# Здравствуйте!

## Лекция №14

## Сходимость несобственных интегралов второго рода от неотрицательных функций

Пусть функции $f(x)$и $g(x)$ неотрицательны (то есть $f(x)\geq 0$ и $g(x)\geq 0$ ) и **точка *b* является особой точкой** для обеих из них. Приводимые ниже теоремы полностью аналогичны соответствующим теоремам для несобственных интегралов первого рода.

**Теорема 1. Для сходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы**

$$\exists L < +\infty \ \forall \eta \ 0 < \eta < b - a \ \int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx \le L.$$

*Доказательство.*

Рассмотрим функцию $\Phi(\eta) = \int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx$. Если $\eta\downarrow$, то область интегрирования увеличивается, а так как $f(x) \ge 0$, то и $\Phi(\eta)\uparrow$. Поэтому, для существования конечного $\lim\limits_{\eta\to+0} \Phi(\eta)$, согласно теоремы о монотонно возрастающей функции, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху, то есть должно быть выполнено условие

$$\exists L < +\infty \ \forall \eta \ 0 < \eta < b - a \ \Phi(\eta) = \int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx \le L,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 2. Пусть** $\forall x \in [a,b)\ \ f(x) \le g(x)$. **Тогда**

**а) из сходимости** $\int_a^b g(x)dx$ **следует сходимость** $\int_a^b f(x)dx$;

**б) из расходимости** $\int_a^b f(x)dx$ **следует расходимость** $\int_a^b g(x)dx$.

*Доказательство.*

А) Пусть $\int_a^b g(x)dx$ сходится. Тогда, согласно теореме 1,

$$\exists L < +\infty \ \forall \eta \ \ 0 < \eta < b - a \quad \int_a^{b-\eta} g(x)dx \le L.$$

Но $\forall x \in [a, b) \ \ f(x) \le g(x)$ и поэтому

$$\forall \eta \ \ 0 < \eta < b - a \quad \int_a^{b-\eta} f(x)dx \le \int_a^{b-\eta} g(x)dx \le L,$$

и, согласно теореме 1, $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Б) Пусть $\int_a^b f(x)dx$ расходится. Так как $f(x) \geq 0$, то это означает, что $\lim_{\eta \to +0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx = +\infty$. Но, так как $g(x) \geq f(x)$, то $\int_a^{b-\eta} g(x)dx \geq \int_a^{b-\eta} f(x)dx$, и поэтому

$$\lim_{\eta \to +0} \int_a^{b-\eta} g(x)dx \geq \lim_{\eta \to +0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx = +\infty,$$

что и означает, что $\lim_{\eta \to +0} \int_a^{b-\eta} g(x)dx = +\infty$, то есть $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

**Теорема 3. Пусть** $\exists \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$**,** $\quad 0 < K < +\infty$**. Тогда интегралы** $\int\limits_a^b f(x)dx$ **и** $\int\limits_a^b g(x)dx$ **сходятся или расходятся одновременно.**

*Доказательство.*

1. В формулировке теоремы сказано, что $\exists \lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$. Согласно определению предела это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \quad b - \eta \le x < b \quad K - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < K + \varepsilon. \qquad (*)$$

2. Пусть $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится. В (*) рассмотрим вторую половину неравенства, которую запишем в виде $f(x) < (K+\varepsilon)g(x)$. Тогда имеем следующую цепочку следований (сообразите сами, где идет ссылка на свойства несобственных интегралов и где на теорему 2):

$$\int\limits_a^b g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_{b-\eta}^b g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_{b-\eta}^b (K+\varepsilon)g(x)dx \text{ сходится}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{b-\eta}^b f(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \text{ сходится.}$$

3. Пусть теперь $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. Возьмем $\varepsilon$ настолько малым, чтобы было $K-\varepsilon>0$. Тогда из левого неравенства в (*) следует, что $g(x)<f(x)/(K-\varepsilon)$ и мы имеем следующую цепочку следований (и снова сообразите сами, где идет ссылка на свойства несобственных интегралов и где на теорему 2):

$$\int\limits_a^b f(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_{b-\eta}^b f(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_{b-\eta}^b \frac{f(x)}{K-\varepsilon}dx \text{ сходится} \Rightarrow$$

$$\int\limits_{b-\eta}^b g(x)dx \text{ сходится} \Rightarrow \int\limits_a^b g(x)dx \text{ сходится}.$$

**Практический признак сходимости.**

**Пусть** $b$ **– особая точка и** $\exists \lim\limits_{x \to b} (b-x)^{\lambda} f(x) = K$ **,** $0 < K < +\infty$**.**

**Тогда** $\int\limits_a^b f(x)dx$ **сходится при** $\lambda < 1$ **и расходится при** $\lambda \geq 1$**.**

(Заметим снова, что вопрос о том, как же находить $\lambda$, остается на данном этапе открытым).

*Доказательство.*

Возьмем функцию $g(x)$ в виде $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^{\lambda}}$. Тогда условие теоремы 3 примет вид $\exists \lim\limits_{x \to b} (b-x)^{\lambda} f(x) = K$ , $0 < K < +\infty$ и $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$.

Рассмотрим поэтому вопрос о сходимости этого интеграла.

1. Пусть $\lambda \neq 1$. Тогда

$$. \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \int_\eta^{b-a} \frac{du}{u^\lambda} = \int_\eta^{b-a} u^{-\lambda} du =$$

$$= \left.\frac{u^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right|_\eta^{b-a} = \frac{(b-a)^{1-\lambda} - \eta^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

Будут два варианта:

а) $\lambda < 1$. В этом случае $1-\lambda > 0$, поэтому $\lim\limits_{\eta \to +0} \eta^{1-\lambda} = 0$ и

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{\eta \to +0} \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

так что $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ сходится.

б) $\lambda > 1$. В этом случае $1-\lambda < 0$, поэтому $\lim\limits_{\eta\to+0} \eta^{1-\lambda} = +\infty$ и

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{\eta\to+0} \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = +\infty,$$

так что $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ расходится.

2. $\lambda = 1$. Тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\eta\to+0} \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\eta\to+0} \int_\eta^{b-a} \frac{du}{u} = \lim_{\eta\to+0} \left(\ln(b-a) - \ln\eta\right) = +\infty,$$

так что $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{b-x}$ расходится.

Таким образом, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \ge 1$. По теореме 3 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ также сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \ge 1$.

## Главные значения несобственных интегралов

Вернемся к интегралу $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Его определение было следующим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_{B}^{a} f(x)dx + \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{a}^{A} f(x)dx \ (a - \text{любое}).$$

Обратите внимание на одну деталь: в этом определении **два** предела и величины $A$ и $B$ совершенно **не связаны** друг с другом, они живут «каждый сам по себе».

Так вот, **главным значением** этого интеграла называется величина

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx.$$

(V.p. – первые буквы слов «valeur principale», что, в переводе с французского, и означает «главное значение»). Обратите внимание на то, что здесь только **один** предел. Это выражение получается из предыдущего, если завязать величины $A$ и $B$ соотношением $B = -A$.

Если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ не существует, но существует $\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, то говорят, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ существует **в смысле главного значения**.

Рассмотрим вычисление главного значения $\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Пусть $f(x)$ – нечетная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$. Тогда очевидно, что $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 0$ и поэтому в данной ситуации

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0.$$

Пусть теперь $f(x)$ – четная функция, то есть $f(-x) = f(x)$. Тогда очевидно, что $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{A} f(x)dx$ и поэтому в данной ситуации

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx.$$

В общем случае $f(x)$ можно представить в виде $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, где

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Очевидно, что $\varphi(x)$ есть четная функция, а $\psi(x)$ – нечетная. Поэтому

$$\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty}\varphi(x)dx=\int_{0}^{\infty}[f(x)+f(-x)]dx,$$

что и является рабочей формулой для вычисления $\text{V.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ .

Рассмотрим теперь несобственные интегралы второго рода. Пусть $c$ есть особая точка функции $f(x)$ и $a<c<b$. Тогда, как уже говорилось выше,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta_1\to+0}\int_a^{c-\eta_1} f(x)dx + \lim_{\eta_2\to+0}\int_{c+\eta_2}^b f(x)dx.$$

Снова обратите внимание на то, что в этом определении **два** предела и величины $\eta_1$ и $\eta_2$ никак друг с другом не связаны. Главное значение этого интеграла определяется так

$$\text{V.p.}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to+0}\left[\int_a^{c-\eta} f(x)dx + \int_{c+\eta}^b f(x)dx\right],$$

то есть величины $\eta_1$ и $\eta_2$ стали **одинаковыми** и предел **один**.

## Преобразование несобственных интегралов

### Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на промежутке $[a,b)$ и точка $b$ является особой точкой по крайней мере для одной из них. Тогда, вспоминая формулу интегрирования определенных интегралов по частям, получим

$$\int_a^{b-\eta} u dv = u(b-\eta)v(b-\eta) - u(a)v(a) - \int_a^{b-\eta} v du.$$

Сделаем предельный переход $\eta \to 0$. Переменная $\eta$ есть в трех слагаемых. Если существуют два предела, то существует и третий, и мы получим

$$\int_a^b u dv = \lim_{\eta \to +0} \left[ u(b-\eta)v(b-\eta) \right] - u(a)v(a) - \int_a^b v du,$$

что является формулой интегрирования по частям в несобственных интегралах.

Для несобственных интегралов первого рода она принимает вид

$$\int_a^{\infty} u dv = \lim_{A \to +\infty} \left[ u(A)v(A) \right] - u(a)v(a) - \int_a^{\infty} v du.$$

**Замена переменных**

**Теорема. Пусть**

1. $f(x)$ **определена на** $[a,b)$ **(*b* – особая точка);**
2. $x=\varphi(t)$, **где на** $[\alpha,\beta)$ $\varphi(t)\uparrow$ **и существует непрерывная** $\varphi'(t)$**;**
3. $\varphi(\alpha)=a$ **и** $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$**.**

**Тогда имеет место формула**

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

*Доказательство.*

Пусть $b-\eta=\varphi(\beta-\eta')$. В силу непрерывности $\varphi(t)$ при $\eta\to 0$ также и $\eta'\to 0$. Вспоминая замену переменных в определенных интегралах, имеем:

$$\int_a^{b-\eta} f(x)dx=\int_\alpha^{\beta-\eta'} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

После предельного перехода $\eta\to 0$, получаем

$$\int_a^{b} f(x)dx=\int_\alpha^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

*Пример.*

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{\infty} \sin(x^2)dx$, который называется интегралом Френеля. Вопрос о его сходимости не может быть решен на основании изученных нами признаков.

Сделаем замену переменных $x = \sqrt{t}$. Тогда $dx = dt/2\sqrt{t}$ и мы имеем:

$$\int\limits_0^{\infty} \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Получившийся интеграл сходится по признаку Дирихле.