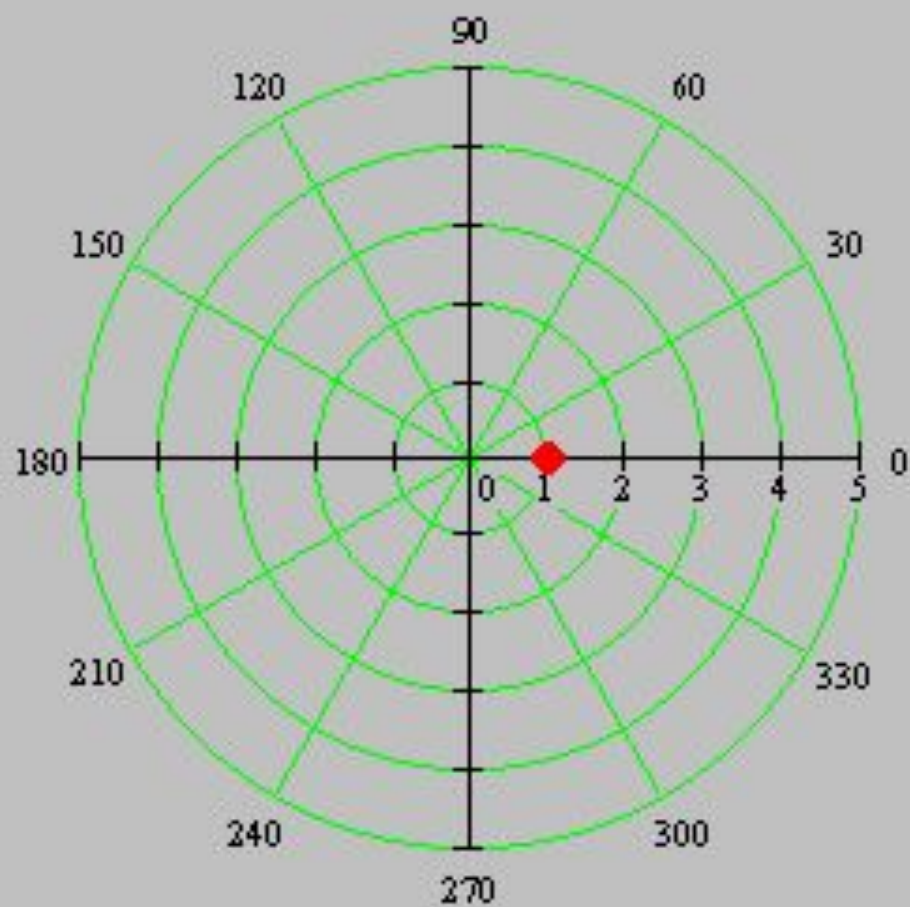
Radians Degrees

$$\theta = 0 \quad \theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0 \quad r(\theta) = 1$$

- Построим кривую

$$r(\theta) = 3 - 2 \cos \theta$$

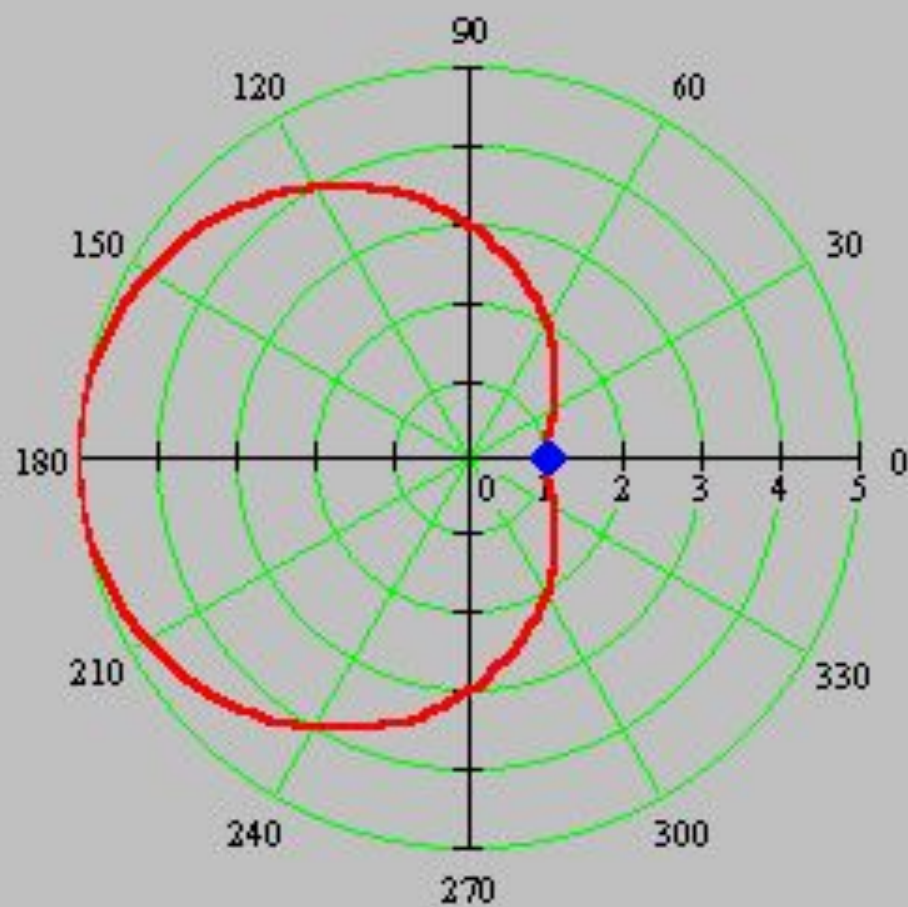
$$r(\theta) := 3 - 2 \cdot \cos(\theta)$$



Radians Degrees

$$\theta = 0 \quad \theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0 \quad r(\theta) = 1$$

$$r(\theta) := 3 - 2 \cdot \cos(\theta)$$



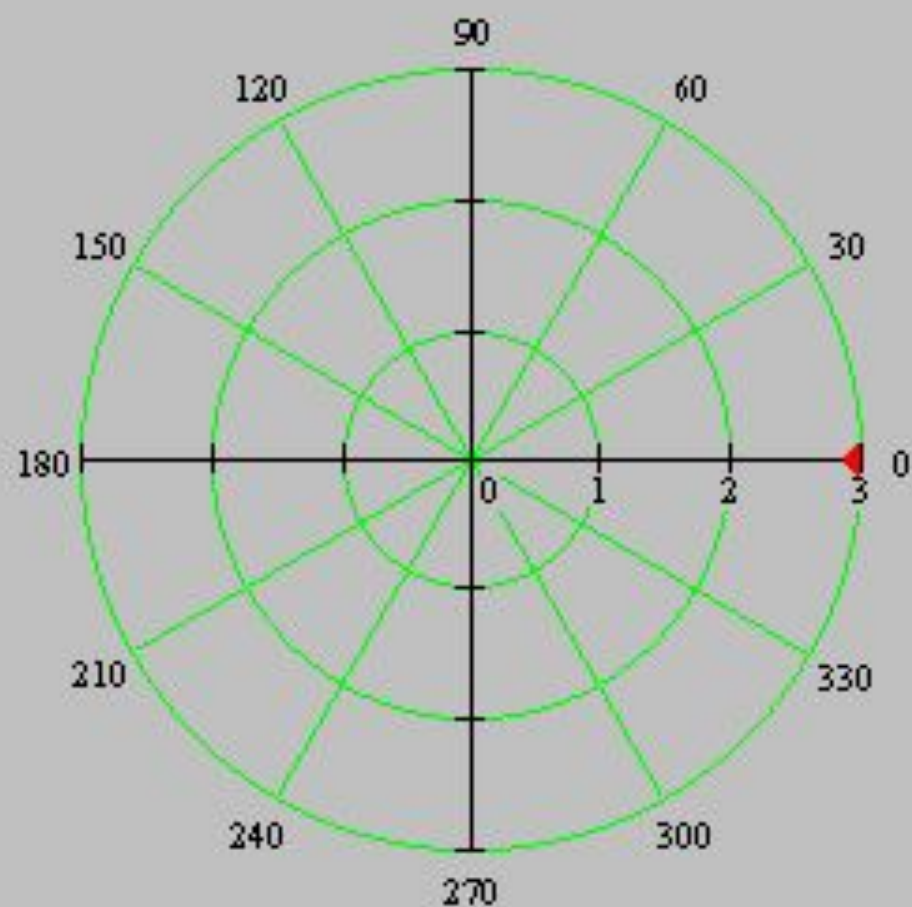
Radians Degrees

| θ | $\theta \cdot \frac{180}{\pi}$ | $r(\theta)$ |
|----------|--------------------------------|-------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0.524 | 30 | 1.268 |
| 1.047 | 60 | 2 |
| 1.571 | 90 | 3 |
| 2.094 | 120 | 4 |
| 2.618 | 150 | 4.732 |
| 3.142 | 180 | 5 |
| 3.665 | 210 | 4.732 |
| 4.189 | 240 | 4 |
| 4.712 | 270 | 3 |
| 5.236 | 300 | 2 |
| 5.76 | 330 | 1.268 |
| 6.283 | 360 | 1 |

- Построим кривую

$$r(\theta) = 1 + 2 \cos \theta$$

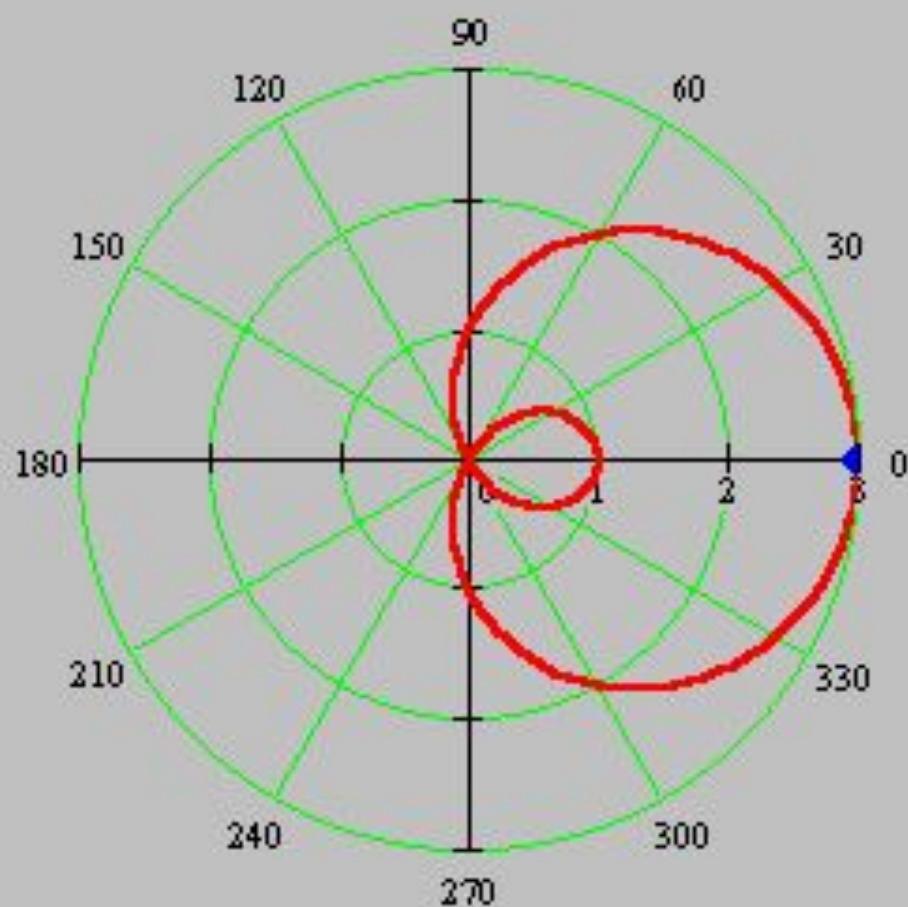
$$r(\theta) := 1 + 2 \cdot \cos(\theta)$$



Radians Degrees

$$\theta = 0 \quad \theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0 \quad r(\theta) = 3$$

$$r(\theta) := 1 + 2 \cdot \cos(\theta)$$



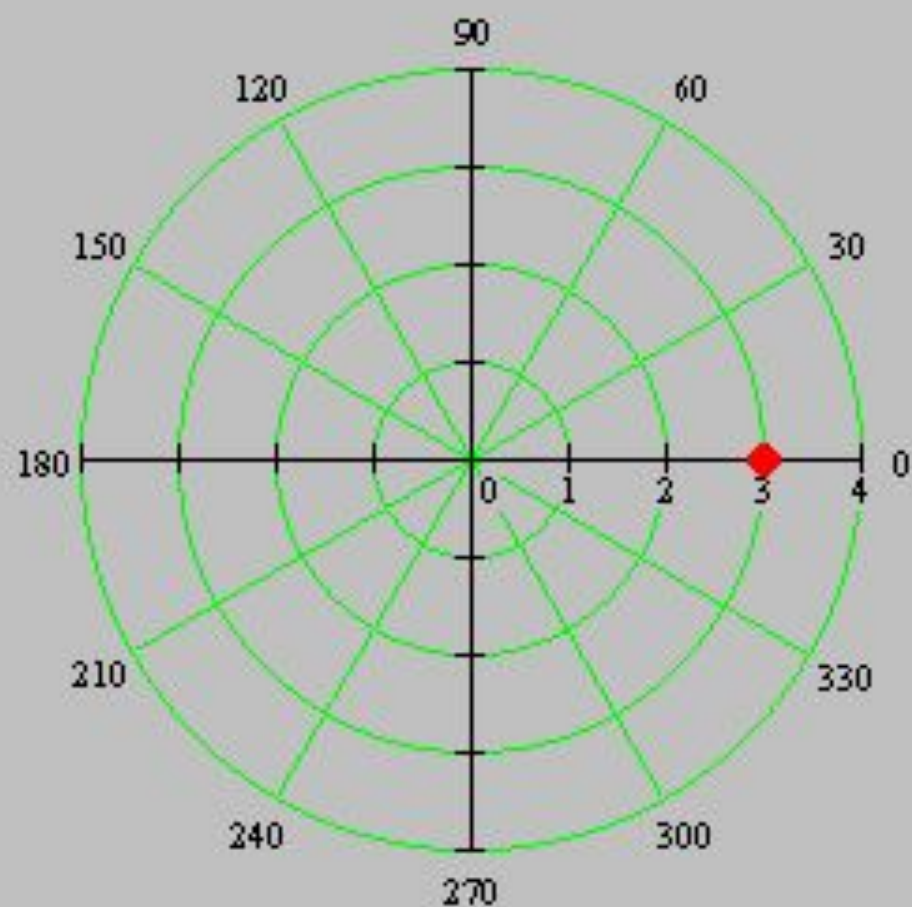
Radians Degrees

| θ | $\theta \cdot \frac{180}{\pi}$ | $r(\theta)$ |
|----------|--------------------------------|-------------|
| 0 | 0 | 3 |
| 0.524 | 30 | 2.732 |
| 1.047 | 60 | 2 |
| 1.571 | 90 | 1 |
| 2.094 | 120 | 0 |
| 2.618 | 150 | -0.732 |
| 3.142 | 180 | -1 |
| 3.665 | 210 | -0.732 |
| 4.189 | 240 | 0 |
| 4.712 | 270 | 1 |
| 5.236 | 300 | 2 |
| 5.76 | 330 | 2.732 |
| 6.283 | 360 | 3 |

- Построим кривую

$$r(\theta) = 3 - \sin \theta$$

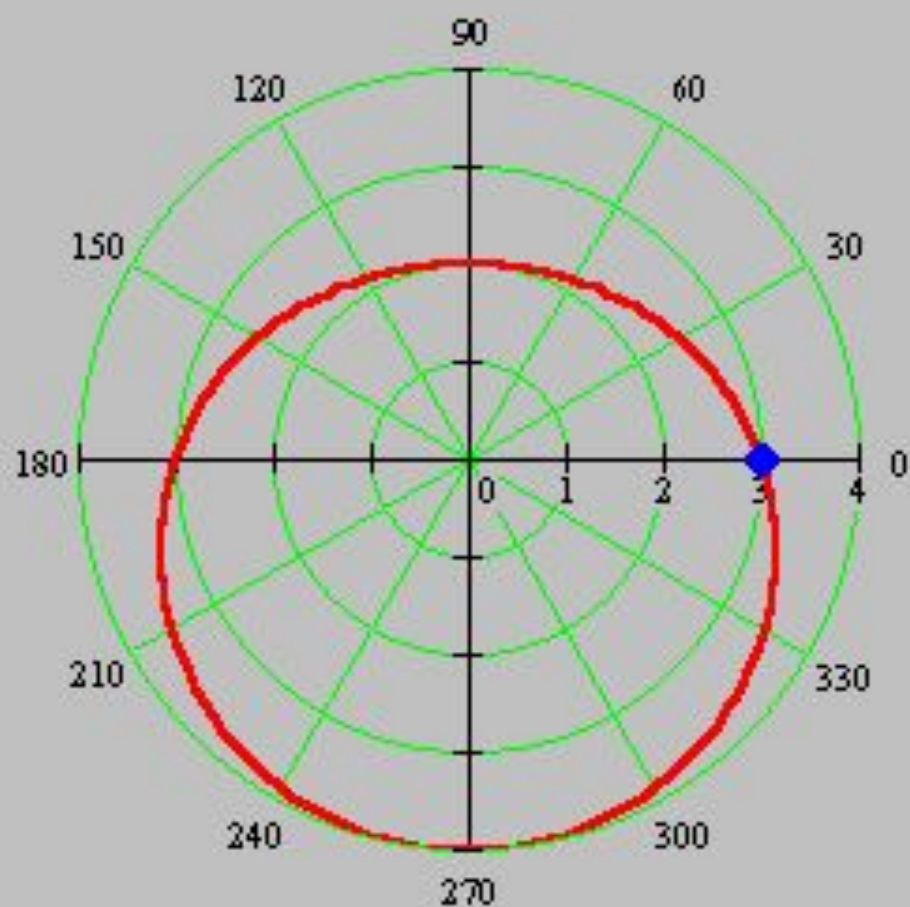
$$r(\theta) := 3 - \sin(\theta)$$



Radians Degrees

$$\theta = 0 \quad \theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0 \quad r(\theta) = 3$$

$$r(\theta) := 3 - \sin(\theta)$$



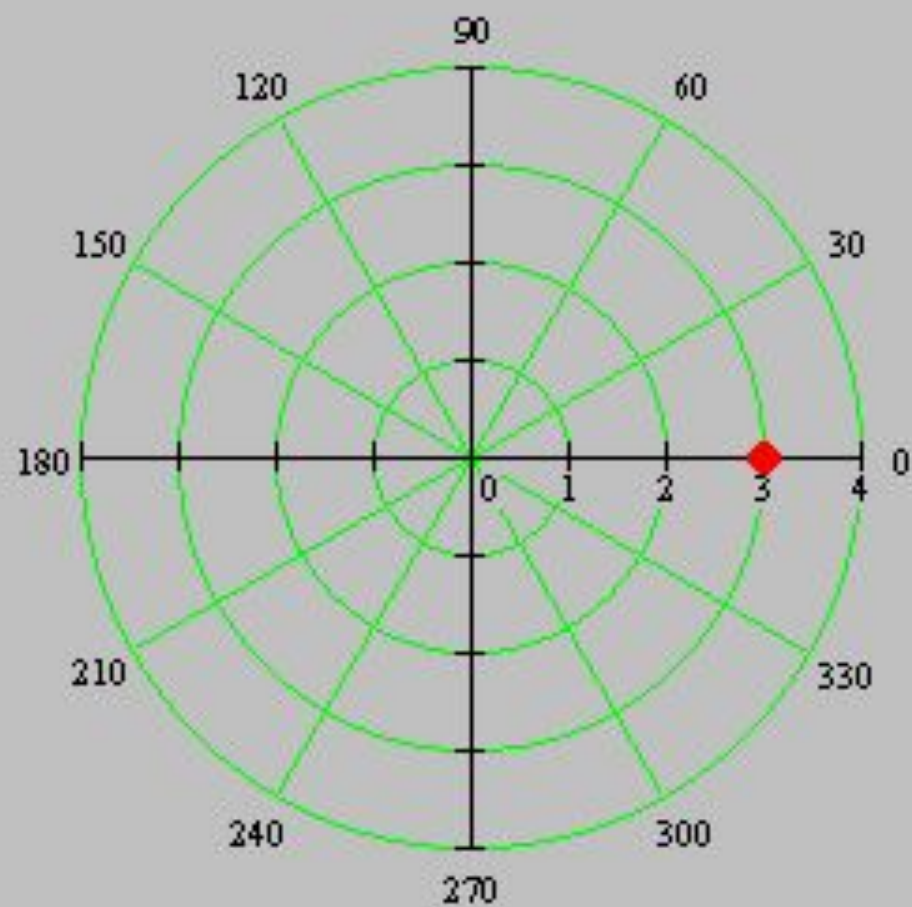
Radians Degrees

| θ | $\theta \cdot \frac{180}{\pi}$ | $r(\theta)$ |
|----------|--------------------------------|-------------|
| 0 | 0 | 3 |
| 0.524 | 30 | 2.5 |
| 1.047 | 60 | 2.134 |
| 1.571 | 90 | 2 |
| 2.094 | 120 | 2.134 |
| 2.618 | 150 | 2.5 |
| 3.142 | 180 | 3 |
| 3.665 | 210 | 3.5 |
| 4.189 | 240 | 3.866 |
| 4.712 | 270 | 4 |
| 5.236 | 300 | 3.866 |
| 5.76 | 330 | 3.5 |
| 6.283 | 360 | 3 |

- Построим кривую

$$r(\theta) = 3 \cos (3\theta)$$

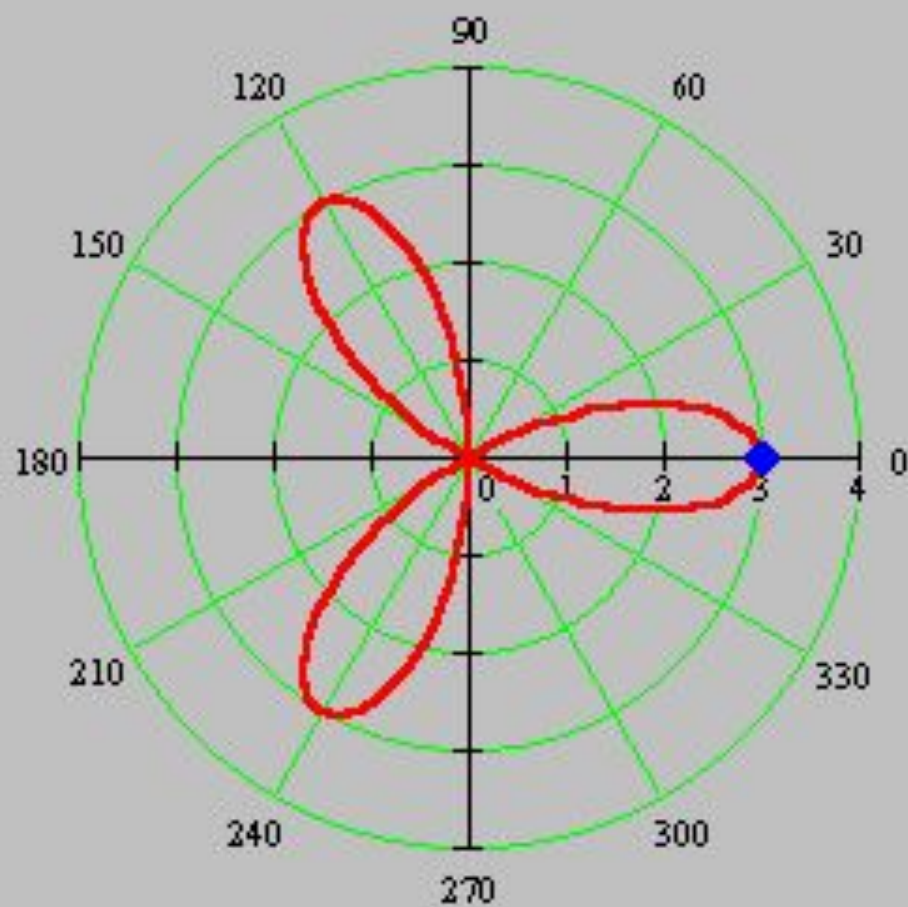
$$r(\theta) := 3 \cdot \cos(3 \cdot \theta)$$



Radians Degrees

$$\theta = 0 \quad \theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0 \quad r(\theta) = 3$$

$$r(\theta) := 3 \cdot \cos(3 \cdot \theta)$$



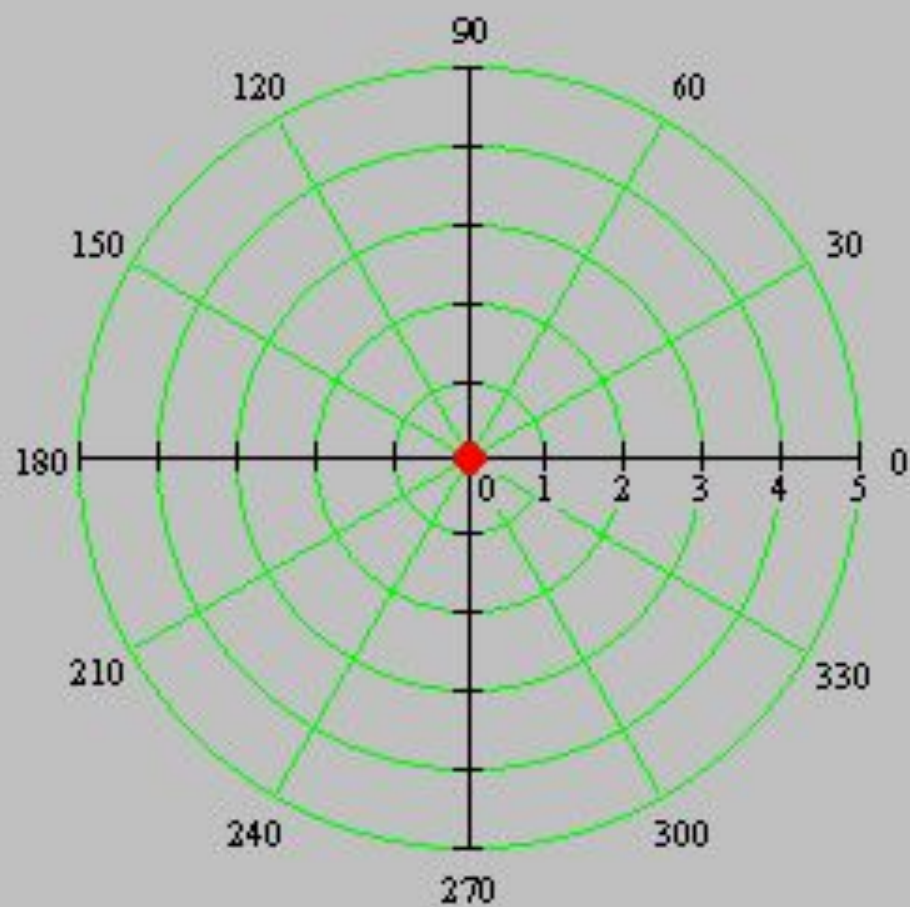
Radians Degrees

| θ | $\theta \cdot \frac{180}{\pi}$ | $r(\theta)$ |
|----------|--------------------------------|-------------|
| 0 | 0 | 3 |
| 0.262 | 15 | 2.121 |
| 0.524 | 30 | 0 |
| 0.785 | 45 | -2.121 |
| 1.047 | 60 | -3 |
| 1.309 | 75 | -2.121 |
| 1.571 | 90 | 0 |
| 1.833 | 105 | 2.121 |
| 2.094 | 120 | 3 |
| 2.356 | 135 | 2.121 |
| 2.618 | 150 | 0 |
| 2.88 | 165 | -2.121 |
| 3.142 | 180 | -3 |

- Построим кривую

$$r(\theta) = 5 \sin (2\theta)$$

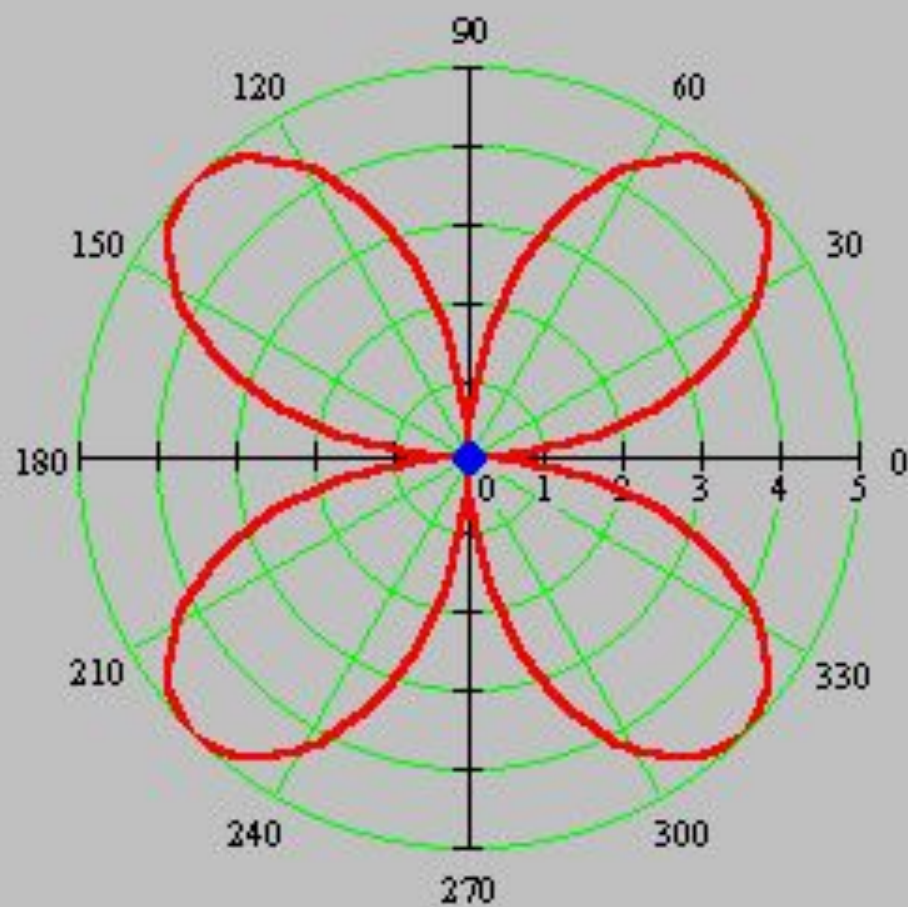
$$r(\theta) := 5 \cdot \sin(2 \cdot \theta)$$



Radians Degrees

$$\theta = 0 \quad \theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0 \quad r(\theta) = 0$$

$$r(\theta) := 5 \cdot \sin(2 \cdot \theta)$$



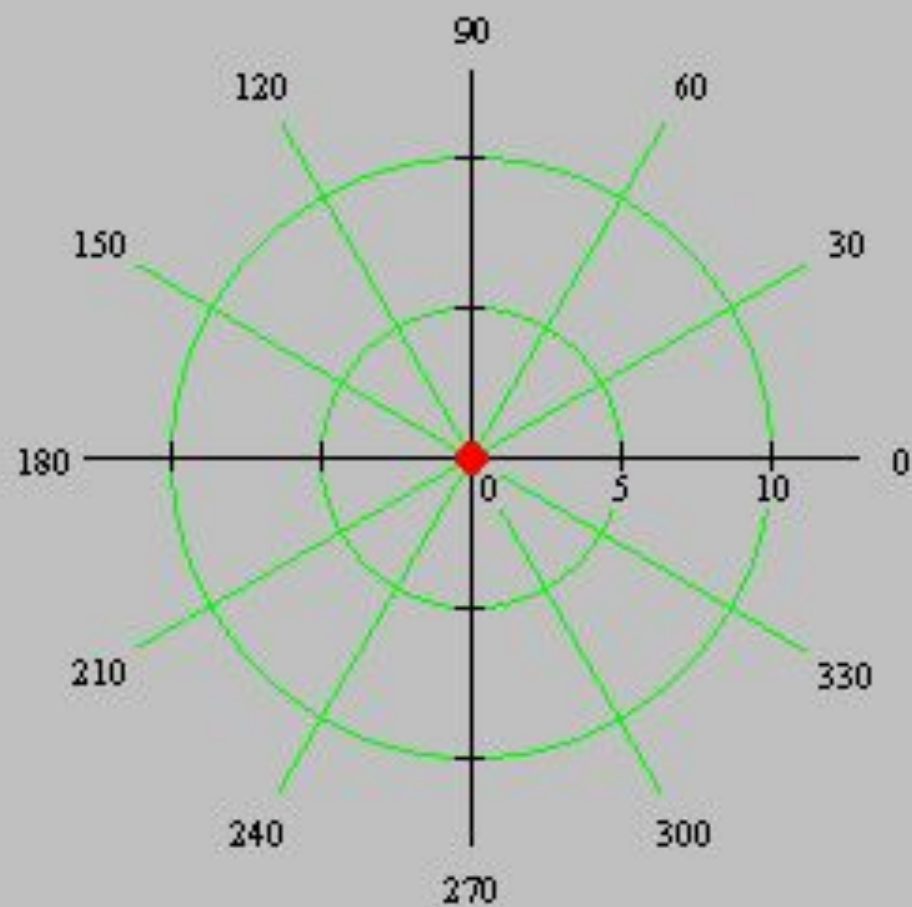
Radians Degrees

| θ | $\theta \cdot \frac{180}{\pi}$ | $r(\theta)$ |
|----------|--------------------------------|-------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0.785 | 45 | 5 |
| 1.571 | 90 | 0 |
| 2.356 | 135 | -5 |
| 3.142 | 180 | 0 |
| 3.927 | 225 | 5 |
| 4.712 | 270 | 0 |
| 5.498 | 315 | -5 |
| 6.283 | 360 | 0 |

- Построим кривую

$$r(\theta) = \theta$$

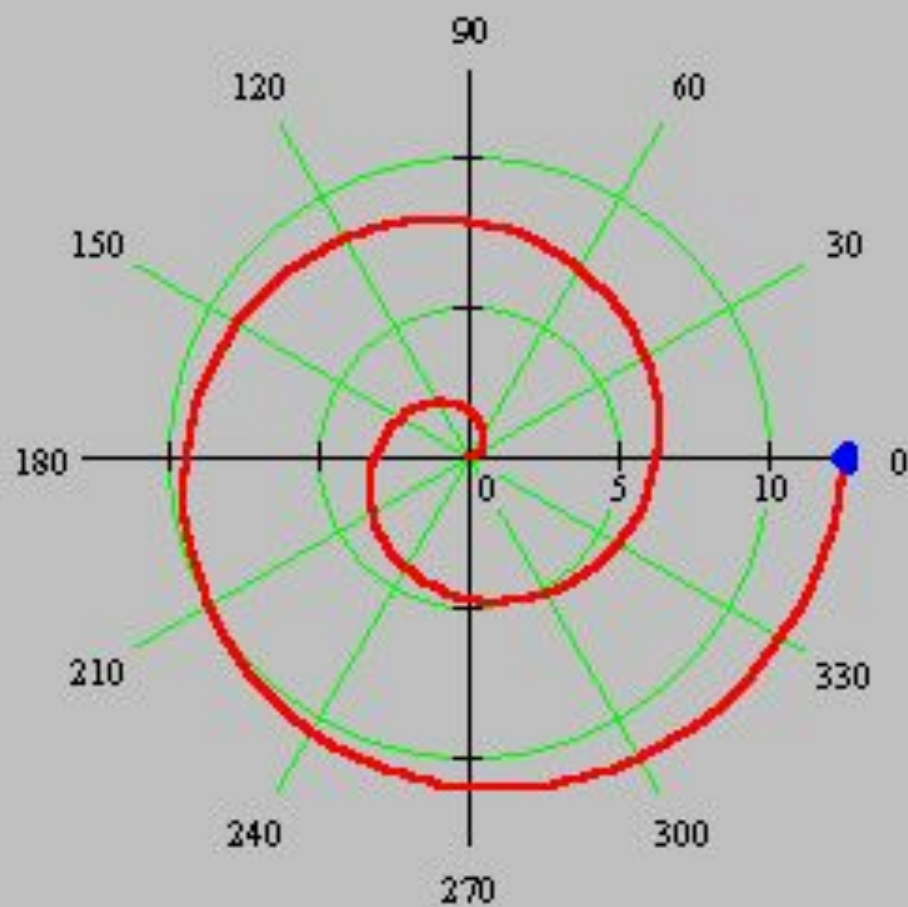
$$r(\theta) := \theta$$



Radians Degrees

$$\theta = 0 \quad \theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0 \quad r(\theta) = 0$$

$$r(\theta) := \theta$$



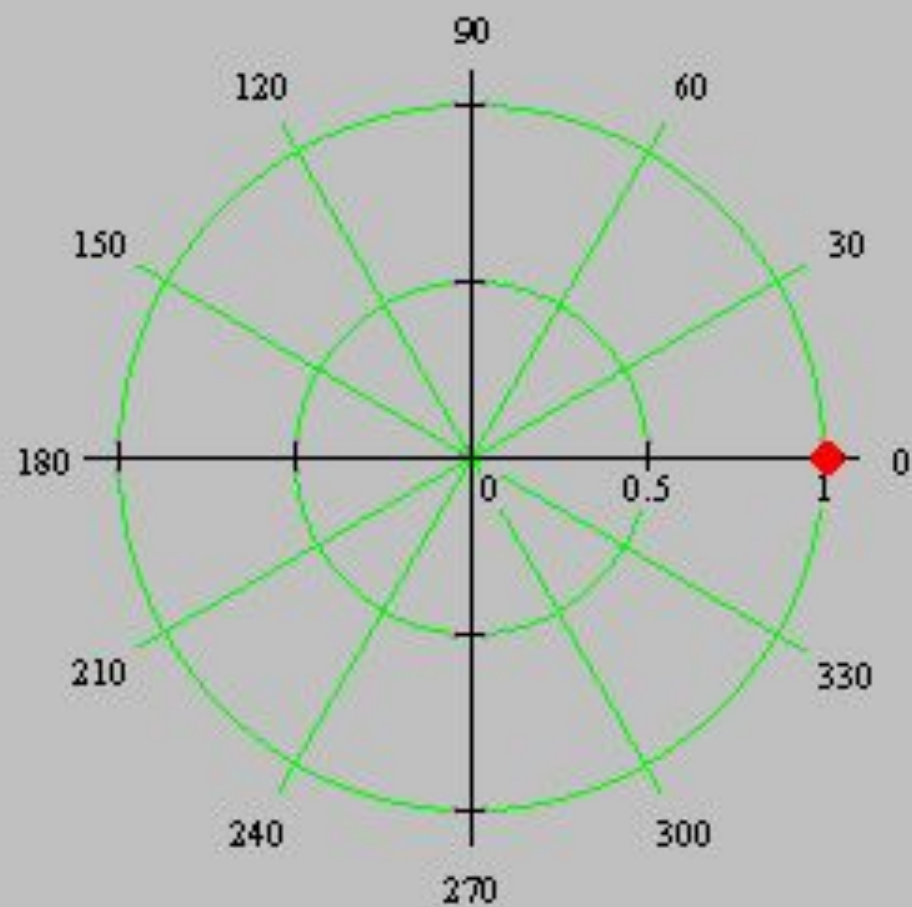
Radians Degrees

| θ | $\theta \cdot \frac{180}{\pi}$ | $r(\theta)$ |
|----------|--------------------------------|-------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 1.571 | 90 | 1.571 |
| 3.142 | 180 | 3.142 |
| 4.712 | 270 | 4.712 |
| 6.283 | 360 | 6.283 |
| 7.854 | 450 | 7.854 |
| 9.425 | 540 | 9.425 |
| 10.996 | 630 | 10.996 |
| 12.566 | 720 | 12.566 |

- Построим кривую

$$r(\theta) = \cos \theta$$

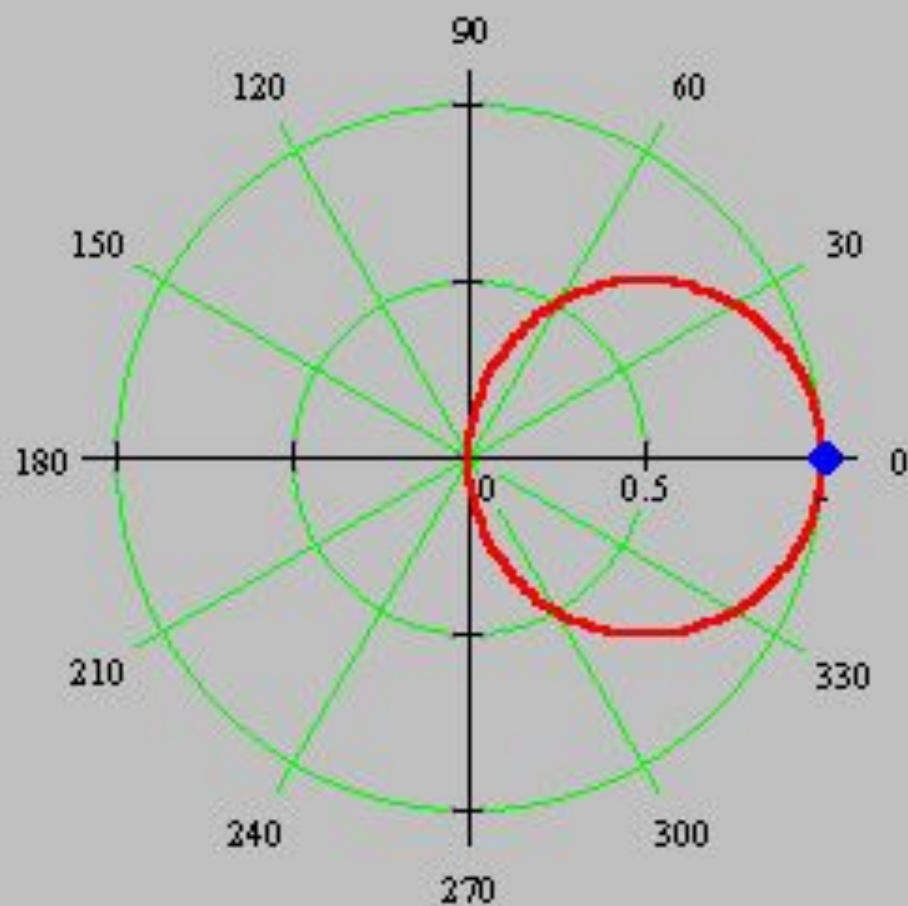
$$r(\theta) := \cos(\theta)$$



Radians Degrees

$$\theta = 0 \quad \theta \cdot \frac{180}{\pi} = 0 \quad r(\theta) = 1$$

$$r(\theta) := \cos(\theta)$$



Radians Degrees

| θ | $\theta \cdot \frac{180}{\pi}$ | $r(\theta)$ |
|----------|--------------------------------|-------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0.262 | 15 | 0.966 |
| 0.524 | 30 | 0.866 |
| 0.785 | 45 | 0.707 |
| 1.047 | 60 | 0.5 |
| 1.309 | 75 | 0.259 |
| 1.571 | 90 | 0 |
| 1.833 | 105 | -0.259 |
| 2.094 | 120 | -0.5 |
| 2.356 | 135 | -0.707 |
| 2.618 | 150 | -0.866 |
| 2.88 | 165 | -0.966 |
| 3.142 | 180 | -1 |

