Теория оптимальной фильтрации и управления

Лекция № 8 (3/4)

«Оптимальная оценка параметров сигнала»

Учебные вопросы

1. Апостериорная плотность вероятности и функция правдоподобия оцениваемого параметра
2. Особенности оценки энергетических и неэнергетических параметров сигнала
3. Оптимальные схемы измерения параметров сигнала

Литература

1.Асанин А.В., Войцеховский В.Ф. Основы теории оптимальной фильтрации: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2020.

2.Войцеховский В.Ф., Григорьева Е.Д. Основы теории оптимальной фильтрации: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2017.

3.Войцеховский В.Ф. Основы статистической теории радиоэлектронных систем: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2013.

1-ый учебный вопрос

«Апостериорная плотность вероятности и функция правдоподобия оцениваемого параметра»

1. Апостериорная плотность вероятности и функция правдоподобия оцениваемого параметра

- Полное вероятностное описание случайной оценки $\hat{\lambda}$, дает ее апостериорная плотность вероятности $p\left(\lambda|\vec{x}_n^*\right)$, то есть плотность вероятности оценки при условии, что получена конкретная выборка $\vec{x}_n^*$. Для нахождения $p\left(\lambda|\vec{x}_n^*\right)$ рассмотрим систему двух случайных величин $\hat{\lambda}, \vec{\xi}_n$, где $\hat{\lambda}$ − случайная оценка; $\vec{\xi}_n$ − случайная выборка. Двумерная плотность вероятности $p(\lambda, \vec{x}_n^*)$, где λ – возможное значение параметра, $\vec{x}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ − возможные значения выборки, в соответствии с формулой двумерной плотности вероятности зависимых случайных величин может быть записана а виде
- $p(\lambda, \vec{x}_n) = p(\lambda)p(\vec{x}_n|\lambda),$ (5.5)
- **или**
- $p(\lambda, \vec{x}_n) = p(\vec{x}_n)p(\lambda|\vec{x}_n).$ (5.6)

- В формулах (5.5), (5.6) из-за равенства левых частей равны и правые. Приравнивая правые части и разрешая относительно $p(\lambda|\vec{x}_n)$, получаем
- $p(\lambda|\vec{x}_n) = kp(\lambda)p(\vec{x}_n|\lambda),$ (5.7)
- где $k = 1/p(\vec{x}_n)$ − коэффициент, не зависящий от параметра λ. Он может быть найден из условия нормировки
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda|\vec{x}_n)d\lambda = k\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)p(\vec{x}_n|\lambda)d\lambda\,,$
- откуда
- $k = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\lambda)p(\vec{x}_n|\lambda)d\lambda}.$ (5.8)

- Если предположить, что выборка приняла в результате наблюдений конкретные значения $\vec{x}_n^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, то выражение (5.7) может быть записано в виде
- $p(\lambda|\vec{x}_n^*) = kp(\lambda)L(\lambda), \qquad (5.9)$
- где $p(\lambda|\vec{x}_n^*)$ − апостериорная плотность вероятности оцениваемого параметра; $p(\lambda)$ − априорная плотность вероятности оцениваемого параметра; $L(\lambda)$ − функция правдоподобия оцениваемого параметра, равная
- $L(\lambda) = p(\vec{x}_n^*|\lambda). \qquad (5.10)$

- Из (5.9) следует, что априорная плотность вероятности $p(\lambda)$ содержит сведения об оцениваемом параметре до производства наблюдений, то есть до получения выборки $\vec{x}_n^*$. Функция правдоподобия (5.10) по своему смыслу является плотностью вероятности выборки, рассматриваемой как функция аргумента λ, когда на место аргументов выборки $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ поставлены конкретные результаты наблюдений $\vec{x}_n^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Поэтому $L(\lambda)$ содержит сведения об оцениваемом параметре λ, полученные в результате наблюдения. В этом смысле апостериорная плотность вероятности $p\left(\lambda \middle| \vec{x}_n^*\right)$ содержит все сведения о λ, как до производства наблюдений, так и полученные в процессе наблюдения.

- В общем случае абсциссы максимумов функций $p(\lambda)$, $L(\lambda)$, $p\left(\lambda|\vec{x}_n^*\right)$ не совпадают между собой (рис. 5.2а). Совпадение абсцисс максимумов апостериорной плотности вероятности и функции правдоподобия имеет место только в том случае, если $p(\lambda)$ имеет равномерное распределение на интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$, не зависящее от λ (рис. 5.2б).

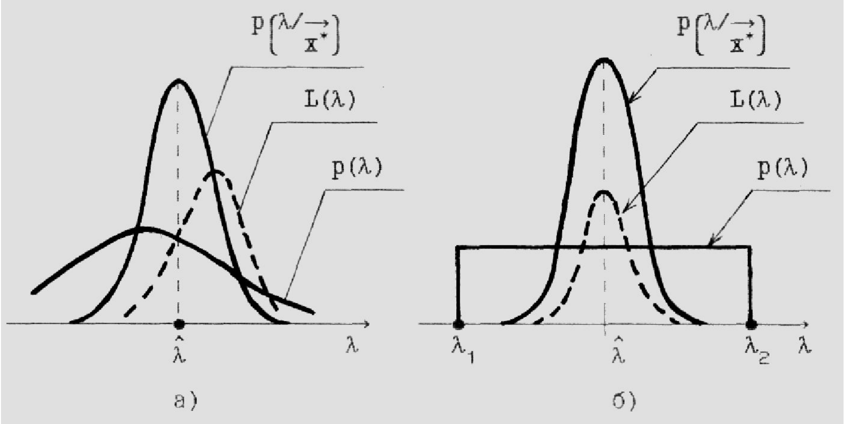

Рис. 5.2. Апостериорная плотность вероятности и функция правдоподобия

- Следует указать на то, что функция правдоподобия $L(\lambda)$ не является плотностью вероятности λ, поэтому она не обладает условием нормировки и ее площадь может быть отличной от единицы. На рис. 5.2б кривая $p\left(\lambda\middle|\vec{x}_n^*\right)$, площадь которой равна единице, накрывает кривую $L(\lambda)$.

2-ой учебный вопрос

«Особенности оценки энергетических и неэнергетических параметров сигнала»

2. Оценка энергетических и неэнергетических параметров сигнала

- Если в процессе измерения информационных параметров на интервале времени $[0, T]$ их значения не изменяются, то в этом случае задача измерения параметров сводится к задаче *оценки параметров сигнала*.

- Пусть на входе измерителя действует случайный процесс $\xi(t)$, представляющий собой сумму детерминированного сигнала $s(t, \square)$ с неизвестным параметром λ и гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0:
- $\xi(t) = s(t, \square) + n(t)$. (5.32)

- Оптимальный измеритель определяет математическую операцию, которую необходимо выполнить под реализацией $x(t)$ процесса $\xi(t)$ на интервале времени $[0, T]$, чтобы найти оптимальную, то есть наилучшую, оценку параметра λ в смысле выбранного критерия. При этом считается, что задача обнаружения сигнала решена, и на входе измерителя действительно существует сумма (5.32).
- Самое большее, что может выдать любой измеритель − это сформировать апостериорную плотность вероятности оцениваемого параметра λ
- $p[\lambda/x(t)] = k_1 p(\lambda) L(\lambda),$ (5.33)

- $L(?)$ – функция правдоподобия
- $L(\lambda) = p[x(t)/?] = k \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x(t) - s(t,\lambda)]^2 dt\right\}$. (5.34)
- Если функция правдоподобия имеет один максимум, то правдоподобная оценка λ находится из решения уравнения
- $\frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = 0,$ (5.35)
- либо из решения уравнения
-
- $\frac{d}{d\lambda} y(\lambda) = 0,$ (5.36)
- где
- $y(\lambda) = \frac{2}{N_0}\int_0^T x(t) \cdot s(t,\lambda) dt - \frac{1}{2} q^2(\lambda),$ (5.37)
- $\frac{1}{2} q^2(\lambda) = \frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t,\lambda)\, dt = \frac{E_S(\lambda)}{N_0}.$ (5.38)

Величина $y(?)$ является достаточной статистикой, представляющей собой разность между корреляционным интегралом и половиной квадрата отношения сигнал/шум. При этом, как корреляционный интеграл, так и отношения сигнал/шум в общем случае зависят от параметра λ.

- Все оцениваемые параметры λ можно разделить на энергетические и неэнергетические. *Энергетическим* называется такой параметр λ, от которого зависит энергия сигнала $E_s(\lambda)$ и, соответственно, отношение сигнал/шум $q(\lambda)$ (5.38). К энергетическим параметрам, например, относятся амплитуда и длительность сигнала. *Неэнергетическим* называется такой параметр λ, от которого энергия сигнала E_s и, соответственно, отношение сигнал/шум не зависят. К энергетическим параметрам, например, относятся начальная фаза, частота, момент прихода сигнала.
- Для неэнергетического параметра λ в качестве достаточной статистики $y(\lambda)$ вместо выражения (5.37) удобнее использовать соотношение
- $$y(\lambda) = \frac{2}{N_0}\int_0^T x(t)\cdot s(t,\lambda)dt. \qquad (5.39)$$

3-ий учебный вопрос

«Оптимальные схемы измерения параметров сигнала»

3. Оптимальные схемы измерения параметров сигнала

- Структурная схема оптимального измерителя может быть получена из рассмотрения решения уравнения правдоподобия (5.36). Если решение уравнения (5.36) является точным, то оптимальная схема находится однозначно. Если же уравнение (5.36) является трансцендентным, то его решение находится с той или иной степенью приближения, что соответственно, приводит к различным схемам измерителя. Рассмотрим эти два случая построения структурных схем.

- В качестве первого случая рассмотрим получение оптимальной оценки амплитуды сигнала. Запишем копию сигнала в виде
- $s(t, \lambda) = as_1(t),$ (5.40)
- где $\lambda = a$, то есть оцениваемым параметром является амплитуда a; $s_1(t)$ − сигнал с единичной амплитудой; например, $s_1(t) = \cos(\omega_0 t)\,, t \in [0, T]$.
- Так как параметр a является энергетическим, то
- $y(a) = \frac{2a}{N_0}\int_0^T x(t) \cdot s_1(t)dt -$

$\frac{a^2}{N_0}\int_0^T s_1^2(t)dt\,.$ (5.41)

- Продифференцировав (5.41) по a и приравняв нулю производную, согласно (5.36), получим следующее уравнение правдоподобия:
- $\frac{2}{N_0}\int_0^T x(t)\cdot s_1(t)dt - \frac{2a}{N_0}\int_0^T s_1^2(t)dt = 0,$
- откуда
- $\hat{a} = \frac{\int_0^T x(t)\cdot s_1(t)dt}{\int_0^T s_1^2(t)dt} = k\int_0^T x(t)\cdot s_1(t)dt\,,$ (5.42)
- где
- $k = \frac{1}{\int_0^T s_1^2(t)dt}.$ (5.43)

В качестве второго случая рассмотрим получение оптимальной оценки для любого неэнергетического параметра. Учитывая, что в этом случае уравнение правдоподобия (5.36) носит трансцендентный характер, будем искать оценку параметра λ, при котором статистика $y(\lambda)$, описываемая выражением (5.39), достигает максимума, напрямую

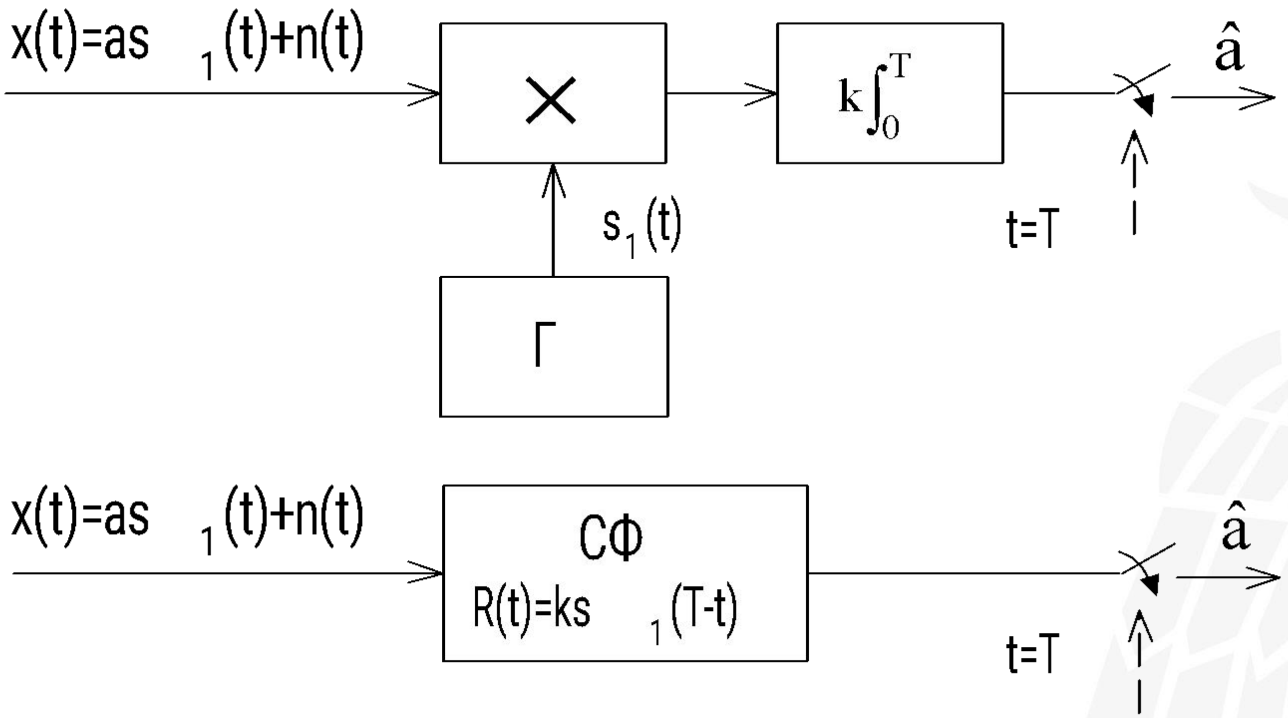

Рис. 5.3. Структурные схемы измерителей амплитуды сигнала

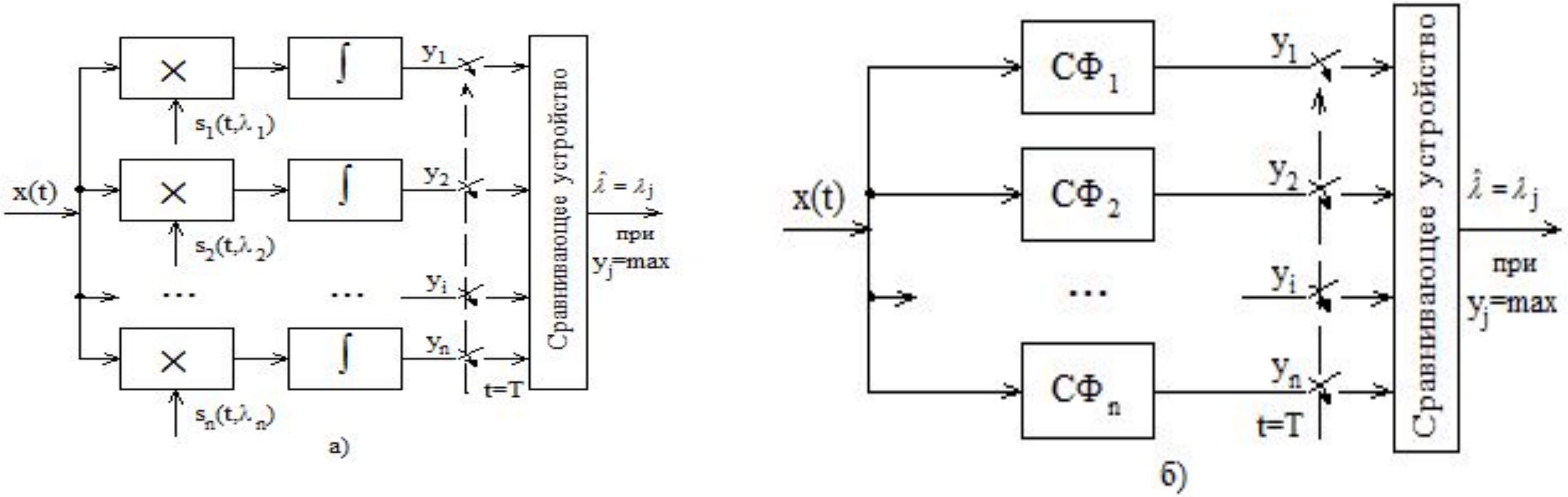

Рис. 5.4. Структурные схемы измерителей неэнергетических параметров сигнала

- Оптимальные устройства оценки параметров находят широкое применение в РТС различного назначения. Например, оптимальные измерители времени запаздывания и частоты смещения радиоимпульса, отраженного от воздушной цели, по отношению к излучаемому импульсу, позволяют в РЛС реализовать измерения дальности и радиальной скорости цели. Оптимальный измеритель фазы (фазометр) позволяет измерять фазовую задержку сигнала в фазовых радионавигационных системах.