Интегрирование рациональных функций

- Дробно – рациональная функция
- Простейшие рациональные дроби
- Разложение рациональной дроби на простейшие дроби
- Интегрирование простейших дробей
- Общее правило интегрирования рациональных дробей

Дробно – рациональная функция

Дробно – рациональной функцией называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

многочлен степени m

многочлен степени n

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $m < n$, в противном случае дробь называется ***неправильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}$$

Дробно – рациональная функция

Привести неправильную дробь к правильному виду: $\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^4-5x+9 & x-2 \\
\cline{2-2}
x^4-2x^3 & \boxed{x^3+2x^2+4x+3} \\
\cline{1-1}
-\;2x^3-5x+9 & \\
2x^3-4x^2 & \\
\cline{1-1}
-\;4x^2-5x+9 & \\
4x^2-8x & \\
\cline{1-1}
-\;3x+9 & \\
3x-6 & \\
\cline{1-1}
\boxed{15} &
\end{array}
$$

$$\frac{x^4-5x+9}{\boxed{x-2}}=\boxed{x^3+2x^2+4x+3}+\frac{\boxed{15}}{\boxed{x-2}}$$

Простейшие рациональные дроби

Правильные рациональные дроби вида:

$$(\mathrm{I})\quad \frac{A}{x-a}$$

$$(\mathrm{II})\quad \frac{A}{(x-a)^k}\qquad (k \geq 2;\, k \in N)$$

$$(\mathrm{III})\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\qquad (p^2-4q<0)$$

$$(\mathrm{I}V)\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\qquad (p^2-4q<0;\quad k \geq 2;\, k \in N)$$

Называются ***простейшими рациональными дробями*** $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{I}V$ типов.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Теорема: Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители:

$$Q(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)^k \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_1 x + q_1) \cdot$$

$$\cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^s$$

можно представить, притом единственным образом в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x - x_2)^k}$$

$$+ \frac{Cx + D}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_2 x + q_2} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + p_2 x + q_2)^s}$$

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

$$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}+\frac{B_3}{(x-3)^3}$$

$$\frac{x^3+3}{x^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{7x^2+8x+9}{(x-4)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-4}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов *A, B, C, D*… применяют два метода: ***метод сравнивания коэффициентов и метод частных значений переменной***. Первый метод рассмотрим на примере.

Разложение рациональной дроби на простейшие дроби

Представить дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\boxed{\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}}$$

$$\frac{A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}$$

Приведем простейшие дроби к общему знаменателю

$$Ax^2-2Ax+5A+Bx^2+Cx-Bx-C=2x^2-3x-3$$

Приравняем числители получившейся и исходной дробей

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} A+B=2 \\ -2A+C-B=-3 \\ 5A-C=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=3 \\ C=-2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x

Интегрирование простейших дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

I $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \boxed{A\ln|x-a|+C}$$

II $$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) =$$

$$= \boxed{\frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C}$$

III $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$$

Интегрирование дроби 3 типа рассмотрим на примере.

Интегрирование простейших дробей

$$\int \frac{3x+1}{\left[x^2+2x\right]+10}\,dx = \int \frac{3x+1}{(x^2+2x+1)+9}\,dx =$$

$$= \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9}\,dx = \begin{vmatrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}\,dt =$$

$$= \int \frac{3t-2}{t^2+9}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} - 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+9\right)}{t^2+9} -$$

$$-\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right| - \frac{2}{3}arctg\frac{t}{3} + C =$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+10\right| - \frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3} + C}$$

Интегрирование простейших дробей

$$\mathrm{IV} \quad \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx$$

Интеграл данного типа с помощью подстановки: $x+\frac{p}{2}=t$

приводится к сумме двух интегралов:

$$M\boxed{\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}} + N_1\boxed{\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}}$$

Первый интеграл вычисляется методом внесения t под знак дифференциала.

Второй интеграл вычисляется с помощью рекуррентной формулы:

$$\boxed{\mathrm{I}_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}\cdot \mathrm{I}_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right)}$$

Интегрирование простейших дробей

$$I_3=\int\frac{dt}{(t^2+1)^3}$$ $a = 1;\ k = 3$ $$I_1=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctg\ t$$

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\cdot I_1+\frac{t}{2(2-1)(t^2+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot arctg\ t+\frac{t}{2(t^2+1)}$$

$$I_3=\frac{2\cdot3-3}{2\cdot3-2}\cdot I_2+\frac{t}{2(3-1)(t^2+1)^2}=$$

$$=\boxed{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}arctg\ t+\frac{t}{2(t^2+1)}\right)+\frac{t}{4(t^2+1)^2}+C}$$

Общее правило интегрирования рациональных дробей

- Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.
- Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами
- Найти неопределенные коэффициенты методом сравнения коэффициентов или методом частных значений переменной.
- Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример

$$I = \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx$$

Приведем дробь к правильному виду.

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 + 2x^3 + 4x + 4 & x^3 + 2x^2 + x \\ \cline{2-2}
-\;\underline{x^5 + 2x^4 + x^3} & x^2 - 2x + 5 \\
-2x^4 + x^3 + 4x + 4 & \\
-\;\underline{-2x^4 - 4x^3 - 2x^2} & \\
5x^3 + 2x^2 + 4x + 4 & \\
-\;\underline{5x^3 + 10x^2 + 5x} & \\
-8x^2 - x + 4 &
\end{array}
$$

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2 + x} = x^2 - 2x + 5 + \frac{-8x^2 - x + 4}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Пример

$$\frac{-8x^2-x+4}{x^3+2x^2+x}=\frac{-8x^2-x+4}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

Представим дробь в виде суммы простейших дробей

Разложим знаменатель правильной дроби на множители

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx=-8x^2-x+4$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right| \begin{array}{c} A=4 \\ -C=-3 \\ 4A+2B+C=-5 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-12 \\ C=3 \end{cases}$$

Найдем неопределенные коэффициенты методом частных значений переменной

$$\frac{-8x^2-x+4}{x^3+2x^2+x}=\frac{4}{x}-\frac{12}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}$$

Пример

$$\mathrm{I} = \int x^2 - 2x + 5 + \frac{4}{x} - \frac{12}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$\int x^2 dx - 2\int x dx + 5\int dx + 4\int \frac{dx}{x} - 12\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \boxed{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + 4\ln|x| - 12\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C}$$